И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.925

Р.И. КАДИЕВ (мл.)

ИЗУЧЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, СОДЕРЖАЩИМ δ И δ' ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пусть C — линейное пространство комплексных чисел, $L_2(a,b)$ — линейное пространство скалярных комплекснозначных функций на (a,b), модули которых суммируемы с квадратом, $(\cdot,\cdot)_X$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве X $((\cdot,\cdot)_{L_2(-\infty,\infty)}=(\cdot,\cdot))$, R^2 — 2-мерное евклидово пространство, $R_\lambda(A)$ — резольвента оператора A, i — мнимая единица.

Рассмотрим уравнение

$$(H_{1,1}y)(x)=\lambda y(x),\quad x\in(-\infty,\infty), \tag{1}$$

где

$$(H_{1,1}f)(x)\equiv -f''(x)+q(x)f(x)+\alpha\delta(x-x_1)f(x)+\beta\delta'(x-x_2)f(x),$$

α, β, x_1, x_2 — вещественные числа $(0<x_1<x_2)$, $q(x)$ — скалярная неотрицательная функция на $(-\infty,\infty)$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)q(x)dx<\infty$.

Определение. Решением уравнения (1) будем называть гладкую в интервалах $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2), (x_2,∞) функцию $y(x)$, которая удовлетворяет условиям

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(-\infty,\infty)\ \ (x\neq x_j,\ \ j=1,2),$$

$$y(x_1+0)=y(x_1-0)=y(x_1),\quad y'(x_1+0)-y'(x_1-0)=\alpha y(x_1), \tag{2}$$

$$y'(x_2+0)=y'(x_2-0)\equiv y'(x_2),\quad y(x_2+0)-y(x_2-0)=\beta y'(x_2). \tag{3}$$

Определим оператор $\widehat{H}(1,1,q)$, порожденный в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ дифференциальным выражением $(H_{1,1}f)(x)$. Областью определения оператора $\widehat{H}(1,1,q)$ является множество всех функций, принадлежащих пространству $L_2(-\infty,\infty)$, гладких в интервалах $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2), (x_2,∞) и удовлетворяющих условиям (2), (3).

В связи с важными приложениями к задачам квантовой механики [1] представляет интерес исследование спектральных характеристик оператора $\widehat{H}(1,1,q)$.

В [2] показано, что спектр оператора $\widehat{H}(1,1,q)$ состоит из абсолютно непрерывной части $S=[0,+\infty)$ и не более двух отрицательных чисел.

Будем считать далее, что $\widehat{\theta}(x,\lambda)$ и $\widehat{\varphi}(x,\lambda)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$\widehat{\theta}(0,\lambda)=\widehat{\varphi}'(0,\lambda)=1,\quad \widehat{\theta}'(0,\lambda)=\widehat{\varphi}(0,\lambda)=0,$$

а $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ — решения уравнения

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(-\infty,\infty),$$

такие, что

$$\theta(0,\lambda)=\varphi'(0,\lambda)=1,\quad \theta'(0,\lambda)=\varphi(0,\lambda)=0.$$

Определим функции комплексной переменной λ

$$\begin{aligned}
&A_1(\lambda)=1,\quad C_1(\lambda)=0,\quad B_1(\lambda)=0,\quad D_1(\lambda)=1,\\
&A_2(\lambda)=1-\alpha\varphi_1(\lambda)\theta_1(\lambda),\quad B_2(\lambda)=\alpha\theta_1(\lambda)^2,\\
&C_2(\lambda)=-\alpha\varphi_1(\lambda)^2,\quad D_2(\lambda)=1+\alpha\varphi_1(\lambda)\theta_1(\lambda),\\
&A_3(\lambda)=A_2(\lambda)(1+\beta\varphi_2'(\lambda)\theta_2'(\lambda))+\beta B_2(\lambda)\varphi_2'(\lambda)^2,\\
&B_3(\lambda)=B_2(\lambda)(1-\beta\varphi_2'(\lambda)\theta_2'(\lambda))-\beta A_2(\lambda)\varphi_2'(\lambda)^2,\\
&C_3=C_2(\lambda)(1-\beta\varphi_2'(\lambda)\theta_2'(\lambda))+\beta D_2(\lambda)\varphi_2'(\lambda)^2,\\
&D_3(\lambda)=D_2(\lambda)(1-\beta\varphi_2'(\lambda)\theta_2'(\lambda))+\beta C_2(\lambda)\varphi_2'(\lambda)^2.
\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\theta_j'(\lambda)=\theta'(x_j,\lambda),\quad \varphi_j(\lambda)=\varphi(x_j,\lambda),\quad \theta_j(\lambda)=\theta(x_j,\lambda),\quad \varphi_j'(\lambda)=\varphi'(x_j,\lambda)\ \text{ при } j=1,2.$$

Лемма. *Справедливы равенства*

$$\widehat{\theta}(x,\lambda)=\begin{cases}A_1(\lambda)\theta(x,\lambda)+B_1(\lambda)\varphi(x,\lambda), & -\infty<x\le x_1;\\ A_2(\lambda)\theta(x,\lambda)+B_2(\lambda)\varphi(x,\lambda), & x_1\le x<x_2;\\ A_3(\lambda)\theta(x,\lambda)+B_3(\lambda)\varphi(x,\lambda), & x_2<x<\infty,\end{cases}$$

$$\widehat{\varphi}(x,\lambda)=\begin{cases}C_1(\lambda)\theta(x,\lambda)+D_1(\lambda)\varphi(x,\lambda), & -\infty<x\le x_1;\\ C_2(\lambda)\theta(x,\lambda)+D_2(\lambda)\varphi(x,\lambda), & x_1\le x<x_2;\\ C_3(\lambda)\theta(x,\lambda)+D_3(\lambda)\varphi(x,\lambda), & x_2<x<\infty.\end{cases}$$

Замечание. При каждом фиксированном $x\ne x_2$ функции $\widehat{\theta}(x,\lambda)$, $\widehat{\varphi}(x,\lambda)$ являются аналитическими функциями параметра $\lambda\in C$.

Заметим, что если существуют решения $\psi_j(x,\lambda)$ $(j=1,2)$ уравнения

$$(H_{1,1}f)(x)=\lambda f(x),\quad x\in(-\infty,\infty),$$

такие, что

$$\psi_1(\cdot,\lambda)\in L_2(-\infty,0),\quad \psi_2(\cdot,\lambda)\in L_2(0,\infty),$$

то резольвента оператора $\widehat{H}(1,1,q)$ может быть построена по методу, предложенному еще Лагранжем.

Пусть $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$. В этом случае функции $\psi_1(x,\lambda)$ и $\psi_2(x,\lambda)$ линейно независимы (в противном случае λ было бы комплексным собственным значением самосопряженного оператора $\widehat{H}(1,1,q)$ [2], что невозможно).

Определим функцию

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\psi_1(t,\lambda)\psi_2(x,\lambda), & t\le x;\\ \psi_1(x,\lambda)\psi_2(t,\lambda), & t\ge x,\end{cases}$$

и обозначим через Δ выражение

$$\psi_1(x,\lambda)\psi_2'(x,\lambda)-\psi_1'(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\quad (x\ne x_1,x_2).$$

Так как $\psi_1(x,\lambda)$, $\psi_2(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (1), то выражение Δ по формуле Лиувилля–Остроградского зависит только от λ.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$, $f\in L_2(-\infty,\infty)$. *Тогда справедлива формула*

$$(R_\lambda(\widehat{H}(1,1,q))f)(x)=-\int_{-\infty}^{\infty}(1/\Delta(\lambda))G(x,t,\lambda)f(t)dt,\quad x\ne x_1,x_2.$$

Если воспользоваться представлением

$$\psi_j(x,\lambda) = \widehat{\theta}(x,\lambda) + m_j(\lambda)\widehat{\varphi}(x,\lambda) \quad (j=1,2)$$

(функции $m_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ принято называть функциями Вейля), то получим

$$\Delta(\lambda) = m_2(\lambda) - m_1(\lambda).$$

Отметим, что из теоремы 1 следует, что для исследования дискретного спектра оператора $\widehat{H}(1,1,q)$ достаточно исследовать нули функции $m_2(\lambda) - m_1(\lambda)$.

Построим функции $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ для оператора $\widehat{H}(1,1,0)$. Далее будем считать, что $q(x) \equiv 0$. Тогда

$$\theta(x,\lambda) = (\exp\{i\lambda^{1/2}x\} + \exp\{-i\lambda^{1/2}x\})/2$$

и

$$\varphi(x,\lambda) = (\exp\{i\lambda^{1/2}x\} - \exp\{-i\lambda^{1/2}x\})/(2i\lambda^{1/2}).$$

Для определенности будем считать, что $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

Теорема 2. *Для функций $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ справедливы формулы*

$$m_1(\lambda) = -i\lambda^{1/2},$$
$$m_2(\lambda) = \frac{-B_3(\lambda) + i\lambda^{1/2}A_3(\lambda)}{D_3(\lambda) - i\lambda^{1/2}C_3(\lambda)},$$

где $A_3(\lambda)$, $B_3(\lambda)$, $D_3(\lambda)$, $C_3(\lambda)$ определяются формулами (4).

Перейдем к спектральному анализу оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ в случае $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Рассмотрим уравнение

$$m_1(\lambda) - m_2(\lambda) = 0 \quad (\operatorname{Im}\lambda \geq 0).$$

Оно эквивалентно уравнению

$$(2i\lambda^{1/2} - \alpha)(2 - \beta i\lambda^{1/2}) + \alpha\beta i\lambda^{1/2}\exp\{2i\lambda^{1/2}(x_2 - x_1)\} = 0. \tag{5}$$

Поскольку $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, то уравнение (5) не имеет решения. Так как оператор $\widehat{H}(1,1,0)$ самосопряжен [2], то все точки спектральной оси являются точками непрерывности для спектрального семейства E_λ, порожденного оператором $\widehat{H}(1,1,0)$.

Пусть $\lambda = \sigma + i\tau$ $(\tau > 0)$. Определим функции

$$\begin{aligned}
&a_1(\sigma) = 2\beta\sigma - 2\alpha - \sigma^{1/2}\alpha\beta\sin(2\sigma^{1/2}(x_2 - x_1)),\\
&b_1(\sigma) = 4 + \alpha\beta - \alpha\beta\cos(2\sigma^{1/2}(x_2 - x_1)),\\
&a_{11}(\sigma) = -(D_3(\sigma)b_1(\sigma) + C_3(\sigma)a_1(\sigma)) \ \text{ при } \ \sigma \geq 0,\\
&a_{22}(\sigma) = -(\sigma A_3(\sigma)b_1(\sigma) - B_3(\sigma)a_1(\sigma)) \ \text{ при } \ \sigma \geq 0,\\
&a_{12}(\sigma) = a_{21}(\sigma) = \sigma C_3(\sigma)b_1(\sigma) - D_3(\sigma)a_1(\sigma) \ \text{ при } \ \sigma \geq 0.
\end{aligned}$$

Определим матрицу $A(\sigma)$ и векторы ψ_f, $\widehat{\psi}$ формулами

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \psi_f = \begin{bmatrix} \theta_f \\ \varphi_f \end{bmatrix}, \quad \widehat{\psi}(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \widehat{\theta}(x,\lambda) \\ \widehat{\varphi}(x,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. *Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Справедлива формула Парсеваля–Стеклова*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sigma^{1/2}}{b_1(\sigma)^2\sigma + a_1(\sigma)^2}(A\psi_f, \psi_f)_{R^2}\, d\sigma.$$

Следствие 1. Спектр оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$) совпадает с множеством $\lambda \geq 0$, абсолютно непрерывен и двукратен при $\lambda > 0$.

Следствие 2. Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Тогда по норме $L_2(-\infty,\infty)$ с весом справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma^{1/2}}{b_1(\sigma)^2\sigma + a_1(\sigma)^2}\Big[\int_{-\infty}^\infty (A(\sigma)\widehat{\psi}(y,\sigma),\widehat{\psi}(x,\sigma))_{R^2} f(y)dy\Big]d\sigma.$$

Перейдем к спектральному анализу оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ при $\alpha\beta < 0$. Уравнение $m_1(\lambda) - m_2(\lambda) = 0$, как показано ранее в [2], имеет только одно отрицательное решение $\lambda = \lambda_0$, которое является простым корнем этого уравнения, т. е. $m_1'(\lambda_0) - m_2'(\lambda_0) \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть $\alpha\beta < 0$, $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Тогда справедлива формула Парсеваля–Стеклова*

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A\psi_f,\psi_f)_{R^2}\frac{\sigma^{1/2}}{b_1(\sigma)^2\sigma + a_1(\sigma)^2}d\sigma + d_0|(f,\psi_1(\cdot,\lambda_0))|^2.$$

Следствие 1. Спектр оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ ($\alpha\beta < 0$) состоит из непрерывной и дискретной компонент. Непрерывная компонента спектра двукратна, абсолютно непрерывна и совпадает с множеством $\lambda > 0$. Дискретная компонента спектра состоит из одного простого собственного значения λ_0.

Следствие 2. Пусть $\alpha\beta < 0$, $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Тогда по норме $L_2(-\infty,\infty)$ с весом справедливо равенство

$$f(x) = d_0\psi_1(x,\lambda_0)(f,\psi_1(\cdot,\lambda_0)) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma^{1/2}}{b_1(\sigma)^2\sigma + a_1(\sigma)^2}\Big[\int_{-\infty}^\infty (A(\sigma)\widehat{\psi}(y,\sigma),\widehat{\psi}(x,\sigma))_{R^2} f(y)dy\Big]d\sigma.$$

Проведем спектральный анализ оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ при $\alpha < 0$, $\beta < 0$. В этом случае уравнение $m_1(\lambda) - m_2(\lambda) = 0$ имеет ровно два различных отрицательных решения: $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$. Это показано в [2]. Кроме того, эти решения являются простыми корнями данного уравнения, т. е. $m_1'(\lambda_j) - m_2'(\lambda_j) \neq 0$ при $j = 1,2$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Тогда справедлива формула Парсеваля–Стеклова*

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A\psi_f,\psi_f)_{R^2}\frac{\sigma^{1/2}}{b_1(\sigma)^2\sigma + a_1(\sigma)^2}d\sigma + \sum_{j=1}^2 d_j|(f,\psi_1(\cdot,\lambda_j))|^2.$$

Следствие 1. Спектр оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) состоит из непрерывной и дискретной компонент. Непрерывная компонента спектра двукратна, абсолютно непрерывна и совпадает с множеством $\lambda > 0$. Дискретная компонента спектра состоит из двух простых собственных значений λ_1 и λ_2.

Следствие 2. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Тогда по норме $L_2(-\infty,\infty)$ с весом справедливо равенство

$$f(x) = d_1\psi_1(x,\lambda)(f,\psi_1(\cdot,\lambda_1)) + d_2\psi_2(x,\lambda_2)(f,\psi_1(\cdot,\lambda_2)) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma^{1/2}}{b_1(\sigma)^2\sigma + a_1(\sigma)^2}\Big[\int_{-\infty}^\infty (A(\sigma)\widehat{\psi}(y,\sigma),\widehat{\psi}(x,\sigma))_{R^2} f(y)dy\Big]d\sigma.$$

Литература

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. *Решаемые модели в квантовой механике.* – М.: Мир, 1991. – 543 с.
2. Кадиев Р.И. (мл.) *О спектре одного класса операторов Шредингера с конечным числом обобщенных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 7. – С. 26–31.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 06.12.2001
окончательный вариант 11.01.2003