ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.911

Е.В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

ОБ АТТРАКТОРАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

Изучение задачи о существовании аттракторов — важнейшая часть теории и приложений обыкновенных дифференциальных уравнений, например, при описании некоторых физических процессов. В частности, в теории гравитационного поля имеются уравнения второго порядка, решения которых при стремлении времени к бесконечности сколь угодно близко приближаются к многочленам первой степени [1].

В данной работе ищутся достаточные условия, при которых дифференциальные уравнения определенного класса в качестве аттракторов имеют пространства всех многочленов не выше заданной степени. Другими словами, ищутся условия, при которых решения дифференциальных уравнений при стремлении аргумента к бесконечности асимптотически приближаются к многочленам не выше наперед заданной степени. В [2] дан критерий существования таких решений. В [3], [4] решается эта задача, когда функции и аттракторы принадлежат более широкому классу. По сути Л.Д. Кудрявцев, используя критерий из [2], выделил класс, все решения уравнений из которого имеют полиномиальную асимптотику. При этом используется лишь правая часть исследуемого уравнения. Например, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

где $f \in C([T,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, с асимптотическим равновесием [5] имеет в качестве аттрактора множество всех вектор-многочленов нулевой степени, т.е. пространство $\mathbb{R}^n$. Задаче существования асимптотического равновесия посвящено большое число работ, например, [6], [7]. Однако почти все они основаны на методе возмущений [5]–[7], когда правая часть уравнения (1) возмущается так, что свойство асимптотического равновесия все еще сохраняется. В [8] эта задача решается прямым методом. В данной работе эта же задача решается с использованием вектор-функций Ляпунова. Именно поэтому удалось ослабить ограничения на правую часть уравнения, обеспечивающие существование для нее аттрактора $\mathbb{R}^n$. Далее решается задача о существовании аттрактора в случае, когда наперед заданная степень многочлена не превышает $n-1$, где n — порядок уравнения. Вводится понятие полиномиального асимптотического равновесия. В этом случае все решения имеют полиномиальную асимптотику и для любого наперед заданного многочлена степени $n-1$ существуют решения уравнения, асимптотически приближающиеся к заданному многочлену при неограниченном стремлении аргумента к бесконечности. Заметим, что если $n=1$, то это понятие перейдет в асимптотическое равновесие уравнения (1).

2. Абсолютно равномерная ограниченность решений и асимптотическое равновесие

Связь между ограниченными решениями, устойчивостью и существованием периодических решений была установлена во многих работах, в том числе в [9]. Обнаружить связь в существовании ограниченных решений и полиномиальных аттракторов с помощью классификации Иосидзавы ограниченных решений [9] не удается, т. к. в этой классификации присутствуют лишь решения, идущие вправо.

Определение 1. Решения $x(t; t_0, x_0)$ дифференциального уравнения (1) называются абсолютно равномерно ограниченными для $\|x_0\| \le r$, $t \ge T$, если $\|x(t; t_0, x_0)\| \le c_0(r)$ для всех $T \le t, t_0 < +\infty$.

Теорема 1. *Для абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения* (1) *при* $\|x_0\| \le r$, $t \ge T$, *необходимо и достаточно существования функций* $V, W : [T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ *таких, что*

a) $V(t, x), W(t, x) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to +\infty$ *равномерно по* t;
b) $V(t, x) \le \rho_1(r)$, $W(t, x) \le \rho_2(r)$ *для* $\|x\| \le r$;
c) $V(t, x(t)), W(t, x(t))$ — *соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где* $x(t)$ — *решение уравнения* (1).

Доказательство. Существование функции V при $t \ge t_0$ доказано в [9]. Доказательство существования функции W при $t \le t_0$ проводится аналогично. □

В [10] приведены теоремы об абсолютной равномерной ограниченности решений, когда непосредственно по функции f строятся функции Ляпунова V и W.

Заметим, что из равномерной ограниченности вправо не вытекает абсолютная равномерная ограниченность. Например, решения скалярного уравнения $\frac{dx}{dt} = -x$ равномерно ограничены вправо, но не являются равномерно ограниченными влево даже при конечном T.

Рассмотрим граничную задачу с данными в бесконечно удаленной точке $t = +\infty$. По аналогии с задачей Коши с начальными данными в конечной точке эту задачу будем обозначать символом $(+\infty, x_0)$. В общем случае эта задача некорректна, ибо теорема Пеано не гарантирует существование решения $x(t; +\infty, x_0)$.

Теорема 2. *Если множество* $E = \{x(t; t_0, x_0) : T \le t, t_0 < +\infty,\ x_0 \in \mathbb{R}^n\}$, *где* x_0 — *фиксированный вектор, равномерно ограничено по* t *и* t_0, *т. е. решения* $x(t; t_0, x_0)$ *абсолютно равномерно ограничены, то задача* $(+\infty, x_0)$ *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Так как

$$x(t_k; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} f(s, x(s; t_0, x_0))ds, \quad k = 1, 2,$$

то

$$\|x(t_1; t_0, x_0) - x(t_2; t_0, x_0)\| \le \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, x(s; t_0, x_0))\|ds \le \int_{t_1}^{t_2} \psi(s, M)ds \le K|t_1 - t_2|,$$

где $\psi(s, M) = \sup\limits_{\|x\| \le M} \|f(s, x)\|$, $M = \sup E$, $K = \sup \psi(s, M)$, на компакте, определенном числами t_1 и t_2. Отсюда множество E равностепенно непрерывно и поэтому компактно. Тогда существует последовательность $\{t_0^n\}$ такая, что $t_0^n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $x(t; t_0^n, x_0) \to x(t)$ равномерно по t на каждом компакте из $[T, +\infty)$. Кроме того, $x(t)$ — решение уравнения (1) и $T \le t < +\infty$. Следовательно, $x(t) = x(t; +\infty, x_0)$.

Если $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le \alpha(t)\|x_1 - x_2\|$ и $\int\limits_T^{+\infty} \alpha(s)ds < +\infty$, то решение $x(t; +\infty, x_0)$ единственно. □

Теорема 3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0)$ *при любых* $t_0 \ge T$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *и при любом* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *решения* $x(t; t_0, x_0)$ *абсолютно равномерно ограничены, то уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что при любом x_0 существует решение $x(t;+\infty,x_0)$. Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;+\infty,x_0)$ существует и конечен. Поэтому существует асимптотическое равновесие и, следовательно, $\mathbb{R}^n$ — аттрактор для уравнения (1).

Существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)$ можно обеспечить существованием интеграла $\int\limits_T^{+\infty} \psi(s,M)ds < +\infty$. Действительно,

$$\|\dot{x}(s;t_0,x_0)\| \le \|f(s,x(s;t_0,x_0))\| \le \sup_{\|x\|\le M} \|f(t,x)\| = \psi(s,M).$$

Поэтому

$$\left\| \int_T^{+\infty} \dot{x}\, ds \right\| \le \int_T^{+\infty} \|\dot{x}\| ds \le \int_T^{+\infty} \psi(s,M)ds. \quad \square$$

Все понятия, определенные выше, носят глобальный характер. Поэтому доказательство теоремы справедливо при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Однако в прикладных задачах уравнение (1) часто определено лишь на ограниченном множестве пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad T \le t < +\infty, \quad x \in S = \{x : \|x\| < l\}, \quad f \in C([T,+\infty)\times S, \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Определение 2. Будем говорить, что уравнение (2) в шаре $S_\triangle = \{x : \|x\| \le \triangle\}$, $\triangle < l$, имеет асимптотическое равновесие, если $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)$ существует и конечен при любых $T \le t_0 < +\infty$ и $\|x_0\| \le \triangle$, и для любого $x_0 \in S_\triangle$ существует такое решение $x(t)$ уравнения (2), что $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

В аналогах теорем 2 и 3 для уравнения (2) главную роль будет играть абсолютная равномерная ограниченность решений. Однако теорема 1 здесь не применима, т. к. она носит глобальный характер. Следовательно, нужен новый критерий абсолютной равномерной ограниченности решений уравнения (2).

Теорема 4. *Для того чтобы решения уравнения* (2)*, начинающиеся в шаре* $S_\triangle$*, были абсолютно равномерно ограниченными, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции* $V, W : [T,+\infty)\times S \to (0,+\infty)$*, обладающие свойствами*

a) $V(t,x) \le \rho_1(\triangle)$, $W(t,x) \le \rho_2(\triangle)$ *для* $x_0 \in S_\triangle$, $T \le t < +\infty$;
b) $V(t,x(t))$, $W(t,x(t))$ *— соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где* $x(t)$ *— решение уравнения* (2);
c) *для функций* V *и* W *существует такой* $\overline{x} \in S$, $\|\overline{x}\| > \triangle$, *что при любом* $\|x\| \ge \|\overline{x}\|$ *и* $t \in [T,+\infty)$*, зависящем от* x*, справедливы неравенства*

$$V(t,x) \ge V_2(\|\overline{x}\|) > V_1(\triangle), \quad W(t,x) \ge W_2(\|\overline{x}\|) > W_1(\triangle).$$

Эта теорема при $t \ge t_0$ и более общих условиях доказана в [8]. Случай $t \le t_0$ рассматривается аналогично.

Теорема 5. *Если решения уравнения* (2) *абсолютно равномерно ограничены в шаре* $S_\triangle$, $\|x(t;t_0,x_0)\| \le M(\triangle)$, $\|x_0\| \le \triangle$, $\triangle < M(\triangle) < l$ *и* $\int\limits_T^{+\infty} \psi(s,M)ds < +\infty$*, то уравнение* (2) *в шаре* $S_\triangle = \{x : \|x\| \le \triangle\}$ *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Решения $x(t;+\infty,x_0)$, $\|x_0\| \le \triangle$, существуют при всех $T \le t < +\infty$ и $x_0 \in S_\triangle$. Кроме того, при любых $T \le t_0 < +\infty$ и $x_0 \in S_\triangle$ существует $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0) \in S_\triangle$. Все это доказывается аналогично доказательству этих утверждений в теореме 3. $\square$

Легко получить теорему об асимптотическом равновесии, используя метод сравнения. Пусть

$$\|f(t,x)\| \le \lambda(t, \|x\|), \tag{3}$$

где $t \ge T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in C([T,+\infty) \times \mathbb{R}^1_+, \mathbb{R}^1_+)$, $\mathbb{R}^1_+ = [0,+\infty)$. Предположим, что решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t,z) \tag{4}$$

абсолютно равномерно ограничены. Для (4) справедливо неравенство

$$\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| \le \lambda(t, \|x\|), \tag{5}$$

т. к.

$$2\|x\|\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\|x\|^2\right| = |(\dot{x},x) + (x,\dot{x})| \le 2\|x\|\,\|\dot{x}\| \le 2\|x\|\,\|\lambda(t,x)\| \le 2\|x\|\lambda(t,\|x\|).$$

Из неравенства $\frac{d\|x\|}{dt} \le \lambda(t,\|x\|)$ следует равномерная ограниченность решений уравнения (2) вправо, а из неравенства $\frac{d\|x\|}{dt} \ge -\lambda(t,\|x\|)$ — равномерная ограниченность решений того же уравнения влево. Эти утверждения вытекают из неравенства Важевского [11], примененного к (4). Следовательно, решения уравнения (2) абсолютно равномерно ограничены.

Теорема 6. *Пусть $\lambda(t,z_1) \le \lambda(t,z_2)$ при $z_1 \le z_2$ и решения уравнения (4) абсолютно равномерно ограничены, $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t;t_0,z_0)$ существует и конечен при любых $t_0 \ge T$ и $z_0 \in \mathbb{R}^1_+$. Тогда уравнение (2) имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Так как $\|x\| = \|x(t;t_0,x_0)\| \le z = z(t;t_0,z_0)$, $\|x_0\| \le z_0$, $t \ge T$, то $\left\|\int\limits_{t_0}^{t} dx\right\| \le \int\limits_{t_0}^{t} dz$ и $\int\limits_{t}^{+\infty} dx$ существует и конечен. Поэтому существует и конечен $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)$. Тогда на основании теоремы 3 уравнение (2) имеет асимптотическое равновесие. □

3. Функции Ляпунова и асимптотическое равновесие

Возможности метода возмущений [5] ограничены характером асимптотического равновесия возмущенного уравнения и малостью возмущения. Прямой метод более универсален, но трудности здесь сосредоточены в построении функций Ляпунова с преимуществом в тактике решения задачи об асимптотическом равновесии.

Теорема 7. *Пусть существует непрерывная функция $V : [T,+\infty) \times [T,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ такая, что $V(t,t_0,x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$ равномерно по t и t_0. Для всякого решения $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ уравнения (1) $V(t,t_0,x(t)) \le \rho(r)$ при $\|x(t_0)\| \le r$, $T \le t,t_0 < +\infty$, $\rho : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t;t_0,x(t))$. Тогда если существует непрерывная функция $V_0 \in C(\mathbb{R}^n_+, (0,+\infty))$, которая является строго монотонной по модулю каждой компоненты вектора x, и*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{V(t,t_0,x)}{V_0(|x_1|,\ldots,|x_n|)} = k > 0, \quad x = \mathrm{colon}(x_1,\ldots,x_n),$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, то уравнение (1) имеет асимптотическое равновесие.

Доказательство. Так как для каждого решения $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ уравнения (1) справедливо неравенство $V(t,t_0,x(t)) \le \rho(r)$, где $T \le t,t_0 < +\infty$, $\|x_0\| \le r$, и $V(t,t_0,x) \to +\infty$ равномерно по t и t_0 при $\|x\| \to +\infty$, то $\|x(t;t_0,x_0)\| \le M(r)$ при всех $T \le t,t_0 < +\infty$, $\|x_0\| \le r$. Кроме того, существует

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{V(t,t_0,x(t))}{V_0(|x_1(t)|,\ldots,|x_n(t)|)} = K.$$

Так как решение $x(t)$ при $T \le t < +\infty$ ограничено, то при фиксированном $1 \le i \le n$ существует такой набор действительных чисел $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, что справедливо неравенство

$$\left|\frac{V(t,t_0,x(t))}{V_0(a_1,\dots,a_{i-1},|x_i(t)|,a_{i+1},\dots,a_n)} - K\right| \le \left|\frac{V(t,t_0,x(t))}{V(|x_1(t)|,\dots,|x_n(t)|)} - K\right|,$$

$T \le t < +\infty$, где $a_j =$ либо $\sup\limits_t |x_j(t)|$, либо $\inf\limits_t |x_j(t)|$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{V(t,t_0,x(t))}{V_0(a_1,\dots,a_{i-1},|x_i(t)|,a_{i+1},\dots,a_n)} = K.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} V_0(a_1,\dots,a_{i-1},|x_i(t)|,a_{i+1},\dots,a_n) = c_i$. Так как $V(t,t_0,x) \to +\infty$ равномерно по t при $\|x\| \to +\infty$, то из условия $\lim\limits_{t\to+\infty}(V(t,t_0,x)/V_0(|x_1|,\dots,|x_n|)) = K > 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ вытекает $V_0(|x_1|,\dots,|x_n|) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$. Поэтому для функции $y_i = V_0^{-1}(a_1,\dots,a_{i-1},\|x_i\|,a_{i+1},\dots,a_n)$ существует обратная функция $\|x_i\| = V_0^{-1}(a_1,\dots,a_{i-1},y_i,a_{i+1},\dots,a_n)$. Если $|x_i| = |x_i(t)|$, то $y_i = y_i(t)$ и $y_i(t) \to c_i$ при $t \to +\infty$. Отсюда следует существование $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t)$ при любом $1 \le i \le n$. Значит, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)$. Так как выполняются условия теоремы 3, то существует асимптотическое равновесие. $\square$

Заметим, что в теореме 7 можно принять $V_0(|x_1|,\dots,|x_n|) \stackrel{\text{def}}{=} V_1(\|x\|)$, где $V_1 \in C([0,+\infty),(0,+\infty))$ — строго монотонная функция.

Ограничения на функцию Ляпунова могут быть слишком обременительными. В некоторых случаях полезнее рассматривать вектор-функции Ляпунова. Пусть $V : [T,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m_+$ — дифференцируемая вектор-функция Ляпунова, $\mathbb{R}^m_+ = \{x : x \in \mathbb{R}^m,\ x \ge 0\}, \|V(t,x)\| \le V_0(\triangle)$, $\|x\| \le \triangle$. Тогда производная V в силу (1) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) = \varphi(t,x,V).$$

Пусть $x = x(t;t_0,x_0), y(t;t_0,y_0,x_0)$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t,x,V) \tag{6}$$

с начальными данными (t_0, y_0).

Теорема 8. *Если решения уравнения* (6) *удовлетворяют при* $\|y_0\| \le \triangle$ *неравенству* $\|y(t;t_0,y_0,x_0)\| \le M(\triangle)$ *равномерно по* x_0, $T \le t, t_0 < +\infty$, *и уравнение* (6) *имеет асимптотическое равновесие, то при* $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{V_i(t,x)}{\|x\|} = K > 0$ *равномерно по* x, *где* $1 \le i \le m$, *уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Так как $V(t, x(t;t_0,x_0))$ — решение уравнения (6), то

$$\|V(t,x(t;t_0,x_0))\| \le M(\|V(t_0,x_0)\|) \le M_1(\triangle), \quad \|x_0\| \le \triangle, \quad T \le t, t_0 < +\infty.$$

Кроме того, существует и конечен $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t,x(t;t_0,x_0))$. Поэтому из условия $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{V_i(t,x)}{\|x\|} = K$ равномерно по x вытекает существование конечного $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)$. Отсюда и из предыдущего вытекает неравенство $\|x(t;t_0,x_0)\| \le M_2(\triangle), \|x_0\| \le \triangle$, равномерно по $T \le t, t_0 < +\infty$. Следовательно, выполняются условия теоремы 3. $\square$

Теорема 9. *Пусть*

$$W_i(t,x) + hq_i^{(2)}(t,W(t,x)) + o(h) \le W_i(t+h, x+hf(t,x)) \le W_i(t,x) + hq_i^{(1)}(t,W(t,x)) + o(h)$$

при $h \to 0$, *где* $q_i^{(1)}, q_i^{(2)} \in C([T,+\infty) \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^1)$, $W_i \in C([T,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1_+)$, $i = \overline{1,m}$, *и локально липшицевы по второй переменной,* $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{W_j(t,x)}{\|x\|} = K_j > 0$ *при некотором* $1 \le j \le m$

равномерно по x. Тогда если вектор-функция $q^{(1)}(t,y) = \mathrm{colon}(q_1^{(1)}(t,y),\dots,q_m^{(1)}(t,y))$ является квазимонотонно возрастающей [12] по переменной $y \in \mathbb{R}_+^m$, а вектор-функция $q^{(2)}(t,y) = \mathrm{colon}(q_1^{(2)}(t,y),\dots,q_m^{(2)}(t,y))$ квазимонотонно убывающей и уравнение

$$\frac{du}{dt} = q^{(1)}(t,u) \tag{7}$$

имеет асимптотическое равновесие, а решения равномерно ограничены вправо, решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = q^{(2)}(t,z)$$

равномерно ограничены влево, то уравнение (1) имеет асимптотическое равновесие.

Доказательство. Так как

$$q^{(2)}(t,W) \le \frac{dW}{dt} \le q^{(1)}(t,W),$$

где производная $\frac{dW}{dt}$ вычислена в силу уравнения (2), то, применяя неравенство Важевского [11], так же, как в (4), (5), получим абсолютно равномерную ограниченность решений уравнения (1). Из существования асимптотического равновесия у уравнения (7) вытекает существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t,x(t))$, $W = \mathrm{colon}(W_1,\dots,W_m)$. Тогда из условия $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{W_j(t,x)}{\|x\|} = K_j > 0$ равномерно по x следует существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)$ при любых $T \le t_0 < +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Перейдем к установлению условий, при выполнении которых существуют полиномиальные аттракторы. $\square$

4. Полиномиальная асимптотика решений

Первоначально рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} = f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}), \tag{8}$$

где $f \in C([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Определение 3. Будем говорить, что уравнение (8) имеет полиномиальную асимптотику порядка k, если для всякого решения $x(t)$ этого уравнения существует такой полином $P_k(t) = a_0t^k + \dots + a_{k-1}t + a_k$, что

$$x^{(j)}(t) = P_k^{(j)}(t) + o(1), \quad j = 0,\dots,k, \tag{9}$$

при $t \to +\infty$. При этом в случае $k \ge 0$ существует хотя бы одно решение $x(t)$ такое, что для него $a_0 \ne 0$. Для нуль-многочлена $P_k(t) \equiv 0$ будем считать $k = -\infty$ и условия (9) выполняются при $j = 0$, как и в случае $k = 0$.

Будем решать задачу о полиномиальной асимптотике порядка $(n-1)$ для уравнения (8).

Теорема 10. *Пусть*

$$|f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)})| \le \lambda\Big(t,\frac{|x|}{t^{n-1}},\dots,|x^{(n-1)}|\Big), \quad t \ge T,$$

где

a) $\lambda \in C([T,+\infty)\times\mathbb{R}_+^n,\mathbb{R}_+^1)$, $\mathbb{R}_+^1 = [0,+\infty)$, $\lambda(t,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \le \lambda(t,\beta_1,\dots,\beta_n)$ *при* $\alpha_i \le \beta_i$, $i = \overline{1,n}$, *и любом* $t \ge T$;

b) $\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\cdots\int\limits_{s_{n-1}}^{+\infty} \lambda(t,\alpha_1,\dots,\alpha_n)ds_1\dots ds_n = o(1)$ *при* $t \to +\infty$ *и* $\forall\alpha \in \mathbb{R}_+^n$, $\alpha = \mathrm{colon}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Тогда уравнение (8) имеет решения $x(t)$ такие, что для них справедливы асимптотические формулы (9) при $k = n-1$ и $a_0 \ne 0$.

Доказательство. При $T \le t_0 \le t < +\infty$ имеем

$$x(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \dots + a_{n-2} t + a_{n-1} + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)) ds. \quad (10)$$

Тогда из (10) найдем

$$|x^{m-1}(t)| \le c_m + b_m \int_{t_0}^{t} \lambda\Big(s, \frac{|x|}{t^{n-1}}, \dots, |x^{(n-1)}|\Big) ds, \quad m = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Пусть $t_0 \ge T$ и $v = \max\limits_{t}\{\frac{|x(t)|}{t^{n-1}}, \dots, |x^{(n-1)}(t)|\}$. Не теряя общности, считаем $t \ge 1$. Тогда из (11) получим

$$v(t) \le c_0 + b_0 \int_{t_0}^{t} \lambda_0(s, v(s)) ds, \quad (12)$$

где $\lambda_0(s, v(s)) \equiv \lambda(s, v(s), \dots, v(s))$, положительные постоянные c_0 и b_0 зависят от начальных данных, определяющих решение $x(t)$.

Всевозможные решения неравенства

$$\psi(t) \le c_0 + b_0 \int_{t_0}^{t} \lambda_0(s, \varphi(\psi)\psi(s)) ds, \quad (13)$$

где

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} \min(1, \frac{T_1}{\psi}), & \psi \ne 0; \\ 1, & \psi = 0, \end{cases}$$

и T_1 — произвольное фиксированное число, $\psi(t) \ge 0$, ограничены. Действительно, т. к. $\lambda_0(s, \varphi(\psi)\psi(s)) = \lambda(s, \varphi(\psi)\psi(s), \dots, \varphi(\psi)\psi(s))$ и $\varphi(\psi)\psi(s) \le T_1$, то

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_0(s, \varphi(\psi)\psi(s)) ds \le \int_{t_0}^{t} \lambda_0(s, T_1) ds = \int_{t_0}^{t} \lambda(s, T_1, \dots, T_1) ds < +\infty.$$

Пусть $0 < c_0 < T_2$. Тогда при достаточно большом t_0 выполняется неравенство $c_0 + b_0 \int\limits_{t_0}^{+\infty} \lambda_0(s, \varphi(\psi)\psi(s)) ds < T_2$. Если $T_2 = T_1$, то неравенства (12) и (13) совпадают. Неравенство (12) имеет решение $v(t) = \max\limits_{t}\{\frac{|x(t)|}{t^{n-1}}, \dots, |x^{(n-1)}(t)|\}$. Следовательно, эта же функция $v(t)$ удовлетворяет неравенству (13). Если же $0 < c_0 < T_2$, то $v(t) < T_2$ при $t \ge t_0$. Отсюда

$$\frac{|x^{(k)}(t)|}{t^{n-k-1}} < T_2, \quad t \ge t_0, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (14)$$

Тогда из равенства (10) с учетом

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)) ds = \\ = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(s_n, x(s_n), x'(s_n), \dots, x^{(n-1)}(s_n)) ds_1 \dots ds_n$$

получим

$$x(t) = \overline{a}_0 t^{n-1} + \overline{a}_1 t^{n-2} + \dots + \overline{a}_{n-2} t + \overline{a}_{n-1} + \\ + \int_{t}^{+\infty} \int_{s_1}^{+\infty} \cdots \int_{s_{n-1}}^{+\infty} f(s_n, x(s_n), x'(s_n), \dots, x^{(n-1)}(s_n)) ds_1 \dots ds_n. \quad (15)$$

Сходимость интегралов из (15) следует из неравенств (14). Числа $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-1}$ зависят от начальных данных. Из (10) и (14) вытекает, что начальные данные можно подобрать так, что $\overline{a}_0 \neq 0$. $\square$

Определение 4. Будем говорить, что уравнение (8) имеет полиномиальное асимптотическое равновесие порядка k, если оно имеет полиномиальную асимптотику порядка k и для любого набора действительных чисел $(a_0, \ldots, a_k)$ существует такое решение $x(t)$ уравнения (8), что для этого решения и полинома $P_k(t) = a_0 t^k + \cdots + a_{k-1}t + a_k$ справедливы асимптотические формулы (9).

Теорема 11. *Пусть выполняются условия теоремы* 10 *и решения уравнения*

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_0(t, z) \tag{16}$$

абсолютно равномерно ограничены. Тогда уравнение (8) *имеет полиномиальное асимптотическое равновесие порядка* $(n-1)$.

Доказательство. Из абсолютной равномерной ограниченности решений уравнения (16) и неравенства (12) вытекает равномерность относительно t_0 оценок (14) и, следовательно, уравнение (8) имеет полиномиальную асимптотику порядка $n-1$. Пусть $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ — произвольный набор действительных чисел. Тогда

$$x(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \ldots + a_{n-2}t + a_{n-1} + X(t), \tag{17}$$

где

$$X(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\cdots\int_{t_0}^{s_{n-1}} f(s_n, x(s_n), x'(s_n), \ldots, x^{(n-1)}(s_n))ds_1 \ldots ds_n,$$

$$|X(t)| \leq \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\cdots\int_{t_0}^{s_{n-1}} \lambda_0(s_n, T_2)ds_1 \ldots ds_n$$

при всех $t_0 \geq T$, $t \geq T$. Рассмотрим множество $\{v(t)\}$, $v(t) = \mathrm{colon}(\frac{x(t)}{t^{n-1}}, \frac{x'(t)}{t^{n-2}}, \ldots, x^{(n-1)}(t))$, $x(t)$ — решение уравнения (8) с фиксированными начальными данными $x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}$ при произвольно меняющемся $t_0 \geq T$. На основании равенства (14) множество $\{v(t)\}$ равномерно ограничено относительно $t_0, T \leq t < +\infty$; $\|v(t)\| \leq T_2$. Так как

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{x^{(k)}(t)}{t^{n-k-1}}\right| \leq c, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad T \leq t < +\infty, \tag{18}$$

где c — положительная постоянная, то для множества $\{v(t)\}$ справедлива теорема Арцела о компактности. Неравенство (18) вытекает из неравенства (11) и абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (16). Следовательно, существует такая последовательность $\{t_0^m\}$, что $\lim\limits_{m\to+\infty} t_0^m = +\infty$ и $x(t; t_0^m, x_0, x', \ldots, x_0^{(n-1)})$ равномерно на каждом компакте стремится к функции $x(t)$, которая является решением уравнения (8). На основании равенства (17) имеем

$$x^{(j)}(t) = P_k^{(j)}(t) + o(1), \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

при $t \to +\infty$, где $P_k(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \cdots + a_{n-2}t + a_{n-1}$, $k = n-1$. $\square$

Теперь перейдем к аналогичной задаче, но относительно уравнения (1). Вектор-функцию $P_k(t) = \mathrm{colon}(P_k^1(t), \ldots, P_k^n(t))$ будем называть вектор-многочленом степени k, если все компоненты $P_k^i(t)$ являются многочленами степени $k \geq 0$.

Определение 5. Будем говорить, что уравнение (1) имеет полиномиальную асимптотику порядка k, если для всякого решения $x(t)$ этого уравнения существует такой вектор-многочлен $P_k(t)$, что

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t)-P_k(t))^{(j)}=0,\quad j=0,1,\ldots,k. \tag{19}$$

Для нуль-многочлена $P_k(t)\equiv 0$ будем считать $k=-\infty$ и условие (19) выполняется при $j=0$, если $k\geq 0$, как и в случае $k=0$. Кроме того, хотя бы при одном значении i

$$P_k^i(t)=a_0^it^k+a_1^it^{k-1}+\cdots+a_k^i,\quad a_0^i\neq 0.$$

Определение 6. Будем говорить, что уравнение (1) имеет полиномиальное асимптотическое равновесие порядка k, если оно имеет полиномиальную асимптотику порядка k и для любого вектор-многочлена $P_k(t)$ степени k существует такое решение $x(t)$ уравнения (1), что для этого решения и полинома $P_k(t)$ справедливы асимптотические формулы (19).

Пусть $f\in C^{(q,q)}([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $q\geq r-1$. Тогда

$$x^{(r)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+f(t,x(t))\nabla x\right)^{r-1}f(t,x(t)). \tag{20}$$

Скалярный вариант уравнения (20) есть уравнение (8), которое рассмотрено выше. Аналог теорем 10, 11 для уравнения (20) легко получить по этой же схеме.

В качестве аттракторов могут быть и другие функциональные множества, например, решения некоторого другого дифференциального уравнения. Такие задачи рассматривались многими авторами, правда, в несколько другой постановке [3], [13], [14].

Литература

1. Моисеев Е.И., Садовничий В.А. *О краевых задачах для одного нелинейного уравнения гравитации.* – М.: Изд-во МГУ, – 1986. – 156 с.
2. Кудрявцев Л.Д. *О полиномиальных аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 354. – № 2. – С. 162–164.
3. Кудрявцев Л.Д. *Об аттракторах систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355. – № 6. – С. 734–736.
4. Кудрявцев Л.Д. *Задача с полиномиальными асимптотическими начальными данными в бесконечной точке* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 4. – С. 473–479.
5. Воскресенский Е.В. *О задаче Чезари* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1480–1485.
6. Dollard J.D., Friedman C.N. *Asymptotic behaviour of solutions of linear ordinary differential equations* // J. Math. Anal. and Appl. – 1978. – V. 66. – P. 394–398.
7. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1964. – 447 с.
8. Воскресенский Е.В. *Прямой метод Ляпунова и асимптотическое равновесие* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 6. – С. 854.
9. Yoshizava T. *Liapunov's function and boundedness of solutions* // Funktiul. Ekvas. – 1959. – V. 2. – P. 71–103.
10. Воскресенский Е.В. *Равномерная ограниченность решений, асимптотическое равновесие, периодические решения и прямой метод Ляпунова* // Дифференц. уравнения и их приложения. Тр. 3-й Международн. конф. – Саранск, 1998. – С. 9–13.
11. Воскресенский Е.В. *О равномерной ограниченности решений* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 2. – С. 346–348.
12. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Мир, 1980. – 300 с.

13. Воскресенский Е.В. *Асимптотика решений и гомеоморфизм начальных условий дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 3. – С. 3–9.
14. Švec M. *Asymptotic relationship between solutions of two systems of ordinary differential equations* // Czech. Math. J. – 1974. – V. 24. – P. 44–48.

Мордовский государственный университет

Поступили
первый вариант 20.07.1998
окончательный вариант 14.08.2002