ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 511.752

В.А. МИРЗОЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

1. Введение

Начиная с 1978 г. подмногообразия с параллельной фундаментальной формой (ф. ф.) высшего порядка α_s ($s \geq 3$, $\overline{\nabla}\alpha_s = 0$) стали предметом интенсивного изучения для ряда исследователей. К настоящему времени для этого класса подмногообразий решены важные классификационные задачи, во многих частных случаях дано их геометрическое описание и выявлены их важнейшие свойства. Полное освещение результатов об этих подмногообразиях и подробная библиография даны в обзорной статье Ю.Г. Лумисте [1] и автора [2].

Причиной активного изучения подмногообразий с параллельной ф. ф. высшего порядка является их внутренняя геометрия, которая, как показал автор [3], является геометрией локально симметрического риманова пространства, характеризуемого, как известно, ковариантным постоянством тензора кривизны ($\nabla R = 0$). Следовательно, подмногообразия с параллельной ф. ф. высшего порядка включаются в класс риччи-полусимметрических подмногообразий, характеризуемых условием $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$, где $R(X,Y)$ – оператор кривизны, а R_1 — тензор Риччи.

Римановы пространства и подмногообразия, удовлетворяющие условию $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$, а также их различные частные подклассы были и являются предметом активного изучения многих авторов на протяжении последних 30-ти и более лет (см., напр., обзорные статьи [1], [2], а также более новые исследования [4]–[9] и цитированную в них литературу).

Данная работа посвящена доказательству структурных теорем для подмногообразий с параллельной ф. ф. α_{2s+2} ($s \geq 1$) и лапласово s-рекуррентной (см. § 3) второй ф. ф. α_2 в пространстве постоянной кривизны и, в частности, в евклидовом пространстве. Основные результаты выражаются теоремами 1 и 2 (см. § § 4, 5).

2. Основные определения и формулы

Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного пространства постоянной кривизны $(M_n(c), \widetilde{g})$ и пусть g обозначает индуцированную на M метрику. Вторая ф. ф. α_2 подмногообразия M определяется равенством $\alpha_2(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, где $\widetilde{\nabla}$ и ∇ обозначают римановы связности на $M_n(c)$ и M соответственно, а X и Y — касательные к M векторные поля. Форма α_2 является билинейной симметрической формой, определенной на $T(M) \times T(M)$ ($T(M)$ — касательное расслоение) со значениями в нормальном расслоении $T^{\perp}(M)$. Для нормального векторного поля ξ и касательного векторного поля X положим $\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^{\perp}_X \xi$, где в каждой точке $x \in M$ слагаемые $-A_\xi(X)$ и $\nabla^{\perp}_X \xi$ обозначают касательную и нормальную компоненты соответственно. При этом A_ξ и α_2 связаны между собой равенством $\widetilde{g}(\alpha_2(X,Y), \xi) = g(A_\xi(X), Y)$. Следовательно, в каждой точке $x \in M$ A_ξ является симметрическим линейным преобразованием касательного пространства $T_x(M)$. A_ξ называется вторым фундаментальным тензором,

Статья написана при финансовой поддержке А/О "Прометей".

соответствующим нормальному векторному полю ξ. Нормальная компонента $\nabla^{\perp}_X\xi$ от $\widetilde{\nabla}_X\xi$ определяет в $T^{\perp}(M)$ некоторую метрическую связность $\nabla^{\perp}$, называемую нормальной связностью. Если $\nabla^{\perp}_X\xi = 0$ для любого X, то ξ называется параллельным в нормальной связности или просто параллельным.

Ковариантная производная второй ф. ф. α_2 в связности ван дер Вардена-Бортолотти $\overline{\nabla}$ ($\overline{\nabla} = \nabla \otimes \nabla^{\perp}$) определяется формулой

$$(\overline{\nabla}_X\alpha_2)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha_2(Y, Z) - \alpha_2(\nabla_X Y, Z) - \alpha_2(Y, \nabla_X Z).$$

Известное уравнение Кодацци теперь можно записать в виде $(\overline{\nabla}_X\alpha_2)(Y, Z) = (\overline{\nabla}_Y\alpha_2)(X, Z)$. Подмногообразие M называется вполне геодезическим, если $\alpha_2 \equiv 0$. Если же $\overline{\nabla}_X\alpha_2 = 0$ для любого X, то говорят о подмногообразии с параллельной (ковариантно постоянной) второй ф. ф. Вектор средней кривизны H определяется равенством $H = \operatorname{tr}\alpha_2$.

Подмногообразие называется омбилическим относительно нормального векторного поля ξ, если $A_\xi = \lambda I$, где λ — некоторая функция, а I — тождественное преобразование. Омбилическое относительно H ($A_H = \lambda I$) подмногообразие называется псевдоомбилическим. Если $H \equiv 0$, то подмногообразие называется минимальным.

За дальнейшими подробностями отсылаем к монографии [10].

3. Фундаментальные формы высших порядков

Фундаментальные формы высших порядков подмногообразия M определяются по рекуррентной формуле $\alpha_{s+1},(X_1, \dots, X_s, X) = (\overline{\nabla}_X\alpha_s)(X_1, \dots, X_s)$, где $s \geq 2$, $X, X_1, \dots, X_s$ — произвольные касательные к M векторные поля, а правая часть в развернутой записи имеет следующий вид:

$$(\overline{\nabla}_X\alpha_s)(X_1, \dots, X_s) = \nabla^{\perp}_X\alpha_s(X_1, \dots, X_s) - \sum_{t=1}^{s}\alpha_s(X_1, \dots, \nabla_X X_t, \dots, X_s).$$

Легко проверить, что α_s является s-линейным отображением, определенным на $T(M) \times \dots \times T(M)$ (s раз) со значениями в $T^{\perp}(M)$. Из уравнения Кодацци следует, что все α_s симметричны по первым трем аргументам.

Если $\overline{\nabla}_X\alpha_s = 0$ для любого X, т. е.

$$\nabla^{\perp}_X\alpha_s(X_1, \dots, X_s) - \sum_{t=1}^{s}\alpha_s(X_1, \dots, \nabla_X X_t, \dots, X_s) = 0,$$

то говорят, что ф. ф. α_s является параллельной, пишут $\nabla\alpha_s = 0$.

Пусть h^{α}_{ij} — компоненты ф. ф. α_2 в некотором, адаптированном к M, локальном поле ортонормированного базиса $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$. Здесь и в дальнейшем индексы пробегают следующие значения: $i, j, k, \dots, i_1, j_1, \dots = 1, \dots, m$, $\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$. Компоненты $h^{\alpha}_{i_1 \dots i_s}$ ф. ф. α_s ($s \geq 3$) определяются равенством

$$h^{\alpha}_{i_1 \dots i_s} = \overline{\nabla}_{i_s} h^{\alpha}_{i_1 \dots i_{s-1}} = \dots = \overline{\nabla}_{i_s} \dots \overline{\nabla}_{i_3} h^{\alpha}_{i_1 i_2},$$

где $\overline{\nabla}_i = \overline{\nabla}_{e_i}$. Условие параллельности α_s равносильно $\overline{\nabla}_k h^{\alpha}_{i_1 \dots i_s} = 0$.

Пусть α_{2s} — некоторая ф. ф. четного порядка и пусть $h^{\alpha}_{i_1 j_1 \dots i_s j_s}$ — ее компоненты. Полагая

$$H^{\alpha}_s = h^{\alpha}_{i_1 j_1 \dots i_s j_s}\delta^{i_1 j_1} \dots \delta^{i_s j_s},$$

где δ^{ij} — символ Кронекера, получим в каждой точке $x \in M$ некоторый инвариантно определенный нормальный вектор $H_s = H^{\alpha}_s e_\alpha$. При $s = 1$ вектор H_1, очевидно, совпадает с вектором средней кривизны H.

Определение. Будем говорить, что вторая ф. ф. α_2 подмногообразия M является лапласово s-рекуррентной с собственным значением φ, если ее компоненты h^α_{ij} удовлетворяют условию

$$\Delta^s h^\alpha_{ij} = \underbrace{\Delta \ldots \Delta}_{s} h^\alpha_{ij} = \varphi h^\alpha_{ij},$$

где $\Delta = \delta^{kl}\overline{\nabla}_k\overline{\nabla}_l$ — оператор Лапласа, а φ — некоторая функция. При $s = 1$ будем говорить просто о лапласово рекуррентной ф. ф. α_2.

В следующем параграфе, где будем рассматривать подмногообразия с параллельной ф. ф. α_{2s+2} и лапласово s-рекуррентной ф. ф. α_2, нам понадобится также понятие об ортогональной сопряженной системе (о. с. с.). Поэтому здесь приведем также определение о. с. с.

Говорят, что подмногообразие M несет о. с. с., если на M определены каким-либо образом распределения $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, обладающие следующими свойствами:

а) $\Delta_1(x) \oplus \cdots \oplus \Delta_r(x) = T_x(M)$ для любой точки $x \in M$;

б) $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ инволютивны и сопряжены относительно α_2, т. е. $\alpha_2(X, Y) = 0$ для любого $X \in \Delta_u(x)$ и любого $Y \in \Delta_v$ при $u \neq v$ $(u, v = 1, \ldots, r)$;

в) $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ попарно вполне ортогональны, т. е. $g(X, Y) = 0$ для любого $X \in \Delta_u(x)$ и любого $Y \in \Delta_v(x)$, $u \neq v$.

Если выполняются только условия а) и б), то говорят только о сопряженной системе. Это понятие имеет, вообще говоря, проективный характер. На многомерных поверхностях проективного пространства сопряженные системы исследовались в работах М.А. Акивиса и В.В. Рыжкова [11]–[13].

4. Основные результаты и их доказательство

В данном параграфе будем рассматривать подмногообразия с параллельной ф. ф. α_{2s+2} $(s \geq 1)$ и лапласово s-рекуррентной ф. ф. α_2 в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ и опишем их локальное строение. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть подмногообразие M в $M_n(c)$ имеет параллельную ф. ф. α_{2s+2} $(s \geq 1)$ и лапласово s-рекуррентную вторую ф. ф. α_2 с собственным значением $\varphi \neq \mathrm{const}$. Тогда M несет ортогональную сопряженную систему своих вполне геодезических подмногообразий $M^1, \ldots, M^t$, причем каждое M^u $(u = 1, \ldots, t)$*

1) *принадлежит ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых некоторого вполне геодезического подмногообразия V^u пространства $M_n(c)$, является минимальным подмногообразием этой гиперповерхности и псевдоомбилическим в V^u;*

2) *имеет параллельную ф. ф. $\alpha^{(u)}_{2s+2}$ и лапласово s-рекуррентную ф. ф. $\alpha^{(u)}_2$ с тем же собственным значением φ.*

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть ф. ф. α_{2s+2} $(s \geq 1)$ подмногообразия M параллельна. Тогда нормальный вектор H_{s+1} является параллельным.*

Доказательство. Действительно, пусть $h^\alpha_{i_1 j_1 \ldots i_{s+1} j_{s+1}}$ — компоненты формы α_{2s+2} (обозначения § 3 сохраняются). В силу параллельности α_{2s+2} имеем $\overline{\nabla}_k h^\alpha_{i_1 j_1 \ldots i_{s+1} j_{s+1}} = 0$. Так как $H_{s+1} = H^\alpha_{s+1} e_\alpha$, где

$$H^\alpha_{s+1} = h^\alpha_{i_1 j_1 \ldots i_{s+1} j_{s+1}} \delta^{i_i j_1} \ldots \delta^{i_{s+1} j_{s+1}},$$

то в силу ковариантного постоянства символов Кронекера будем иметь

$$\nabla^\perp_k H^\alpha_{s+1} = \overline{\nabla}_k h^\alpha_{i_1 j_1 \ldots i_{s+1} j_{s+1}} \delta^{i_1 j_1} \ldots \delta^{i_{s+1} j_{s+1}} = 0,$$

что и доказывает параллельность H_{s+1}. $\square$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть A_H — второй фундаментальный тензор подмногообразия M, соответствующий вектору средней кривизны H. Тогда распределения $T^u : x \in M \to T^u_x = \{X \in T_x(M);\ A_H(X) = \lambda_u X\}$, где λ_u $(u = 1,\dots,r)$ — собственные значения A_H, параллельны (в области, где кратности собственных значений λ_u постоянны) и инволютивны. Их интегральные многообразия $M^1,\dots,M^r$ являются вполне геодезическими в M и образуют на M о. с. с.*

Доказательство. В силу s-рекуррентности α_2 можем написать

$$h^\alpha_{iji_1j_1\dots i_sj_s}\delta^{i_1j_1}\dots\delta^{i_sj_s} = \delta^{i_sj_s}\dots\delta^{i_1j_1}\overline{\nabla}_{i_s}\overline{\nabla}_{j_s}\dots\overline{\nabla}_{i_1}\overline{\nabla}_{j_1}h^\alpha_{ij} = \Delta^s h^\alpha_{ij} = \varphi h^\alpha_{ij}. \tag{4.1}$$

В силу параллельности α_{2s+2} левая часть этого равенства ковариантно постоянна. Следовательно, ковариантно постоянна и правая часть φh^α_{ij} $(\overline{\nabla}_k(\varphi h^\alpha_{ij}) = 0)$.

Сопоставим произвольному нормальному векторному полю $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ некоторое поле симметрического эндоморфизма B_ξ расслоения $T(M)$ по формуле $B_\xi = \|\varphi\xi_\alpha h^\alpha_{ij}\|$, где $\xi_\alpha = \xi^\alpha$. Так как $\|\xi_\alpha h^\alpha_{ij}\|$ — матрица второго фундаментального тензора A_ξ, то получаем $B_\xi = \varphi A_\xi$.

Рассмотрим симметрический эндоморфизм $B_{H_{s+1}}$. Так как H_{s+1} является параллельным (лемма 1), а φh^α_{ij} ковариантно постоянно, то $B_{H_{s+1}} = \Big\|\varphi\sum\limits_\alpha H^\alpha_{s+1}h^\alpha_{ij}\Big\|$ также ковариантно постоянно.

Свертывая (4.1) с δ^{ij}, получим $H^\alpha_{s+1} = \varphi H^\alpha$, что равносильно $H_{s+1} = \varphi H$. Тогда $B_{H_{s+1}} = \varphi A_{H_{s+1}} = \varphi^2 A_H$. Отсюда следует, что подпространства собственных векторов эндоморфизма $B_{H_{s+1}}$ и тензора A_H в касательном пространстве $T_x(M)$ совпадают. Причем, если A_H имеет собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ кратностей $l_1,\dots,l_r$, то $B_{H_{s+1}}$ имеет собственные значения $\varphi^2\lambda_1,\dots,\varphi^2\lambda_r$ тех же кратностей. Так как $B_{H_{s+1}}$ является ковариантно постоянным, а собственные распределения ковариантно постоянного симметрического эндоморфизма параллельны и инволютивны (см., напр., [14]), то распределения T^u параллельны и инволютивны. Из параллельности T^u следует, что их интегральные многообразия $M^1,\dots,M^r$ будут вполне геодезическими в M. Докажем, что они образуют на M о. с. с. Действительно, ортогональность T^u_x и T^v_x при $u \neq v$ следует из известного факта линейной алгебры. Докажем их сопряженность относительно α_2. Так как H_{s+1} параллельно, то $A_{H_{s+1}}$ $(= \varphi A_H)$ коммутирует с любым A_ξ, т. е. $A_{H_{s+1}}\cdot A_\xi = A_\xi\cdot A_{H_{s+1}}$ (см., напр., [15]). Тогда и $A_H\cdot A_\xi = A_\xi\cdot A_H$ для любого ξ. Отсюда следует, что T^u_x будут инвариантны относительно A_ξ для любого ξ. Поэтому, если $X \in T^u_x$, а $Y \in T^v_x$, $u \neq v$, то $\widetilde{g}(\alpha_2(X,Y),\xi) = g(A_\xi(X),Y) = 0$. В силу произвольности ξ получаем $\alpha_2(X,Y) = 0$. □

Лемма 3. *Пусть подмногообразие M в $M_n(c)$ несет о. с. с. параллельных распределений $\Delta_1,\dots,\Delta_r$. Тогда $\alpha_s(\dots,X,\dots,Y,\dots) = 0$ для любого $X \in \Delta_u$ и любого $Y \in \Delta_v$, $u \neq v$, при любом $s \geq 3$ и любых позициях X и Y.*

Доказательство этой леммы дано автором в ([16], лемма 1).

Лемма 4. *Пусть подмногообразие M в $M_n(c)$ несет о. с. с. своих вполне геодезических подмногообразий $M^1,\dots,M^r$. Тогда каждая ф. ф. $\alpha^{(u)}_s$ подмногообразия M^u является ограничением на M^u ф. ф. α_s подмногообразия M, т. е. $\alpha^{(u)}_s = \alpha_s|_{M^u}$. Если при этом некоторая ф. ф. α_s параллельна, то параллельны и ф. ф. $\alpha^{(u)}_s$ для любого $u = 1,\dots,r$.*

Эта лемма доказана автором в ([17], теорема 5).

Лемма 5. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть $M^1,\dots,M^r$ — подмногообразия, определенные по лемме 2 с помощью тензора A_H. Тогда каждое M^u $(u = 1,\dots,r)$ имеет лапласово s-рекуррентную вторую ф. ф. $\alpha^{(u)}_2$ с собственным значением φ.*

Доказательство. Пусть в обозначениях § 3 $h^\alpha_{ij\dots k}$ являются компонентами ф. ф. α_{2s+2}. Пусть $i_u, j_u, \dots = m_1 + \dots + m_{u-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_{u-1} + m_u$, где $m_u = \dim T^{(u)}$, и пусть адаптированный к M ортонормированный базис $(e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n)$ согласован со структурой распределений $T^1,\dots,T^r$. Последнее означает, что $e_{i_u} \in T^u$. Тогда на основании леммы 3 имеем

$\alpha_{2s+2}(\dots, e_{i_u}, \dots, e_{i_v}, \dots) = 0$ при $u \neq v$, что равносильно $h^{\alpha}_{i \dots i_u \dots j_v \dots j} = 0$, $u \neq v$. Следовательно, среди компонент $h^{\alpha}_{i \dots j}$ отличными от нуля могут быть только компоненты вида $h^{\alpha}_{i_u \dots j_u}$ (все нижние индексы имеют один и тот же номер), которые согласно лемме 4 и являются компонентами ф. ф. $\alpha^{(u)}_{2s+2}$ подмногообразия M^u. Так как ф. ф. α_2 является s-рекуррентной с собственным значением φ, то

$$\Delta^s h^{\alpha}_{ij} = \delta^{pq} \dots \delta^{kl} \overline{\nabla}_p \overline{\nabla}_q \dots \overline{\nabla}_l \overline{\nabla}_k h^{\alpha}_{ij} = \varphi h^{\alpha}_{ij}$$

или, что равносильно,

$$h^{\alpha}_{ijkl \dots qp} \delta^{kl} \dots \delta^{pq} = \varphi h^{\alpha}_{ij}.$$

Отсюда, в частности, при $i = i_u$, $j = j_u$ и с учетом доказанного выше свойства компонент $h^{\alpha}_{i \dots j}$ ф. ф. α_{2s+2}, получим

$$h^{\alpha}_{i_u j_u k_u l_u \dots p_u q_u} \delta^{k_u l_u} \dots \delta^{p_u q_u} = \varphi h^{\alpha}_{i_u j_u},$$

что и равносильно s-рекуррентности ф. ф. $\alpha^{(u)}_2$ подмногообразия M^u. $\square$

Лемма 6. *Пусть подмногообразие M в $M_n(c)$ несет о. с. с., состоящую из подмногообразий $M^1, \dots, M^r$. Тогда $T^{\perp}(M)$, как подрасслоение нормального расслоения для M^u $(u = 1, \dots, r)$ является параллельным. Если какое-то M^u является вполне геодезическим в M, то оно содержится в некотором $(n - m + m_u)$-мерном $(m = \dim M$, $m_u = \dim M^u)$ вполне геодезическом подмногообразии W^u пространства $M_n(c)$.*

Доказательство. Пусть T^u_x — касательное пространство к M^u, а T^u — соответствующее распределение. Если $\xi \in T^{\perp}(M)$, а $X \in T^u$, то можем написать $\widetilde{\nabla}_X \xi = -A^u_{\xi}(X) + {}^u\nabla^{\perp}_X \xi$, где A^u_{ξ} — второй фундаментальный тензор подмногообразия M^u, а ${}^u\nabla^{\perp}$ — его нормальная связность. Для доказательства первого утверждения леммы достаточно доказать, что ${}^u\nabla^{\perp}_X \xi \in T^{\perp}(M)$. Действительно, т. к. $\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_{\xi}(X) + \nabla^{\perp}_X \xi$, где $A_{\xi}(X) \in T(M)$, а $\nabla^{\perp}_X \xi \in T^{\perp}(M)$ и $\alpha_2(X, Y) = 0$ для любого $Y \in T^v$, $u \neq v$, то $g(A_{\xi}(X), Y) = \widetilde{g}(\alpha_2(X, Y), \xi) = 0$ и, следовательно, $A_{\xi}(X) \in T^u$. Тогда $A_{\xi}(X) = A^u_{\xi}(X)$ и в силу того, что написанные выше разложения прямые, получаем ${}^u\nabla^{\perp}_X \xi = \nabla^{\perp}_X \xi \in T^{\perp}(M)$.

Пусть M^u является вполне геодезическим в M. Тогда, согласно лемме 4, $\alpha^{(u)}_2 = \alpha_2|_{M^u}$ и, следовательно, линейная оболочка нормальных к M^u векторов $\alpha^{(u)}_2(X, Y)$, где $X, Y \in T^u_x$ (так называемое, первое нормальное пространство), содержится в $T^{\perp}_x(M)$. Так как на M^u подрасслоение $T^{\perp}(M)$ параллельно, то согласно основной теореме в [18] M^u содержится в некотором $(n - m + m_u)$-мерном вполне геодезическом подмногообразии W^u пространства $M_n(c)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда M несет о. с. с. своих вполне геодезических подмногообразий $M^1, \dots, M^r$, определенных по лемме 2 с помощью A_H (или $A_{H_{s+1}}$, что то же самое). Каждое M^u имеет параллельную ф. ф. $\alpha^{(u)}_{2s+2}$ (лемма 4), лапласово s-рекуррентную ф. ф. $\alpha^{(u)}_2$ с собственным значением φ (лемма 5) и содержится в некотором вполне геодезическом подмногообразии W^u пространства $M_n(c)$ (лемма 6). Если M^u является псевдоомбилическим в W^u, то в силу параллельности вектора H^u_{s+1} и на основании основной теоремы в [19] можем утверждать, что M^u принадлежит ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых подмногообразия W^u, центр которой принадлежит прямой L_x, проходящей через точку $x \in M^u$ в направлении вектора $H^{(u)}_{s+1}$. Это означает, что вектор $H^{(u)}_{s+1}$ в каждой точке ортогонален к гиперповерхности. Так как $H^{(u)}_{s+1} = \varphi H^{(u)}$ (см. доказательство леммы 2), то и вектор средней кривизны $H^{(u)}$ ортогонален к этой гиперповерхности, и подмногообразие M^u будет минимальным в этой гиперповерхности. Если же M^u не является псевдоомбилическим в W^u, то в силу того, что это подмногообразие удовлетворяет всем условиям теоремы 1, к нему можно применить леммы 1–6. Продолжая этот процесс, в конечном итоге получим псевдоомбилические подмногообразия. $\square$

5. Случай евклидова объемлющего пространства

Здесь выясним, какой вид будет принимать теорема 1 в случае, когда объемлющее пространство $M_n(c)$ имеет нулевую кривизну ($c = 0$), т. е. является евклидовым пространством E_n. В этом случае к утверждениям леммы 2 добавляется новое утверждение. Для того чтобы сформулировать его, мы должны сначала дать определение приводимости подмногообразия.

Изометрическое погружение $M \to E_n$ называется произведением погружений $M^u \to E_{n_u}$ ($u = 1, \dots, r$), если $M = M^1 \times \dots \times M^r$, $E_n = E_{n_1} \times \dots \times E_{n_r}$ и любые два подпространства E_{n_u} и E_{n_v} при $u \neq v$ вполне ортогональны в E_n. В этом случае говорят также, что M разлагается в произведение подмногообразий $M^1, \dots, M^r$ или является приводимым. Достаточные условия локальной приводимости подмногообразия в E_n были получены в [20]. Их можно сформулировать следующим образом: если в некоторой области U на подмногообразии M в E_n заданы попарно вполне ортогональные параллельные распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ ($\Delta_1(x) \oplus \dots \oplus \Delta_r(x) = T_x(U)$ для любого $x \in U$) сопряженные относительно второй ф. ф. α_2, то область U является произведением их интегральных многообразий.

Возвращаясь к лемме 2, можем сказать, что указанные выше достаточные условия выполняются, и M является произведением подмногообразий $M^1, \dots, M^r$. Покажем, что каждое M^u в своем объемлющем евклидовом пространстве E_{n_u} является псевдоомбилическим. Действительно, т. к. $E_{n_u} \perp E_{n_v}$ при $u \neq v$, то вектор средней кривизны H является прямой суммой векторов $\eta_1, \dots, \eta_r$, где η_u — вектор средней кривизны M^u в E_{n_u}, т. е. $H = \eta_1 + \dots + \eta_r$. Тогда $A_H = A_{\eta_1} + \dots + A_{\eta_r}$ и если $X \in T^u$, то $A_H(X) = \lambda_u X$ и, следовательно,

$$\lambda_u X = A_{\eta_1}(X) + \dots + A_{\eta_u}(X) + \dots + A_{\eta_r}(X). \tag{5.1}$$

Покажем, что $A_{\eta_v}(X) = 0$ при $u \neq v$. Действительно, пусть $Y \in T^u$ — произвольный вектор. Тогда

$$g(A_{\eta_v}(X), Y) = \widetilde{g}(\alpha_2^{(u)}(X, Y), \eta_v) = 0.$$

Отсюда и из того, что T^u инвариантно относительно A_{η_v}, заключаем $A_{\eta_v}(X) = 0$. Тогда из (5.1) следует $A_{\eta_u}(X) = \lambda_u X$, и подмногообразие M^u является псевдоомбилическим в E_{n_u}. Так как в евклидовом пространстве ортогональная гиперповерхность связки прямых является гиперсферой, то теорема 1 примет следующий вид.

Теорема 2. *Пусть подмногообразие M в евклидовом пространстве E_n имеет параллельную ф. ф. α_{2s+2} ($s \geq 1$) и лапласово s-рекуррентную вторую ф. ф. α_2 с собственным значением $\varphi \neq \mathrm{const}$. Тогда M локально разлагается в произведение подмногообразий $M^1, \dots, M^r$, где каждое M^u 1) имеет параллельную ф. ф. $\alpha_{2s+2}^{(u)}$ и лапласово s-рекуррентную вторую ф. ф. $\alpha_2^{(u)}$ с тем же собственным значением φ и 2) является минимальным подмногообразием гиперсферы своего объемлющего евклидова пространства E_{n_u} и псевдоомбилическим в E_{n_u}.*

Замечание. В теореме 2 гиперсферу необходимо понимать в широком смысле. В евклидовом пространстве ортогональная гиперповерхность связки прямых может быть, в частности, гиперплоскостью.

6. Заключительные замечания

В теоремах 1 и 2 мы предполагали, что $\varphi \neq \mathrm{const}$. Если $\varphi = \mathrm{const}$, то из $\overline{\nabla}_k(\varphi h_{ij}^{\alpha}) = 0$ (см. доказательство леммы 2) следует $\overline{\nabla}_k h_{ij}^{\alpha} = 0$ и вторая ф. ф. подмногообразия M параллельна. Если при этом $\varphi \neq 0$, то из $\varphi h_{ij}^{\alpha} = \Delta^s h_{ij}^{\alpha} = 0$ следует $h_{ij}^{\alpha} = 0$ и подмногообразие M вполне геодезично. Таким образом, первые два условия теоремы 1 вместе с $\varphi = \mathrm{const}$ образуют совокупность условий, приводящих к параллельности второй ф. ф. подмногообразия.

Структурная теорема для подмногообразий с параллельной второй ф. ф. в E_n была доказана ранее Д. Ферусом [21]: подмногообразие M в E_n с параллельной второй ф. ф. локально является произведением подмногообразий, каждое из которых имеет параллельную вторую ф. ф., является пседоомбилическим, принадлежит гиперсфере своего объемлющего пространства и является минимальным в этой гиперсфере. Сравнивая эту теорему с теоремами 1 и 2, видим, что последние можно рассматривать как естественные обобщения первой.

Наконец, упомянем об одной нерешенной проблеме. Классифицируя двумерные подмногообразия с параллельной ф. ф. α_3 и α_4, а также трехмерные подмногообразия с параллельной ф. ф. α_3 в E_n, Ю.Г. Лумисте [22]–[24] обнаружил, что все они имеют плоскую нормальную связность, и на основании этого в [25] поставил вопрос о существовании подмногообразий более высоких размерностей с параллельной ф. ф. α_3 и неплоской нормальной связностью. На основании этих же результатов Ф. Дилленом [26] была выдвинута следующая общая гипотеза: в $M_n(c)$ непараллельные подмногообразия (т. е. $\alpha_3 \neq 0$) с параллельной ф. ф. α_s ($s \geq 3$) имеют плоскую нормальную связность. Эта гипотеза, которую достаточно доказать или опровергнуть для неприводимых подмногообразий, важна в следующем отношении: если она верна, то классификация подмногообразий с параллельной ф. ф. высшего порядка сводится к их классификации при условии полноты, локальной евклидовости и плоской нормальной связности (см. [26], [7], [22]–[25], [1], [2]).

Литература

1. Лумисте Ю.Г. *Полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 3–28.
2. Мирзоян В.А. Ric-*полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 29–66.
3. Мирзоян В.А. *О подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой* α_s ($s \geq 3$) // Учен. зап. Тартуск. ун-та. – 1991. – № 930. – С. 97–112.
4. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для римановых* Ric-*полусимметрических пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 80–89.
5. Мирзоян В.А. *Подмногообразия с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 9. – С. 22–27.
6. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для кэлеровых* Ric-*полусимметрических пространств* // Докл. НАН Армении. – 1995. – Т. 95. – № 1. – С. 3-5.
7. Dillen F., Nölker S. *Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property* // J. reine angew. Math. – 1993. – Bd. 435. – P. 33–63.
8. Lumiste Ü. *Modified Nomizu problem for semi-parallel submanifolds* // Geom. and Topol. of Submanifolds. – 1995. – V. 7. – P. 176–181.
9. Lumiste Ü. *Symmetric orbits of orthogonal Veronese actions and their second order envelopes* // Results in Mathematics. – 1995. – V. 27. – P. 284–301.
10. Chen B.-Y. *Geometry of submanifolds.* – New York: Marcel Dekker, 1973. – 308 p.
11. Акивис М.А. *О строении двухкомпонентных сопряженных систем* // Тр. Геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР. – 1966. – Т. 1. – С. 7-31.
12. Акивис М.А. *О строении сопряженных систем на многомерных поверхностях* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 10. – С. 3–11.
13. Рыжков В.В. *Сопряженные системы на многомерных поверхностях* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 179–226.
14. Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в Riemann'овых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 2. – 1925. – Т. 25. – С. 86-114.
15. Мирзоян В.А. *Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1983. – Т. 14. – С. 73–100.
16. Мирзоян В.А. *Разложение в произведение подмногообразий с параллельной фундаментальной формой* α_s ($s \geq 3$) // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 8. – С. 44–54.
17. Мирзоян В.А. *Подмногообразия с параллельной фундаментальной формой высшего порядка.* – Тартуск. ун-т. – Тарту, 1978. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.06.78, № 2074-78.

18. Erbacher J. *Reduction of the codimension of an isometric immersion* // J. Different. Geom. – 1971. – V. 5. – № 3–4. – P. 333–340.
19. Лумисте Ю.Г., Чакмазян А.В. *Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 148–157.
20. Moore J.D. *Isometric immersions of Riemannian products* // J. Different. Geom. – 1971. – V. 5. – № 1–2. – P. 159–168.
21. Ferus D. *Produkt-Zerlegung von Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform* // Math. Ann. – 1974. – Bd. 211. – № 1. – S. 1–5.
22. Лумисте Ю.Г. *Неприводимые подмногообразия малых размерностей с параллельной третьей фундаментальной формой* // Учен. зап. Тартуск. ун-та. – 1986. – № 734. – С. 50–62.
23. Lumiste Ü. *Normally flat submanifolds with parallel third fundamental form* // Proc. Estonian Acad. sci. Phys. Math. – 1989. – V. 38. – № 2. – P. 129–138.
24. Lumiste Ü. *Three-dimensional submanifolds with parallel third fundamental form in Euclidean spaces* // Tartu Ülikooli Toimetised. Acta et comm. Univ. Tartuensis. – 1990. – № 899. – P. 45–56.
25. Lumiste Ü. *On submanifolds with parallel higher order fundamental form in Euclidean spaces* // Lect. Notes Math. – 1990. – № 1481. – P. 126–137.
26. Dillen F. *Higher order parallel submanifolds* // Geom. and Topol. of submanifolds. – 1991. – V. 3. – P. 148–152.

Государственный инженерный
университет Армении

Поступила
13.03.1996