И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.763

А.М. ШЕЛЕХОВ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРИ-ТКАНИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО АВТОМОРФИЗМОВ

Геометрию три-тканей начали изучать в конце 20-х г. XX-го столетия В. Бляшке и его ученики — участники Гамбургского геометрического семинара. С тех пор накопилась значительная литература, посвященная этой тематике (см., напр., обзор [1]). Как видно, подавляющее большинство работ последнего времени посвящено многомерным три-тканям. В частности, достаточно хорошо развита теория многомерных три-тканей, допускающих семейства автоморфизмов различной размерности (см. [2] и библ. в [1], [2]). Но специальные классы тканей минимальной размерности — криволинейных три-тканей на плоскости — исследованы недостаточно. Остались неисследованными, в частности, три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов. (Если криволинейная три-ткань допускает двупараметрическое семейство автоморфизмов, то она является регулярной, т. е. эквивалентна ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых.) В этом направлении имеется всего одна работа [3], в которой авторы находят дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее класс таких тканей.

В данной статье мы доводим (другим способом) интегрирование до конца и находим общий вид конечных уравнений криволинейной три-ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов.

Следуя [2], уравнения слоения криволинейной три-ткани зададим уравнениями Пфаффа

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 = 0. \tag{1}$$

Базисные формы ω_1 и ω_2 удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega \tag{2}$$

и

$$d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2. \tag{3}$$

Внешнее дифференцирование последнего уравнения приводит к дифференциальным уравнениям на ковариантные производные от кривизны b:

$$\begin{gathered} db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \\ db_{11} - 4b_{11}\omega = b_{112}\omega_1 + b_{112}\omega_2 \end{gathered} \tag{4}$$

и т. д. Ковариантные производные связаны рядом соотношений, например,

$$b_{12} - b_{21} = 2b^2.$$

Допустим, что рассматриваемая три-ткань не является параллелизуемой. Тогда репер можно нормировать так, чтобы во всей области определения ткани кривизна стала постоянной.

Положим, например, $b = -1/2$. В этом случае из уравнения (4) получаем

$$\begin{gathered} \omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ db_1 = (b_{11} + 3b_1^2)\omega_1 + (b_{12} + 3b_1b_2)\omega_2, \quad db_2 = (b_{21} + 3b_1b_2)\omega_1 + (b_{22} + 3b_2^2)\omega_2 \end{gathered} \tag{5}$$

и т. д. Аналогичные уравнения получатся для величин $b_{11}, b_{12}, \dots$

Пусть рассматриваемая три-ткань W допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов. Как было доказано в [2], тогда вдоль траекторий этого семейства адаптированные реперы ткани можно выбрать так, что в этих реперах все структурные тензоры ткани станут постоянными. Следовательно, на траекториях семейства правые части уравнений (2) и им аналогичных обращаются в нуль. А значит, на всем многообразии ткани указанные правые части пропорциональны. Поэтому, приравнивая их нулю, получаем дифференциальное уравнение однопараметрического семейства автоморфизмов ткани.

Далее, пропорциональность правых частей означает, что дифференциалы всех функций $b_2, b_{11}, b_{12}, \dots$ пропорциональны, например, db_1. Следовательно, можно считать, что на многообразии ткани все эти функции зависят от одной переменной b_1:

$$b_2 = b_2(b_1), \quad b_{11} = b_{11}(b_1), \quad b_{12} = b_{12}(b_1)$$

и т. д. Но тогда в силу (5) первое из уравнений (2) можно записать следующим образом:

$$d\omega_1 = b_2(b_1)\omega_1 \wedge \frac{db_1}{b_{12}(b_1) + 3b_1b_2(b_1)} = \omega_1 \wedge d\theta_1(b_1),$$

где $\theta_1(b_1)$ — некоторая функция. Интегрируя последнее уравнение, найдем форму

$$\omega_1 = e^{-\theta_1(b_1)}du. \tag{6}$$

Здесь u — некоторая новая переменная. Аналогично находим форму

$$\omega_2 = e^{-\theta_2(b_1)}dv. \tag{7}$$

Подставив найденные значения базисных форм во второе уравнение (5), найдем $db_1 = \alpha(b_1)\omega_1 + \beta(b_1)\omega_2$. Отсюда следует, что частные производные от функции $b_1 = \varphi(u, v)$ (по переменным u и v) также являются функциями от b_1.

Обозначим $u = \overline{\varphi}(b_1, v)$ и $v = \widetilde{\varphi}(u, b_1)$ соответственно левую и правую обратные функции для функции $b_1 = \varphi(u, v)$. Тогда из очевидных равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial b_1} = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial b_1} = 1$$

вытекает, что производные $\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial b_1}$ и $\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial b_1}$ также зависят только от b_1. Отсюда, в свою очередь, следует $u = \overline{\varphi}(b_1, v) = p(b_1) + q(v)$, $v = \widetilde{\varphi}(u, b_1) = r(u) + s(b_1)$.

Решение этой системы можно записать в виде $b_1 = \varphi(u + av)$, где a — некоторая постоянная. Тогда все функции от переменной b_1 станут функциями от переменной $u + av$, в частности, базисные формы (см. (6) и (7)) запишутся в виде

$$\omega_1 = e^{-\theta_1(u+av)}du, \quad \omega_2 = e^{-\theta_2(u+av)}dv,$$

где θ_1 и θ_2 — уже некоторые новые функции.

Теперь найдем уравнения слоений рассматриваемой три-ткани. В соответствии с уравнениями (1), первое слоение задается уравнением $u = x$, второе — уравнением $v = y$, третье — дифференциальным уравнением $e^{\theta_2 - \theta_1}du + dv = 0$.

Обозначим $u + av = p$, $u - av = q$. Так как функции θ_1 и θ_2 зависят от переменной $u + av$, то последнее уравнение перепишется в виде $e^{\delta(p)}(dp + dq) + \frac{1}{a}(dp - dq) = 0$. В этом уравнении переменные разделяются, и после интегрирования получим $u - av + f(u + av) = z$. Постоянная интегрирования z — параметр третьего слоения ткани. Исключая из уравнений слоений локальные координаты u и v, в соответствии с теорией придем к искомому уравнению три-ткани

$$z = x - ay + f(x + ay),$$

которое связывает параметры x, y и z трех слоев ткани, проходящих через одну точку.

После изотопического преобразования $ay \to y$ уравнение ткани примет более простой вид

$$z = x - y + f(x + y). \tag{8}$$

Рассматриваемая ткань не является, вообще говоря, регулярной (параллелизуемой). Найдем подкласс регулярных тканей в классе тканей, допускающих однопараметрическое семейство автоморфизмов.

Для этого согласно теории [1] следует приравнять нулю кривизну ткани, определяемой уравнением (8). Полученное уравнение Сен-Робера

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{F_x}{F_y} = 0,$$

где F — правая часть уравнения (8), и дает искомый класс. После преобразований придем к дифференциальному уравнению $f'''(f')^2 - f''' - 2f'(f'')^2 = 0$. Его решением будет функция вида $\alpha^{-1} \ln \mathrm{Ch}(\alpha(x + y) + \beta) + \gamma$, где α, β, γ — постоянные интегрирования. Следовательно, ткань вида (8) будет регулярной тогда и только тогда, когда ее уравнение имеет вид

$$z = x - y + \frac{1}{\alpha} \ln \mathrm{Ch}(\alpha(x + y) + \beta) + \gamma.$$

Заметим, что этот факт легко проверяется непосредственно: последнее уравнение изотопическими преобразованиями приводится к каноническому виду $z = x + y$.

Литература

1. Akivis M.A, Goldberg V.V. *Differential geometry of webs.* – Handbook of Differential Geometry. – Chap. 1. – Elsevier Science B.V., 2000. – P. 1–152.
2. Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 365 p.
3. Виноградов А.М., Ямагушин В.А. *Дифференциальные инварианты тканей на двумерном многообразии* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 48. – № 1. – С. 26–37.

Тверской государственный университет

Поступила 02.03.2004