ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.98

Ш.М. УСМАНОВ

УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ W^*-АЛГЕБРАХ И JW-АЛГЕБРАХ

Условным ожиданием на W^*-алгебре называется линейное положительное нормальное отображение, являющееся проекцией (т. е. идемпотентное) и имеющее норму 1. В [1] Такесаки дал необходимые и достаточные условия существования условного ожидания на W^*-алгебре, сохраняющего нормальный полуконечный вес. В [2]–[5] были введены условные ожидания на йордановых операторных алгебрах (JW-алгебрах) и исследовалась их связь с условными ожиданиями на их обертывающих W^*-алгебрах. В [6] для JW-алгебр был доказан один вариант теоремы Такесаки о существовании условных ожиданий, сохраняющих точный нормальный полуконечный вес. Затем в [7] для JBW-алгебр был получен аналог теоремы Такесаки о существовании условных ожиданий, сохраняющих точный нормальный линейный функционал единичной нормы (состояние).

Цель данной работы — получение необходимого и достаточного условия существования условного ожидания на обратимой JW-алгебре, сохраняющего точный нормальный полуконечный вес.

1. *Предварительные сведения.* JW-алгеброй называется вещественное линейное пространство A самосопряженных операторов из $B(H)$, замкнутое относительно йорданова (симметризованного) умножения $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, $x, y \in A$, и замкнутое в слабой операторной топологии. JW-алгебра A называется обратимой, если $x_1x_2 \dots x_n + x_nx_{n-1} \dots x_1 \in A$ для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$; такие JW-алгебры характеризуются тем, что $A = R(A)_{sa} = \{x \in R(A) : x = x^*\}$, где $R(A)$ — наименьшая слабо замкнутая вещественная подалгебра $B(H)$, содержащая A. Обратимая JW-алгебра A разлагается по центру в прямую сумму JW-алгебр A_r и A_c: $A = A_r \oplus A_c$, где A_c — множество самосопряженных операторов W^*-алгебры $R(A_c) = \mathcal{U}(A_c)$, и A_r — множество самосопряженных операторов вещественной W^*-алгебры $R(A_r)$.

Напомним, что вещественной W^*-алгеброй называется вещественная $*$-алгебра R ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H, содержащая единицу, замкнутая в слабой операторной топологии и такая, что $R \cap iR = \{0\}$. Обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(R)$ для R (т. е. наименьшая W^*-алгебра, содержащая R) имеет вид: $\mathcal{U}(R) = R + iR$, и R определяет на $\mathcal{U}(R)$ некоторый инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\alpha_R : \alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, где $x, y \in R$. Соответственно R определяется при помощи $\alpha_R : R = \{x \in \mathcal{U}(R) : \alpha_R(x) = x^*\}$.

О теории JW-алгебр см. [8]–[10], о теории вещественных W^*-алгебр см. [11].

2. *Условные ожидания на вещественных W^*-алгебрах.* Определим условное ожидание на вещественной W^*-алгебре относительно ее вещественной W^*-подалгебры.

Определение. Пусть R — вещественная W^*-алгебра, Q — ее вещественная W^*-подалгебра. Линейное отображение $E : R \to Q$ называется условным ожиданием, если E является положительной проекцией с нормой 1. E называется нормальным, если $x_i \nearrow x$ влечет $T(x_i) \nearrow T(x)$ для $\{x_i\}_{i \in Z}$, x из R_s; E называется точным, если $T(x^*x) = 0$ влечет $x = 0$.

Сформулируем теорему о существовании условного ожидания на вещественной W^*-алгебре.

Теорема 1. *Пусть R, Q — вещественные W^*-алгебры, $Q \subset R$, φ — точный нормальный полуконечный вес на R^+. Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует точное нормальное условное ожидание $E : R \to Q$ такое, что*

$$\varphi(x) = \varphi(E(x)) \quad \forall x \in R;$$

2) *точный нормальный вес $\varphi|_{Q^+}$ является полуконечным и*

$$\sigma_t^{\overline{\varphi}}(\mathcal{U}(Q)) = \mathcal{U}(Q) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

для веса $\overline{\varphi}$, являющегося α_Q-инвариантным продолжением φ на $\mathcal{U}(R^+)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $E : R \to Q$ — φ-инвариантное условное ожидание, E_0 — его сужение на JW-алгебру R_s; тогда из положительности E следует, что $E_0(R_s) \subset Q_s$. По основной теореме и следствию 1 работы [3] существует точное нормальное условное ожидание $\overline{E} : \mathcal{U}(R_s) \to \mathcal{U}(Q_s)$ такое, что $E_0 = E_0 \cdot \overline{E}$. Пусть $\overline{\varphi}$ — вес на M^+, являющийся α_R-инвариантным продолжением φ, α_r — инволютивный $*$-антиавтоморфизм M, определяющий R. Тогда по построению $\overline{E}$ переводит самосопряженные элементы в самосопряженные, а кососопряженные элементы в кососопряженные, и тогда для $\overline{E}$ выполняется $\overline{\varphi}\overline{E} = \overline{\varphi}$. Действительно,

$$\overline{\varphi}(\overline{E}(x+iy)) = \overline{\varphi}(\overline{E}(x) + \overline{E}(iy)) = \varphi(E(x)) + i\varphi(E(y)) = \varphi(x) = \overline{\varphi}(x+iy)$$

для всех $x + iy \in M^+$, $x \in R^+$, $y^+ = -y$, т. к. в силу α_R-инвариантности для веса φ выполняется $\varphi(y) = \varphi(\overline{E}(y)) = 0$. Тогда по теореме Такесаки $\sigma_t^{\overline{\varphi}}(N) = N$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). В силу условия 2) по теореме Такесаки существует точное нормальное условное ожидание $D : M \to N$ такое, что $\overline{\varphi}D = \overline{\varphi}$. Покажем, что D коммутирует с α_R.

Построим представление Гельфанда–Наймарка–Сигала $\pi_{\overline{\varphi}}(M)$ W^*-алгебры M по весу $\overline{\varphi}$; тогда гильбертово пространство H_φ является пополнением $\{x \in M : \overline{\varphi}(x^*x) < +\infty\}$ по норме $\overline{\varphi}(x^*x)^{1/2}$, и, кроме того, имеет вид $H = K + iK$, где K — вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением по той же норме множества $\Re_{\overline{\varphi}} = \{x \in R : \overline{\varphi}(x^*x) < +\infty\}$. Легко проверяется, что в силу α_R-инвариантности $\overline{\varphi}$ соответствующее скалярное произведение $(\ ,\ )_{\overline{\varphi}}$ принимает вещественные значения на K и из $R \cap iR = \{0\}$ следует $K \cap iK = \{0\}$.

Пусть H_1 — гильбертово подпространство $H_{\overline{\varphi}}$, порожденное множеством $\Re_{\overline{\varphi}|_N} = \{x \in N : \overline{\varphi}(x^*x) < +\infty\}$, $p : H_{\overline{\varphi}} \to H_1$ — ортогональный проектор, порождающий условное ожидание D [1],

$$D(x) = \pi_{\overline{\varphi}}^{-1}(p\pi_{\overline{\varphi}}(x)p), \quad x \in M.$$

Кроме того, рассмотрим вещественное подпространство $K_1 \subset K$, порожденное множеством $\Re_{\varphi|_Q} = \{x \in Q : \overline{\varphi}(x^*x) < +\infty\}$; очевидно, $H_1 = K + iK$. Пусть p_1 — ортогональный проектор из K на K_1. Так как $K \cap iK = \{0\}$, то p_1 можно продолжить по линейности до ортогонального проектора p' из $H_{\overline{\varphi}}$ на $H_1 = K_1 + iK_1$, и в силу единственности ортогонального проектора на подпространство H_1 проектор p' совпадает с p.

Таким образом, условное ожидание D коммутирует с α_R и сужается до условного ожидания $E : R \to Q$,

$$E(x) = \pi_{\overline{\varphi}}(p_1\pi_{\overline{\varphi}}(x)p_1), \quad x \in R.$$

Единственность E следует из теоремы Такесаки, выполнение условия

$$\varphi(x) = \varphi(E(x)) \quad \forall x \in R$$

очевидно по построению E. $\square$

3. *Условные ожидания на обратимых JW-алгебрах.* Условным ожиданием на JW-алгебре A относительно ее JW-подалгебры A_1 называется нормальное линейное положительное идемпотентное отображение $\Phi : A \to A_1$, имеющее норму 1 [3].

Напомним, что в [9] была построена теория Томиты–Такесаки для состояний на JBW-алгебрах; развивая ее, Н. Трунов [12], [13] построил аналогичную теорию для весов на JBW-алгебрах. В рамках этой теории для нормального состояния или нормального полуконечного веса φ на JBW-алгебре A был определен аналог группы модулярных автоморфизмов — косинус-группа $\{\rho_t^\varphi\}_{t\in\mathbf{R}}$ слабо непрерывных положительных линейных отображений на A, сохраняющих единичный оператор и таких, что $\varphi(\rho_t^\varphi(x)\circ y) = \varphi(x\circ\rho_t^\varphi(y))$ для всех $x, y \in A$, $t \in \mathbf{R}$, и выражение

$$s(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x\circ\rho_t^\varphi(y))\cosh(\pi t)^{-1}dt$$

определяет самополярную форму, ассоциированную с φ. Для обратимой JW-алгебры A таким косинусным семейством является семейство

$$\rho_t^\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_t^{\overline{\varphi}} + \sigma_{-t}^{\overline{\varphi}})\big|_A,$$

где $\overline{\varphi}$ — вес, являющийся α_A-инвариантным продолжением φ на $\mathcal{U}(A)^+$, именно такой, что $\overline{\varphi}(a+ib) = \varphi(a)$ для $a+ib \in \mathcal{U}(A)^+$, $a \geq 0$, $b^* = -b$; α_A — инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathcal{U}(A)$, порождающий $R(A)$ в $\mathcal{U}(A)$.

Хагеруп и Штермер ([7], теорема 4.2) доказали, что для JW-алгебры A с точным нормальным состоянием φ и ее JW-подалгебры A_1 с состоянием $\psi = \varphi|_{A_1}$ существует точное нормальное условное ожидание $E : M \to N$ такое, что $\varphi = \psi\cdot E$ тогда и только тогда, когда

$$\rho_t^\psi(x) = \rho_t^\varphi(x), \quad x \in A_1, \ \ t\in\mathbf{R}.$$

Следующее предложение обобщает следствие 4.3 из [7].

Предложение. *Пусть M — W^*-алгебра, A — обратимая JW-подалгебра M такая, что $Z(A) = Z(\mathcal{U}(A)_{sa})$, φ — точный нормальный полуконечный α-инвариантный вес на M^+, для которого*

$$\rho_t^\varphi(x) \in A \ \ \forall t \in \mathbf{R}, \ \ \forall x \in A.$$

Тогда $\sigma_t^\varphi(\mathcal{U}(A)) = \mathcal{U}(A)$, $t\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Для случая, когда φ — ограниченный линейный функционал, утверждение предложения доказано в следствии 4.3 [7]. Сведем наше доказательство к этому случаю.

Предположим, что существуют $e \in A$, $t_0 \in \mathbf{R}$ такие, что $\sigma_{t_0}^\varphi(e) \notin \mathcal{U}(A)$. Так как по спектральной теореме для JW-алгебр (см. [9], [10] или [11]) всякий элемент JW-алгебры можно разложить в слабо сходящийся интеграл по спектральному семейству проекторов, то можем без ограничения общности взять проектор $e\in A$, а в силу полуконечности φ можем выбрать e таким, что $\varphi(e) < +\infty$. Пусть $\sigma_{t_0}^\varphi(e) = p + iq$, $q \neq 0$. Пусть $g = s_{\mathcal{U}(A)_\varphi}(e)$ — относительный носитель e в W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)_\varphi$, которая является централизатором веса φ,

$$\mathcal{U}(A)_\varphi = \{x \in \mathcal{U}(A) : \sigma_t^\varphi(x) = x \ \forall t\in\mathbf{R}\}.$$

Как и всякий центральный носитель в W^*-алгебре, g имеет вид $g = \cup\{e' \in \mathcal{U}(A)_\varphi : e' \preceq e\}$. Так как $e \in A$, то $a_A(e) = e$, откуда если $e' \preceq e$, то $\alpha_A(e') \preceq e$, и тогда $g \in \mathcal{U}(A)_\varphi \cap A$. Так как вес φ является точным нормальным α_A-инвариантным полуконечным следом на σ-конечной W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)_\varphi$, то существует последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ попарно ортогональных проекторов из $A\cap\mathcal{U}(A)_\varphi$ таких, что $g = \sum\limits_{n=1}^\infty g_n$, и, кроме того, $\varphi(g_n) < \infty$ для всех n. Разложим проектор g по $\{g_n\}$

$$e = \sum_{n=1}^\infty e_{n,m},$$

где $e_{n,n} = g_n e g_n$, $e_{n,m} = g_n e g_m + g_m e g_n$ при $n\neq m$. Так как проекторы g_n выбраны из $\mathcal{U}(A)_\varphi$, то

$$g_n(p+iq)g_m = g_n(\sigma_{t_0}^\varphi(e))g_m = \sigma_{t_0}^\varphi(g_n e g_m).$$

Так как $p+iq \notin \mathcal{U}(A)$, то существуют числа n_0, m_0 такие, что $g_{n_0}(p+iq)g_{m_0} = \sigma_{t_0}^{\varphi}(g_{n_0}eg_{m_0}) \notin \mathcal{U}(A)$. Пусть теперь $r = g_{n_0} + g_{m_0}$, $s = rer$; тогда для точного нормального ограниченного линейного функционала $\psi = \varphi|_{\mathcal{U}(A)_\varphi}$ на W^*-алгебре $r(\mathcal{U}(A))r$ выполняется

$$\sigma_t^{\psi}(x) + \sigma_{-t}^{\psi}(x) = \sigma_t^{\varphi}(rxr) + \sigma_{-t}^{\varphi}(rxr) = r(\sigma_t^{\varphi}(x))r + r(\sigma_{-t}^{\varphi}(x))r \in rAr$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, $x \in rAr$; одновременно $\sigma_{t_0}^{\psi}(rer) = r(\sigma_{t_0}^{\varphi}(e))r \notin r(\mathcal{U}(A))r$. Получили противоречие с утверждением следствия 4.3 из [7]. $\square$

Теперь можем сформулировать необходимое и достаточное условие существования условного ожидания на обратимой JW-алгебре в терминах модулярных косинус-групп.

Теорема 2. *Пусть A — обратимая JW-алгебра, A_1 — ее JW-подалгебра. Следующие условия эквивалентны.*

1) *На A^+ существует точный нормальный полуконечный вес φ такой, что его сужение ψ на A_1^+ является точным нормальным полуконечным весом и для косинус-группы $\{\rho_t^{\varphi}\}_{t\in\mathbf{R}}$ выполняется $\rho_t^{\varphi}(A_1) = A_1$ для всех $t \in \mathbf{R}$.*
2) *Существует точное нормальное условное ожидание $T : A \to A_1$ такое, что $\psi T(x) = \psi(x)$ для всех $x \in A$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из предложения 3 и теоремы 1.

(2) $\Rightarrow$ (1). В силу основной теоремы и следствия 1 из [3] существует точное нормальное ожидание $D : \mathcal{U}(A) \to A_1'' = \mathcal{U}(A_1)$, продолжающее T и такое, что $D\alpha_A = \alpha_A D$. Рассмотрим вес φ, являющийся α_A-инвариантным продолжением ψ на $\mathcal{U}(A)^+$; тогда

$$\psi = \frac{\varphi + \varphi\alpha_A}{2}$$

и для любого $x \in \mathcal{U}(A)$ выполняется

$$\varphi(D(x)) = \psi\left(\frac{D(x) + \alpha_A(D(x))}{2}\right) = \psi\left(\frac{D(x) + D(\alpha_A(x))}{2}\right) =$$
$$= \psi\left(D\left(\frac{x + \alpha_A(x)}{2}\right)\right) = \psi\left(T\left(\frac{x + \alpha_A(x)}{2}\right)\right) = \psi\left(\frac{x + \alpha_A(x)}{2}\right) = \varphi(x).$$

Итак, всякое условное ожидание $T : A \to A_1$, удовлетворяющее условиям 2) теоремы, можно продолжить до условного ожидания $D : \mathcal{U}(A) \to \mathcal{U}(A_1)$ такого, что $\varphi(D(x)) = \varphi(x)$ $\forall x \in \mathcal{U}(A)$. Тогда по теореме Такесаки имеем $\sigma_t^{\varphi}(\mathcal{U}(A_1)) = \mathcal{U}(A_1)$ $\forall t \in \mathbf{R}$, откуда следует утверждение 1) теоремы. $\square$

Литература

1. Takesaki M. *Conditional expectation in von Neumann algebra* // J. Funct. Anal. – 1972. – V. 9. – № 3. – P. 306–321.
2. Edwards C.M. *Conditional expectations on Jordan algebras* // Fund. Aspects of Quantum Theory, NATO ASI Ser. – Plenum Press, 1985. – P. 75.
3. Stormer E. *Positive projections onto Jordan algebras and their enveloping von Neumann algebras* // Ideas and Methods in Math. Anal., Stochastics and Appl. – Cambridge Univ. Press, 1992. – P. 389–393.
4. Аюпов Ш.А. *Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах* // ДАН УзССР. – 1981. – № 10. – С. 3–5.
5. Аюпов Ш.А. *Классификация, представления и вероятностные аспекты упорядоченных йордановых алгебр.* Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Ташкент, 1982. – 295 с.
6. Аюпов Ш.А., Азизов Э., Усманов Ш.М. *О существовании условных ожиданий в йордановых операторных алгебрах* // Узбекск. матем. журн. – 1991. – № 6. – С. 11–14.

7. Haagerup U., Stormer E. *Positive projections of von Neumann algebras onto JW-algebras* // J. Reports Math. Phys. – 1995. – V. 36. – P. 317–330.
8. Аюпов Ш.А. *Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.* – Ташкент: Фан, 1986. – 123 с.
9. Hanche-Olsen H., Stormer E. *Jordan operator algebras.* – Boston e. a.: Pitman, 1984. – 183 p.
10. Topping D. *Jordan algebras of self-adjoint operators* // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1965. – № 53. – P. 1–48.
11. Ayupov Sh., Rakhimov A., Usmanov Sh. *Jordan, real and Lie structures in operator algebra* // Ser. MIA № 418. – Dordrecht: Kluwer AP, 1998. – 235 p.
12. Трунов Н.В. *Интегрирование относительно веса на йордановых алгебрах.* – Казанский ун-т. – Казань, 1984. – 34 с. Деп. в ВИНИТИ 10.07.1984, № 4948–84.
13. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. *Введение в теорию некоммутативного интегрирования* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1985. – Т. 27. – С. 167–190.

Институт математики Академии
наук Республики Узбекистан

Поступила
19.01.1999