ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.518

Т.Ю. КУЛИКОВА

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ L_2 С ВЕСОМ ЯКОБИ

В статье рассматривается вопрос о структурных свойствах класса функций $f(x_1,x_2)$ с заданным порядком наилучшего приближения двумерным углом и прямоугольником в метрике пространства $L_{2,\lambda,\delta}$. Функция $f(x_1,x_2)\in L_{2,\lambda,\delta}$, если $f(x_1,x_2)$ измерима на $[-1;1]^2$ и $\|f\|=\left(\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f^2(x_1,x_2)\lambda(x_1)\delta(x_2)dx_1dx_2\right)^{1/2}<\infty$.

В статье рассматриваются весовые функции $\lambda(x_1)\delta(x_2)$ типа Якоби, где $\lambda(x_1)=(1-x_1)^{\alpha_1}(1+x_1)^{\beta_1}$, $\delta(x_2)=(1-x_2)^{\alpha_2}(1+x_2)^{\beta_2}$, $\alpha_i\ge\beta_i>-1$, $i=1,2$. Пусть $\{\widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1,x_2)\}_{k,l=0}^{\infty}$ — ортонормированная система полиномов $\widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1,x_2)=\widehat{P}_k^{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1)\cdot\widehat{P}_l^{(\alpha_2,\beta_2)}(x_2)$. Здесь $\{\widehat{P}_k^{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1)\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов Якоби с параметрами α_1, β_1, ортонормированных на отрезке $[-1;1]$ с весом $\lambda(x_1)$. Аналогично $\{\widehat{P}_l^{(\alpha_2,\beta_2)}(x_2)\}_{l=0}^{\infty}$ — система полиномов Якоби, ортонормированных на $[-1;1]$ с весом $\delta(x_2)$. Обозначим через $P_k^{(\alpha,\beta)}$ стандартизованные многочлены Якоби с параметрами α, β, т.е. многочлены Якоби с нормировкой

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{k+\alpha}{k}.$$

В пространстве $L_{2,\lambda,\delta}$ определим операторы обобщенного сдвига. Пусть $f(x_1,x_2)\sim\sum\limits_{k,l=0}^{\infty}c_{kl}(f)\widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1,x_2)$ — разложение функции f в ряд Фурье по системе $\{\widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1,x_2)\}$. Пусть задана такая последовательность непрерывных на $[0,1/4]$ функций $\{\beta_k^{[\lambda]}(h_1)\}_{k=0}^{\infty}$, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\beta_k^{[\lambda]}(h_1)c_{kl}(f)\widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1,x_2)$ сходится в $L_{2,\lambda,\delta}$. Обозначим сумму этого ряда (в смысле $L_{2,\lambda,\delta}$) через $T_{h_1}^{[\lambda]}f$ и назовем эту функцию *оператором обобщенного сдвига* (или просто *сдвигом*) функции $f(x_1,x_2)$ по первому аргументу на величину $h_1\in[0,1/4]$, т.е.

$$T_{h_1}^{[\lambda]}f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k^{[\lambda]}(h_1)c_{kl}(f)\widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1,x_2)\tag{1}$$

(равенство понимается в смысле $L_{2,\lambda,\delta}$). Функциональные последовательности $\{\beta_k^{[\lambda]}(h_1)\}_{k=0}^{\infty}$ будем называть *коэффициентами* оператора обобщенного сдвига.

В данной работе будем рассматривать последовательности функций $\beta_k^{[\lambda]}$, определяемые одним из следующих способов. Если $\lambda(x_1)$ — вес Якоби с $\alpha\ge\beta$, $\alpha\ge-1/2$, $\beta>-1$, то последовательность коэффициентов обобщенного сдвига можно задать так:

$$\beta_k^{[\lambda]}(h_1)=(P_k^{(\alpha,\beta)}(1))^{-1}P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos h_1).\tag{I}$$

Если $\lambda(x_1)$ — вес Якоби с $\alpha,\beta>-1$, то можно использовать формулы

$$\beta_k^{[\lambda]}(h_1)=(P_k^{(\alpha,\beta)}(2))^{-1}P_k^{(\alpha,\beta)}(2-h_1),\tag{II}$$

$$\beta_k^{[\lambda]}(h_1)=(P_{v(k)}^{(\alpha,\beta)}(1/2))^{-1}P_{v(k)}^{(\alpha,\beta)}(1/2+h_1),\tag{III}$$

где $v(k) = k + s(k) + t(k)$, $s(0) = t(0) = 0$,

$$t(k) = t(k-1) + \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{6}(4(k + s(k-1) + t(k-1)) - 1 + 2\beta - 4\alpha) \in \mathbf{Z}; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$s(k) = s(k-1) + \begin{cases} 1, & \text{если } P^{(\alpha,\beta)}_{k+s(k-1)+t(k)}(\frac{1}{2}) = 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $\alpha, \beta \in (-1, -1/2]$, $\alpha = \beta$, то можно использовать также формулу

$$\beta_k^{[\lambda]}(h_1) = (P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(0))^{-1} P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(h_1). \qquad \text{(IV)}$$

Аналогично определяется $T_{h_2}^{[\delta]} f$ — оператор обобщенного сдвига по второму аргументу. Заметим, что задача об обобщенном сдвиге, заданном при помощи ряда (1), рассматривалась, например, в [1].

Утверждение. *Операторы обобщенного сдвига $T_{h_1}^{[\lambda]}$ и $T_{h_2}^{[\delta]}$ являются ограниченными операторами в пространстве $L_{2,\lambda,\delta}$. Семейства операторов $\{T_{h_1}\}_{h_1 \le 1/4}$ и $\{T_{h_2}\}_{h_2 \le 1/4}$ равномерно ограничены по h_1 и h_2 соответственно.*

Введем обозначение $\Delta_{h_1}^{[\lambda]} f$ для первой обобщенной разности, соответствующей оператору обобщенного сдвига по первой переменной, т. е. $\Delta_{h_1}^{[\lambda]} f = T_{h_1}^{[\lambda]} f - f$; $(\Delta_{h_1}^{[\lambda]})^2 f = \Delta_{h_1}^{[\lambda]}(\Delta_{h_1}^{[\lambda]} f)$ — вторая разность. Аналогично $\Delta_{h_2}^{[\delta]}$ — обобщенная разность по второй переменной. В дальнейшем будем опускать индексы $[\lambda]$ и $[\delta]$ там, где это не вызовет недоразумений.

Заметим, что все обобщенные сдвиги, определенные выше, задаются последовательностями коэффициентов, имеющих вид

$$\beta_k(h) = (P_k^{(\alpha,\beta)}(u))^{-1} P_k^{(\alpha,\beta)}(\phi(h)),$$

где $\phi(h)$ — гладкая монотонная при $h \ge 0$ функция, причем $\phi(0) = u$. Эту точку u назовем *точкой нормировки* обобщенного сдвига. Точка нормировки сдвига (I) лежит **на границе** сегмента ортогональности, точки нормировки сдвигов (III) и (IV) лежат **внутри**, а сдвига (II) — **вне** сегмента ортогональности полиномов Якоби. Полученные автором теоремы об аппроксимации будут верны для всех сдвигов, определенных выше.

Замечание. Добавка $t(k)$ в формуле (III) отлична от нуля только в случае, когда параметры веса таковы, что $2\beta - 4\alpha \in \mathbf{Z}$. Добавка $s(k)$ введена для того, чтобы избежать деления на нуль. Последовательность $s(k)$ ограничена при всех допустимых значениях параметров.

Пусть $D_i : \Lambda(D_i) \longrightarrow L_{2,\lambda,\delta}$, $i = 1, 2$, — дифференциальный оператор с областью определения $\Lambda(D_1) = \{f \in L_{2,\lambda,\delta} : f,\ \frac{\partial f}{\partial x_1}$ для почти всех $x_2 \in [-1; 1]$ эквивалентны некоторым абсолютно непрерывным внутри $(-1, 1)$ функциям, причем $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_{2,\lambda,\delta}$, $(1 - x_1^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \in L_{2,\lambda,\delta}\}$, $D_1 = -(1 - x_1^2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}$. Аналогично определяется оператор D_2 в зависимости от параметров веса $\delta(x_2)$.

Назовем $D_i f$ *обобщенной операторной производной* функции f по переменной x_i, $i = 1, 2$. $D_i^{m_i} f$ — обобщенная производная порядка m_i по переменной x_i определяется индукцией по m_i: $\Lambda(D_i^{m_i}) = \{f \in \Lambda(D_i^{m_i - 1}) : D_i^{m_i - 1} f \in \Lambda(D_1)\}$, $D_i^{m_i} f = D_i(D_i^{m_i - 1} f)$, $i = 1, 2$. Смешанные производные $D_i^{m_i} D_j^{m_j} f$, $m_i, m_j \in \mathbf{N}$, $i, j = 1, 2$; $i + j = 3$, определяются так: $\Lambda(D_i^{m_i} D_j^{m_j}) = \{f \in \Lambda(D_j^{m_j}) : D_j^{m_j} f \in \Lambda(D_i^{m_i})\}$, $D_i^{m_i} D_j^{m_j} f = D_i^{m_i}(D_j^{m_j} f)$. При $m_1 = m_j = 0$ полагаем $\Lambda(D_i^0 D_j^0) = \Lambda(D_i^0) = \Lambda(D_j^0) = L_{2,\lambda,\delta}$, $D_i^0 D_j^0 f = D_i^0 f = D_j^0 f = f$.

Пусть $\omega_i = \alpha_i + \beta_i + 1$, $i = 1, 2$. В доказательстве теорем об аппроксимации существенно используется следующая лемма, которая имеет и самостоятельное значение.

Лемма (о ряде Фурье операторной производной). *Пусть $f \in L_{2,\lambda,\delta}$. Для того чтобы $f \in \Lambda(D_1^{m_1} D_2^{m_2})$, $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}_+$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} k^{2m_1}(k+\omega_1)^{2m_1} l^{2m_2}(l+\omega_2)^{2m_2} c_{kl}^2 < \infty,$$

где c_{kl} — коэффициенты Фурье f в $L_{2,\lambda,\delta}$. При этом $f \in \Lambda(D_2^{m_2} D_1^{m_1})$ и

$$D_1^{m_1} D_2^{m_2} f = D_2^{m_2} D_1^{m_1} f = \sum_{k,l=0}^{\infty} k^{m_1}(k+\omega_1)^{m_1} l^{m_2}(l+\omega_2)^{m_2} c_{kl} \widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1, x_2)$$

(равенство понимается в смысле $L_{2,\lambda,\delta}$).

Наилучшим приближением прямоугольником в пространстве $L_{2,\lambda,\delta}$ называется величина $E_{n_1 n_2}(f) = \min \|f - P_{n_1 n_2}\|$, где минимум берется по всем алгебраическим полиномам вида $P_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sum\limits_{e_{n_1 n_2}} a_{kl} \widehat{\mathrm{L}}_{kl}(x_1, x_2)$. Здесь $e_{n_1 n_2} = \{(k,l) \in Z_+^2 : 0 \le k < n_1,\ 0 \le l < n_2\}$, n_1, n_2 — некоторые натуральные числа.

Наилучшим приближением углом в пространстве $L_{2,\lambda,\delta}$ называется величина $Y_{n_1 n_2}(f) = \min \|f - \widetilde{P}_{n_1 n_2}\|$, где минимум берется по всем выражениям вида $\widetilde{P}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sum\limits_{k=0}^{n_1-1} a_k(x_2) x_1^k + \sum\limits_{l=0}^{n_2-1} b_l(x_1) x_2^l$. Здесь $a_k(x_2)$ и $b_l(x_1)$ интегрируемы в квадрате на $[-1;\,1]$ с весом $\delta(x_2)$ и $\lambda(x_1)$ соответственно. Отметим, что термин "приближение углом" впервые введен М.К. Потаповым в [2].

Структурные свойства функций будем описывать в терминах классов Никольского, определяемых следующим образом. Пусть $r_i = m_i + \sigma_i$, $i = 1, 2$, $m_i \in Z_+$, $\sigma_i \in (0, 1]$. Функция $f \in H^{(r_1, r_2)}$, если выполнены следующие условия:

1) $f \in \Lambda(D_i^{m_i})$, $i = 1, 2$;
2) $\|\Delta_{h_i}^{\xi_i} D_i^{m_i} f\| \le C h_i^{\sigma_i}$ $\forall h_i \in [0, 1/4]$, где $\xi_i = 1$ при $\sigma_i \ne 1$, $\xi_i = 2$ при $\sigma_i = 1$, $i = 1, 2$, а константа C не зависит от h_1 и h_2.

Функция $f \in SH^{(r_1, r_2)}$, если выполнены следующие условия:

1) $f \in \Lambda(D_1^{m_1} D_2^{m_2} f)$;
2) $\|\Delta_{h_1}^{\xi_1} \Delta_{h_2}^{\xi_2} D_1^{m_1} D_2^{m_2} f\| \le C h_1^{\sigma_1} h_2^{\sigma_2}$ $\forall h_1, h_2 \in [0; 1/4]$; здесь ξ_1, ξ_2 такие же, как в определении $H^{(r_1, r_2)}$, а константа C не зависит от h_1 и h_2.

Замечание. Выражения вида $\Delta_{h_i}^{\xi_i} \Delta_{h_{3-i}}^{\xi_{3-i}} D_j^{m_j} D_{3-j}^{m_{3-j}} f$ не зависят от порядка применения операторов обобщенного сдвига и дифференцирования.

Теорема 1. *Функция $f(x_1, x_2) \in H^{(r_1, r_2)}$ тогда и только тогда, когда существует константа M, не зависящая от n_1 и n_2 и такая, что*

$$\forall n_1, n_2 \quad E_{n_1 n_2}(f) \le M(1/n_1^{r_1+m_1} + 1/n_2^{r_2+m_2}).$$

Теорема 2. *Функция $f(x_1, x_2) \in SH^{(r_1, r_2)}$ тогда и только тогда, когда существует константа M, не зависящая от n_1 и n_2 и такая, что*

$$\forall n_1, n_2 \quad Y_{n_1 n_2}(f) \le M/(n_1^{r_1+m_1} n_2^{r_2+m_2}).$$

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на то, что все рассматриваемые обобщенные сдвиги задаются последовательностями коэффициентов, обладающих следующими свойствами:

1°. $\beta_0(h) \equiv 1$;

2°. $\forall k \in \mathbf{N}$ выполнено $\beta_k(0) = 1$;

3°. $\exists A_1$ — константа, не зависящая от k и h, $\forall k \in N$, $\forall h \in (0, 1/4]$ выполнено $|\beta_k(h)| \le A_1$;

4°. $\forall k, h$: при $kh \in (0, 1/2]$ выполнено $|\beta_k(h) - 1| \le A_2 kh$, где константа A_2 не зависит от k и h;

5°. $\exists a$ и A_3 — константы, не зависящие от k и h и такие, что $a \in (0; 1/2)$, $A_3 > 0$, и при $kh \in [a, 2a)$ выполнено $|\beta_k(h) - 1| \geq A_3$.

Эти свойства последовательностей коэффициентов сдвига делают доказательства теорем об аппроксимации относительно стандартными. Отметим, что свойства 1°–5° впервые были выписаны Е.В. Ржавинской в [3].

В случае $\alpha_i = \beta_i > -1/2$, $r_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, теорема о приближении углом получена Б.А. Халиловой в [4], в случае $\alpha_i \geq \beta_i = -1/2$, $r_i \in (0,\,1)$, $i = 1,2$, — Е.В. Ржавинской в [3], а в случае $\alpha_i \geq \beta_i \geq -1/2$, $r_i \in (0,\,1)$, $i = 1,2$, — К.В. Руновским в [5], обобщившим одномерный результат М.К. Потапова [6]. Все эти результаты относятся только к сдвигу (I), который все выше названные авторы задавали через интегральные представления. Отметим, что результаты М.К. Потапова и К.В. Руновского получены в метрике L_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Литература

1. Butzer P.L., Stens R.L., Wehrens R.L. *Higher order of continuity basis on the Jacobi translation and best approximation* // C.R. Math. Ren. Acad. Sci. – Canada, 1980. – V. 2. – P. 83–87.
2. Потапов М.К. *О приближении "углом"* // Proc. Conf. Constr. Theory. – Budapest, 1969. – P. 371–399.
3. Ржавинская Е.В. *О приближении функций двух переменных двумерным углом классических ортогональных полиномов.* – М., 1980. – 43 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 4248-80.
4. Халилова Б.А. *Приближение функций полиномами и их обобщениями*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Баку, 1977. – 119 с.
5. Руновский К.В. *Некоторые вопросы теории приближений*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Москва, 1989. – 150 с.
6. Потапов М.К. *О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1983. – № 4. – С. 43–52.

Московский государственный университет

Поступила 30.06.1998