ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

Посвящается Анатолию Дмитриевичу Ляшко в связи с его семидесятилетием

УДК 519.652

М.Р. ТИМЕРБАЕВ

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

1. *Введение.* Как известно, задача оценивания погрешности схем метода конечных элементов, применяемых для численного решения краевых задач математической физики, сводится к задаче теории аппроксимации об оценке расстояния (в норме энергетического пространства) между решением краевой задачи и пространством конечных элементов. Эту оценку можно получить, построив подходящий для анализа погрешности оператор проектирования в пространство конечных элементов и оценив норму разности между решением краевой задачи и его проекцией. Необходимым условием реализации такой схемы является корректное определение проектора на классе решений с запасом гладкости, определяемым гладкостью входных данных. Так, использование классического оператора интерполирования в пространство конечных элементов требует включения интерполируемой функции в класс C^r r раз непрерывно дифференцируемых функций, где r — максимальный порядок производных, участвующих в определении конечного элемента ([1], с. 62). Это условие даже при использовании лагранжевых конечных элементов ($r=0$) может стать ограничительным по причине недостаточной регулярности аппроксимируемой функции, что имеет место в задачах с сингулярными входными данными, например, с вырождением коэффициентов дифференциального оператора на границе или ее части [2]. Поэтому представляет интерес построение процедур аппроксимации в условиях менее ограничительных, чем для стандартного интерполирования, но по аппроксимативным свойствам не уступающим ему.

Данная работа посвящена построению специального оператора конечноэлементной аппроксимации, определенного на пространстве Лебега L_1, а также получению оценок погрешности этой аппроксимации для функций весовых пространств Соболева. Доказанные в работе оценки неулучшаемы, и в случае вложения аппроксимируемого пространства в пространство непрерывных функций, совпадают с оценками, установленными в работе [3] для лагранжевых n-симплексов с использованием стандартного оператора интерполирования.

Процедура аппроксимации, рассматриваемая в статье, строится с использованием средних значений в общих узлах соседних элементов локальных проекций, т. е. проекций на конечных элементах, и позволяет сочетать различные методы локального проектирования на разных элементах, удовлетворяющие основной весовой оценке погрешности на конечном элементе (теорема 3). В частности, при использовании оператора ортогонального проектирования в L_2 на элементе наш подход близок к процедуре Клемана [4] (см. также [1], с. 147), в которой используются ортогональные проекции на носителях функций канонического базиса пространства конечных элементов.

2. *Основные понятия и обозначения.* Для простоты мы ограничимся изложением результатов для лагранжевых n-симплексов. Пусть m — натуральное число. Лагранжевым конечным элементом типа (m) в R^n, или лагранжевым n-симплексом типа (m) называется пара (K,ω_K), где K есть невырожденный n-симплекс в R^n с вершинами a_i, $i=\overline{1,n+1}$, а

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00260).

$\omega_K = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i = (k-1)/m,\ 1 \le i,k \le n+1 \right\}$ — множество узлов конечного элемента [1]. Когда множество узлов ω_K подразумевается, то будем говорить, что K есть (лагранжевый) элемент типа (m).

Через $P_m(K)$ обозначается множество всех полиномов на K степени m по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если K — конечный элемент типа (m), то всякий полином $\varphi \in P_m(K)$ однозначно определяется своими значениями в узлах ω_K. В частности, соотношениями

$$\varphi_z(x) = \delta_{z,x} \quad \forall z, x \in \omega_K$$

($\delta_{s,t}$ — символ Кронекера абстрактных индексов s, t) определяется базис Лагранжа $\{\varphi_z \in P_m(K) : z \in \omega_K\}$. Оператором интерполяции на элементе K называется линейный оператор $\Pi_K : C(K) \to P_m(K)$, действующий по формуле

$$\Pi_K u(x) = \sum_{z \in \omega_K} u(z) \varphi_z(x).$$

Из определения базиса $\{\varphi_z\}$ следует, что $\Pi_K \varphi = \varphi$ для $\varphi \in P_m(K)$.

Пусть $(\widehat{K}, \widehat{\omega})$ — фиксированный элемент типа (m) (исходный конечный элемент). Любой конечный элемент K типа (m) может быть получен из исходного невырожденным аффинным преобразованием координат $F : t \in \widehat{K} \to x = Bt + b \in K$ ($b \in R^n$, $B \in R^{n \times n}$, $\det B \neq 0$) в том смысле, что $K = F(\widehat{K})$, $F(\widehat{\omega}) = \omega_K$. Преобразование координат F будем трактовать не только как функцию точки, но и как линейный оператор (оператор замены переменных), по соглашению обозначаемый тем же символом, переводящий функции на множестве K в функции, определенные на $\widehat{K}$, по правилу $(Fu)(t) = u(Ft)$, $t \in \widehat{K}$, или $Fu \equiv u \circ F$. Заметим, что оператор замены переменных F будет линейным оператором. В этих обозначениях базисные функции Лагранжа на элементах K и $\widehat{K}$ переходят друг в друга при отображении F: $\widehat{\varphi}_s = F\varphi_z$, где $z = Fs$, $s \in \widehat{\omega}$. Отсюда вытекает связь между операторами локального интерполирования Π_K и $\widehat{\Pi}$ на элементах K и $\widehat{K}$ соответственно: $\Pi_K = F^{-1}\widehat{\Pi}F$.

Всюду далее через Ω обозначается полигональная область в R^n. Пусть $\mathcal{T}_h$ — триангуляция области Ω на лагранжевые конечные элементы типа (m), т.е. разбиение области на элементы типа (m), при котором всякая грань конечного элемента является либо частью границы $\partial\Omega$, либо гранью другого элемента. Множество узлов триангуляции обозначим через ω_h, $\omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \omega_K$. Через X_h обозначим пространство конечных элементов, ассоциированное с триангуляцией $\mathcal{T}_h$ и определяемое как подмножество непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций таких, что сужение каждой из них на любой элемент $K \in \mathcal{T}_h$ принадлежит пространству полиномов $P_m(K)$. Функции из X_h однозначно определяются своими значениями в узлах ω_h [1]. В пространстве X_h имеется канонический базис $\{\varphi_z \in X_h : z \in \omega_h\}$, состоящий из функций с локальными носителями и определяемый соотношениями $\varphi_z(x) = \delta_{z,x}$ $\forall z, x \in \omega_h$. Каждая из функций φ_z совпадает с соответствующей локальной базисной функцией на элементе $K \in \mathcal{T}_h$, $z \in K$, поэтому мы оставляем те же обозначения для локальных (на элементе) и глобальных базисных функций. Оператор X_h-интерполяции $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to X_h$,

$$\Pi_h u(x) = \sum_{z \in \omega_h} u(z) \varphi_z(x),$$

является оператором проектирования на пространство X_h, т.е. $\Pi_h \varphi = \varphi$ для $\varphi \in X_h$, поскольку по определению $(\Pi_h u)|_K = \Pi_K(u|_K)$.

Для $K \in \mathcal{T}_h$ обозначим через $h_K = \operatorname{diam} K$ диаметр элемента и через d_K — диаметр вписанного в K шара, так что $d_K < h_K$. Рассматривая семейство триангуляций $(\mathcal{T}_h)$ с параметром $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \to 0$, будем предполагать выполненным условие регулярности

$$h_K \le \sigma d_K \tag{1}$$

с постоянной $\sigma > 1$, не зависящей от шага конечноэлементной сетки h. Тогда в преобразовании $Ft = Bt + b$ элемента $\widehat{K}$ в K для нормы матрицы B как оператора в евклидовом пространстве R^n имеют место оценки ([1], с. 124)

$$|B| \le \frac{h_K}{\widehat{d}}, \quad |B^{-1}| \le \frac{\sigma \widehat{h}}{h_K} \tag{2}$$

($\widehat{d} = d_{\widehat{K}}$, $\widehat{h} = \operatorname{diam} \widehat{K}$), откуда вытекают оценки для частных производных функций $u(x)$ и $\widehat{u}(t) = Fu(t)$ на элементах K и $\widehat{K}$ в точках $x = Ft$

$$|D_x^i u(x)| \le c h_K^{-|i|} \max_{|j|=|i|} |D_t^j \widehat{u}(t)|, \quad |D_t^i \widehat{u}(t)| \le c h_K^{|i|} \max_{|j|=|i|} |D_x^j u(x)|, \tag{3}$$

где постоянная c зависит только от исходного элемента и порядка дифференцирования.

3. *Теоремы вложения весовых пространств функций.* Для фиксированного замкнутого множества $\Gamma_0 \subset R^n \setminus \Omega$ обозначим $\rho(x) = \operatorname{dist}(\Gamma_0, x) = \min\{|x - y| : y \in \Gamma_0\}$. Стандартную норму пространства Лебега $L_p(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$ функции $u(x)$ на Ω будем обозначать через $|u|_{p,\Omega}$. Для вещественного α весовое пространство Лебега $L_{p,\alpha}(\Omega)$ — это пространство функций с конечной нормой $|\rho^{-\alpha} u|_{p,\Omega}$. Таким образом, если $\alpha \le \beta$, то $L_{p,\beta}(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_{p,\alpha}(\Omega)$. Для целого $k \ge 0$ через $W_{p,\alpha}^k(\Omega)$ обозначим весовое пространство Соболева функций с конечной полунормой

$$|\rho^{-\alpha} \nabla^k u|_{p,\Omega} = \Bigl(\sum_{|i|=k} \int_\Omega |\rho(x)^{-\alpha} D^i u(x)|^p \Bigr)^{1/p}.$$

В качестве нормы этого пространства можно взять норму $u \to |\rho^{-\alpha} \nabla^k u|_{p,\Omega} + |u|_{q,C}$, где $C \subset \Omega$ — любая подобласть, отделенная от Γ_0, а $q \in [1, p]$ любое. Для $p \in (1, \infty)$ пространство $W_{p,\alpha}^k(\Omega)$ рефлексивно.

Приведем некоторые теоремы вложения весовых пространств (напр., [5]–[10]), которые понадобятся при исследовании конечноэлементных аппроксимаций (ниже обозначено $\rho_\Omega = \max\{\rho(x) : x \in \overline{\Omega}\}$, $\tau = \max(0, \beta - \alpha)$, а постоянная c не зависит от Γ_0),

1) если $1 < p \le q < \infty$, $k < m$, $\gamma = m - n/p - k + n/q > 0$, то пространство $W_{p,\beta}^m(\Omega)$ компактно вложено в $W_{q,\alpha}^k(\Omega)$ и

$$|\rho^{-\alpha} \nabla^k u|_{q,\Omega} \le c(\rho_\Omega^\tau |\rho^{-\beta} \nabla^m u|_{p,\Omega} + |\rho^{-\alpha}|_{q,\Omega} |u|_{1,C}), \tag{4}$$

где $\alpha < \beta + \gamma$, $1 \in L_{q,\alpha}(\Omega)$ $(\Leftrightarrow \rho^{-\alpha} \in L_q(\Omega))$;

2) если $S \subset \overline{\Omega}$ — $n-1$-мерное многообразие, $\operatorname{mes}_{n-1}(S \bigcap \Gamma_0) = 0$ и $\gamma = m - 1/p > 0$, то

$$|\rho^{-\alpha} u|_{p,S} \le c(\rho_\Omega^\tau |\rho^{-\beta} \nabla^m u|_{p,\Omega} + |\rho^{-\alpha}|_{p,S} |u|_{1,C}), \tag{5}$$

где $\alpha \le \beta + \gamma$ и $1 \in L_{p,\alpha}(S)$;

3) (весовой аналог леммы Брэмбла-Гильберта) если Z — нормированное пространство, $A : W_{p,\alpha}^k(\Omega) \to Z$ — линейный непрерывный оператор такой, что $P_{k-1}(\Omega) \subset \ker A$, то

$$|Au|_Z \le c|A|\, |\rho^{-\beta} \nabla^k u|_{p,\Omega}. \tag{6}$$

Замечание. Если Γ_0 — многообразие размерности $d < n$, являющееся частью границы области Ω, то условие $1 \in L_{q,\alpha}(\Omega)$ в (4) равносильно неравенству $\alpha q < n - d$.

4. *Вспомогательные утверждения.*

Лемма 1. *Существует такая постоянная $N_0 = N_0(\sigma)$, что для любой точки $a \in R^n$*

$$\operatorname{card}\{K \in \mathcal{T}_h : a \in K\} \le N_0.$$

Лемма 2. *Любое регулярное семейство триангуляций локально равномерно, т. е. существует такая постоянная $c_0 = c_0(\sigma)$, что для любых двух элементов $K, L \in \mathcal{T}_h$ с непустым пересечением справедлива оценка $h_K \le c_0 h_L$.*

Доказательства этих утверждений можно найти, например, в [3].

Обозначим $\rho_K = \max\limits_{x\in K} \rho(x)$ и $r_K = \min\limits_{x\in K} \rho(x)$.

Лемма 3. 1) *Для всех $x, y \in R^n$* $|\rho(x) - \rho(y)| \le |x - y|$; 2) $\rho_K \le r_K + h_K$; 3) $h_K \le 2\sigma\rho_K$.

Доказательство. 1) Для всех $x, y \in R^n$ и произвольного $z \in \Gamma_0$

$$\rho(x) \le |x - z| \le |y - z| + |x - y|,$$

откуда в силу произвольности $z \in \Gamma_0$ вытекает неравенство $\rho(x) \le \rho(y) + |x - y|$. Меняя в рассуждениях x и y местами, получим $|\rho(x) - \rho(y)| \le |x - y|$.

2) По предыдущему, для всех $x, y \in K$ $\rho(x) \le \rho(y) + |x - y| \le \rho(y) + h_K$, откуда получаем $\rho_K \le r_K + h_K$.

3) Пусть x_0 — центр вписанного в K шара диаметра d_K. Тогда $h_K \le \sigma d_K = 2\sigma\,\mathrm{dist}(\partial K, x_0) \le 2\sigma\rho(x_0) \le 2\sigma\rho_K$. $\square$

Пусть $K \in \mathcal{T}_h$, $Ft = Bt + b$ — аффинное преобразование $\widehat{K}$ в K. Положим $\widehat{\Gamma}_0 = F^{-1}(\Gamma_0)$, $\widehat{\rho}(t) = \mathrm{dist}(\widehat{\Gamma}_0, t)$ (т. к. $\Gamma_0 \subset R^n \setminus \Omega$, то $\widehat{\Gamma}_0 \subset R^n \setminus \mathrm{int}(\widehat{K})$). Будем рассматривать пространства функций на $\widehat{K}$ с весовой функцией $\widehat{\rho}(t)$. Подчеркнем, что множество $\widehat{\Gamma}_0$ и функция $\widehat{\rho}(t)$ зависят от K, точнее, от преобразования F. Для двух величин ξ, ζ, зависящих от шага h будем писать $\xi \sim \zeta$, если одна величина в этом соотношении может быть оценена через другую с множителем, не зависящем от h.

Лемма 4. *Справедлива оценка $h_K\widehat{\rho}(t) \sim F\rho(t)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $t \in \widehat{K}$. Пусть $y \in \Gamma_0$ — точка, на которой реализуется $F\rho(t)$. Тогда в силу (2)

$$\widehat{\rho}(t) \le |t - F^{-1}(y)| \le |B^{-1}|\,|Ft - y| \le \frac{c}{h_K} F\rho(t).$$

Аналогично доказывается обратная оценка.

Лемма 5. *Для $u \in W^m_{p,\beta}(K)$ $(m \ge 0)$*

$$h_K^\gamma |\rho^{-\beta}\nabla^m u|_{p,K} \sim |\widehat{\rho}^{-\beta}\nabla^m Fu|_{p,\widehat{K}},$$

где $\gamma = m + \beta - n/p$.

Доказательство. При замене переменных $x = Ft = Bt + b$ элементарные объемы dx и dt связаны соотношением $dx = |\det B| dt = \mathrm{mes}\, K/\,\mathrm{mes}\,\widehat{K} dt \sim h_K^n dt$. Доказательство следует теперь из оценок (3) и предыдущей леммы.

5. *Оператор проектирования на элементе.* Всюду в этом пункте $K \in \mathcal{T}_h$. Для каждого $z \in \omega_K$ существует единственная функция $\psi_{z,K} \in P_m(K)$, удовлетворяющая тождеству $(\psi_{z,K}, \varphi)_K = \varphi(z)$ $\forall\varphi \in P_m(K)$, где $(u, v)_K = \int\limits_K u(x)v(x)dx$ — скалярное произведение в $L_2(K)$. Следовательно, $(\psi_{z,K}, \varphi_\xi)_K = \delta_{z,\xi}$ $\forall z, \xi \in \omega_K$. Определим оператор проектирования I_K в пространство $P_m(K)$ формулой $I_K u(x) = \sum\limits_{z\in\omega_K} (\psi_{z,K}, u)_K \varphi_z(x)$. Функцию $\eta = I_K u \in P_m(K)$ можно определить как решение вариационной задачи: $(u - \eta, \varphi)_K = 0$ $\forall\varphi \in P_m(K)$. По определению $\Pi_K\varphi = I_K\varphi = \varphi$ $\forall\varphi \in P_m(K)$. Этого тождества, как будет видно из дальнейшего, достаточно, чтобы операторы Π_K и I_K обладали одинаковыми аппроксимативными свойствами на гладких функциях. Однако в отличие от оператора интерполяции Π_K, проектор I_K корректно определен на более широком классе $L_1(K)$.

Аналогично на исходном элементе $\widehat{K}$ определим для узлов $s \in \widehat{\omega}$ функции $\widehat{\psi}_s \in P_m(\widehat{K})$: $(\widehat{\psi}_s, \varphi)_{\widehat{K}} = \varphi(s)$ $\forall \varphi \in P_m(\widehat{K})$ и оператор проектирования

$$\widehat{I}u(t) = \sum_{s \in \widehat{\omega}} (\widehat{\psi}_s, u)_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_s(t).$$

Заметим, что оператор $\widehat{I}$ непрерывен как оператор из $L_1(\widehat{K})$ в $L_\infty(\widehat{K})$.

Теорема 1. *Для узлов $s \in \widehat{\omega}$ и $z = Fs$ функции $\widehat{\psi}_s$ и $\psi_{z,K}$ связаны соотношением $\widehat{\psi}_s = \mu(K) F \psi_{z,K}$, где $\mu(K) = \operatorname{mes} K / \operatorname{mes} \widehat{K}$.*

Доказательство. Для произвольных измеримых функций $u(x)$, $v(x)$ на K таких, что $uv \in L_1(K)$, имеем $(u, v)_K = \mu(K)(Fu, Fv)_{\widehat{K}}$. Тогда для любой $\widehat{\varphi} = F\varphi \in P_m(\widehat{K})$

$$(\mu(K) F \psi_{z,K}, \widehat{\varphi})_{\widehat{K}} = \mu(K)(F\psi_{z,K}, F\varphi)_{\widehat{K}} = (\psi_{z,K}, \varphi)_K = \varphi(z) = \widehat{\varphi}(s),$$

следовательно, $\widehat{\psi}_s = \mu(K) F \psi_{z,K}$. □

Из теоремы и первой из оценок (3), примененной к функциям $\varphi_z(x)$ и $\psi_{z,K}(x)$, получаем

Следствие. Для функций $\varphi_z(x)$ и $\psi_{z,K}(x)$ справедливы оценки производных

$$|D^i \varphi_z(x)| \le c h_K^{-|i|}, \quad |D^i \psi_{z,K}(x)| \le c h_K^{-|i|-n},$$

где постоянная c зависит только от исходного элемента и порядка дифференцирования.

Теорема 2. *Имеет место тождество $I_K = F^{-1} \widehat{I} F$.*

Доказательство. По теореме 1 для функции $\widehat{u} = Fu \in L_1(\widehat{K})$ получим

$$\widehat{I}Fu = \sum_{s \in \widehat{\omega}} (\widehat{\psi}_s, Fu)_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_s = \sum_{z \in \omega} \mu(K)(F\psi_z, Fu)_{\widehat{K}} F\varphi_z = \sum_{z \in \omega} (\psi_{z,K}, u)_K F\varphi_z = FI_K u,$$

или $I_K = F^{-1} \widehat{I} F$. □

Следствие. Справедливо равенство

$$|I_K|_{L_p(K) \to L_p(K)} = |\widehat{I}|_{L_p(\widehat{K}) \to L_p(\widehat{K})},$$

следовательно, норма оператора $I_K : L_p(K) \to L_p(K)$ не зависит от K.

Доказательство. По теореме 2 оценим

$$|I_K u|_{p,K} = |F^{-1} \widehat{I} F|_{p,K} \le \mu(K)^{1/p} |\widehat{I} F u|_{L_p(\widehat{K})} \le |\widehat{I}|_{L_p(\widehat{K}) \to L_p(\widehat{K})} |u|_{p,K},$$

откуда $|I_K|_{L_p(K) \to L_p(K)} \le |\widehat{I}|_{L_p(\widehat{K}) \to L_p(\widehat{K})}$. Теми же рассуждениями для $\widehat{I} = F I_K F^{-1}$ устанавливается неравенство $|\widehat{I}|_{L_p(\widehat{K}) \to L_p(\widehat{K})} \le |I_K|_{L_p(K) \to L_p(K)}$. □

6. *Локальная оценка погрешности аппроксимации.* В этом пункте получим оценки разности $u - I_K u$ в различных весовых нормах. Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\gamma \equiv m + 1 - n/p - k + n/q > 0$ (что обеспечивает компактное вложение $W_p^{m+1}(\Omega)$ в $W_q^k(\Omega)$), $\alpha < \beta + \gamma$ и $1 \in L_{q,\alpha}(\Omega)$. Выполнимость данных условий влечет компактность вложения $W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ в $W_{q,\alpha}^k(\Omega)$. Наконец, для корректного определения оператора I_K на классе $W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ будем предполагать, что $W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$.

Теорема 3. *Существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от $K \in \mathcal{T}_h$, что для всех $u \in W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$|\rho^{-\alpha} \nabla^k (u - I_K u)|_{q,K} \le c h_K^\gamma \rho_K^{\beta - \alpha} |\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{p,K},$$

где $\rho_K = \max\{\rho(x) : x \in K\}$.

Доказательство. Для $r_K = \min\{\rho(x) : x \in K\}$ возможны два случая: $r_K > h_K$ и $r_K \le h_K$.

1) Случай $r_K > h_K$. По теореме 2 $I_K = F^{-1}\widehat{I}F$. Так как $\widehat{I}\varphi = \varphi$ для $\varphi \in P_m(\widehat{K})$, то имеет место невесовая оценка ([1], с. 125)

$$|\nabla^k(u - I_K u)|_{q,K} \le c h_K^{\gamma} |\nabla^{m+1} u|_{p,K}.$$

По лемме 3 $\rho_K \le r_K + h_K$. Поэтому $r_K \le \rho_K < 2r_K$, т. е. $\rho_K \sim r_K \sim \rho(x)$, $x \in K$. Отсюда получаем

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_K u)|_{q,K} \le c_1 \rho_K^{-\alpha} |\nabla^k(u - I_K u)|_{q,K} \le c_2 h_K^{\gamma} \rho_K^{-\alpha} |\nabla^{m+1} u|_{p,K} \le c_3 h_K^{\gamma} \rho_K^{\beta-\alpha} |\rho^{-\beta}\nabla^{m+1} u|_{p,K}.$$

2) Случай $r_K \le h_K$. По лемме 3 $h_K \le 2\sigma\rho_K \le 2\sigma(r_K + h_K) \le 4\sigma h_K$, т. е. в этом случае $h_K \sim \rho_K$. По лемме 5

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_K u)|_{q,K} \le c_1 h_K^{-\delta} |\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k(\widehat{u} - \widehat{I}\widehat{u})|_{q,\widehat{K}} = c_1 h_K^{-\delta} |\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k E\widehat{u}|_{q,\widehat{K}}, \tag{7}$$

где обозначено $\widehat{u} = Fu$, $E\widehat{u} = \widehat{u} - \widehat{I}\widehat{u}$, $\delta = k + \alpha - n/q$. Так как $\ker E \supset P_m(\widehat{K})$, то из (6) следует

$$|\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k E\widehat{u}|_{q,\widehat{K}} \le c_2 |E| |\widehat{\rho}^{-\beta}\nabla^{m+1}\widehat{u}|_{p,\widehat{K}} \le c_3 |E| h_K^{\epsilon} |\rho^{-\beta}\nabla^{m+1} u|_{p,K}, \tag{8}$$

где $\epsilon = m+1+\beta-n/p$ и $|E|$ обозначает норму оператора $E : W_{p,\beta}^{m+1}(\widehat{K}) \to W_{q,\alpha}^{k}(\widehat{K})$. Из оценок (7) и (8), а также из эквивалентности $h_K \sim \rho_K$ следует теперь с учетом тождества $\epsilon - \delta = \gamma + \beta - \alpha$ оценка

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_K u)|_{q,K} \le c_4 |E| h_K^{\gamma} \rho_K^{\beta-\alpha} |\rho^{-\beta}\nabla^{m+1} u|_{p,K}.$$

Для завершения доказательства осталось установить, что $|E| \le c$. Поскольку $W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$, то в качестве нормировки пространства $W_{p,\beta}^{m+1}(\widehat{K})$ можно взять норму $\eta \to |\widehat{\rho}^{-\beta}\nabla^{m+1}\eta|_{p,\widehat{K}} + |\eta|_{1,\widehat{K}}$. Далее по лемме 4 $\max\{\widehat{\rho}(t) : t \in \widehat{K}\} \sim \rho_K/h_K \sim 1$, следовательно, по теореме вложения (4)

$$|\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k\eta|_{q,\widehat{K}} \le c_5(|\widehat{\rho}^{-\beta}\nabla^{m+1}\eta|_{p,\widehat{K}} + |\eta|_{1,\widehat{K}}).$$

Очевидно,

$$|\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k\widehat{I}\eta|_{q,\widehat{K}} + |\widehat{I}\eta|_{1,\widehat{K}} \le \sum_{s\in\widehat{\omega}} |(\widehat{\psi}_s, \eta)_{\widehat{K}}| (|\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k\widehat{\varphi}_s|_{q,\widehat{K}} + |\widehat{\varphi}_s|_{1,\widehat{K}}) \le c_6(|\widehat{\rho}^{-\alpha}|_{q,\widehat{K}} + 1)|\eta|_{1,\widehat{K}} \le c_7|\eta|_{1,\widehat{K}}$$

в предположении ограниченности интегралов $|\widehat{\rho}^{-\alpha}|_{q,\widehat{K}}$. Из последних двух оценок окончательно получим

$$|E\eta| = |\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k(\eta - \widehat{I}\eta)|_{q,\widehat{K}} + |\eta - \widehat{I}\eta|_{1,\widehat{K}} \le |\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k\eta|_{q,\widehat{K}} + \\ + |\widehat{\rho}^{-\alpha}\nabla^k\widehat{I}\eta|_{q,\widehat{K}} + |\eta|_{1,\widehat{K}} + |\widehat{I}\eta|_{1,\widehat{K}} \le c_8(|\widehat{\rho}^{-\beta}\nabla^{m+1}\eta|_{p,\widehat{K}} + |\eta|_{1,\widehat{K}}),$$

т. е. $|E| \le c_8$. $\square$

Замечание. При более сильном ограничении $W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ в [3] была доказана аналогичная оценка погрешности интерполяции

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - \Pi_K u)|_{q,K} \le c h_K^{\gamma} \rho_K^{\beta-\alpha} |\rho^{-\beta}\nabla^{m+1} u|_{p,K}.$$

Теорема 4. *Пусть S — одна из граней элемента K. Существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от $K \in \mathcal{T}_h$, что для всех $u \in W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$|\rho^{|\beta|}(u - I_K u)|_{p,S} \le c h_K^{\gamma_0} \rho_K^{\beta+|\beta|} |\rho^{-\beta}\nabla^{m+1} u|_{p,K},$$

где $\gamma_0 = m + 1 - 1/p$.

Доказательство этой оценки проводится с использованием вложения (5) по той же схеме, что доказательство предыдущей теоремы.

Теорема 5. *Пусть S — общая грань ($n-1$-мерная) смежных элементов K и L. Существует такая постоянная $c>0$, что для всех $u \in W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$|I_K u - I_L u|_{\infty,S} \le c h_K^{\gamma_1} \rho_K^{\beta} |\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{p,K\cup L},$$

где $\gamma_1 = m+1-n/p$.

Доказательство. По лемме 2 $h_K \sim h_L$. Так как S является общей гранью двух элементов, то по лемме 3 $\rho_S \sim \rho_K \sim \rho_L$. Рассмотрим два случая: 1) $r_S = \min\{\rho(x) : x \in S\} \le \min(h_K, h_L)$ и 2) $r_S > \min(h_K, h_L)$.

1) $r_S \le \min(h_K, h_L)$. Тогда $\rho_S \sim h_K$. Поскольку $\eta = I_K u - I_L u \in P_m(S)$ (в локальных координатах грани S), то в силу конечномерности $P_m(S)$

$$|\eta|_{\infty,S} = |F\eta|_{\infty,\widehat{S}} \sim |\widehat{\rho}^{|\beta|} F\eta|_{p,\widehat{S}} \sim h_K^{1/p-n/p} h_K^{-|\beta|} |\rho^{|\beta|}\eta|_{p,S} \sim h_K^{1/p-n/p} \rho_K^{-|\beta|} |\rho^{|\beta|}\eta|_{p,S}.$$

2) $r_S > h_K$. Тогда $r_S \sim \rho_K$ и для $\eta \in P_m(S)$ имеем оценки

$$|\eta|_{\infty,S} \sim h_K^{1/p-n/p} |\eta|_{p,S} \sim h_K^{1/p-n/p} r_S^{-|\beta|} |\rho^{|\beta|}\eta|_{p,S} \sim h_K^{1/p-n/p} \rho_K^{-|\beta|} |\rho^{|\beta|}\eta|_{p,S}.$$

Таким образом, для $\eta = I_K u - I_L u$ получим с использованием теоремы 4

$$|\eta|_{\infty,S} \le c_1 h_K^{1/p-n/p} \rho_K^{-|\beta|} |\rho^{|\beta|}\eta|_{p,S} \le c_1 h_K^{1/p-n/p} \rho_K^{-|\beta|} (|\rho^{|\beta|}(u - I_K u)|_{p,S} + \\ + |\rho^{|\beta|}(u - I_L u)|_{p,S}) \le c_2 h_K^{\gamma_1} \rho_K^{\beta} |\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{p,K\cup L},$$

где $\gamma_1 = m+1-n/p$. $\square$

Пусть $\varkappa \ge 1$ — некоторое число. Будем говорить, что семейство триангуляций $(\mathcal{T}_h)_h$ сгущается вблизи Γ_0 со степенью сгущения $\varkappa$, если $h_K \sim h\rho_K^{1-1/\varkappa}$, где $h = \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$. Эта оценка означает, что вблизи множества особых точек Γ_0 линейные размеры конечных элементов должны быть существенно меньше шага сетки h. Именно, для элементов $h_K \sim \rho_K$ будем иметь $h_K \sim h^{\varkappa}$. В случае $\varkappa = 1$ будем иметь квазиравномерное семейство триангуляций.

Теорема 6. *Если семейство триангуляций $(\mathcal{T}_h)$ сгущается вблизи Γ_0 со степенью сгущения $\varkappa \ge 1$, то существует такая постоянная $c>0$, не зависящая от $K \in \mathcal{T}_h$, что для всех $u \in W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$|\rho^{-\alpha} \nabla^k (u - I_K u)|_{q,K} \le c h^{\theta} |\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{p,K},$$

где $\theta = \min(\gamma, \varkappa(\gamma+\beta-\alpha))$.

Доказательство. Если $r_K \le h_K$, то оценка немедленно следует из теоремы 3 и эквивалентности $h_K \sim \rho_K$. Пусть $r_K > h_K$. Тогда $h_K^{\gamma} \rho_K^{\beta-\alpha} \le c_1 h^{\gamma} \rho_K^{\tau}$, где $\tau = \gamma(1-1/\varkappa) + \beta - \alpha$. Если $\tau \ge 0$, то $h^{\gamma}\rho_K^{\tau} \le h^{\gamma}\rho_{\Omega}^{\tau}$ и устанавливаемая оценка имеет место. Если $\tau < 0$, то по лемме 3 $h^{\gamma}\rho_K^{\tau} \le c_3 h^{\gamma} h^{\varkappa\tau} = c_3 h^{\varkappa(\gamma+\beta-\alpha)}$. Итак, во всяком случае $h_K^{\gamma}\rho_K^{\beta-\alpha} \le c h^{\theta}$. $\square$

7. *Аппроксимация конечными элементами.* Для узла конечноэлементной сетки $z \in \omega_h$ обозначим $\mathcal{T}_h(z) = \{K \in \mathcal{T}_h : z \in K\}$, $n_h(z) = \operatorname{card} \mathcal{T}_h(z)$ и линейный функционал на $L_1(\Omega)$

$$l_{h,z}(u) = \frac{1}{n_h(z)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h(z)} I_K u(z).$$

Определим оператор проектирования I_h из $L_1(\Omega)$ в X_h формулой

$$I_h u(x) = \sum_{z \in \omega_h} l_{h,z}(u) \varphi_z(x).$$

Таким образом, значение функции $\varphi = I_h u$ в каждом узле сетки $z \in \omega_h$ есть среднее арифметическое значений $I_K u(z)$ локальных проекций на элементах K, содержащих узел z. Если $\varphi \in X_h$, то по свойству локальных операторов проектирования $I_K \varphi = \varphi$ на K; поэтому для

$K \in \mathcal{T}_h(z)$ $I_K\varphi(z) = \varphi(z)$. Следовательно, $I_h\varphi = \Pi_h\varphi = \varphi$, и оператор I_h является проектором на пространство X_h.

Лемма 6. *Для $K \in \mathcal{T}_h(z)$ справедлива оценка*

$$|l_{h,z}(u) - I_K u(z)| \leq c h_K^{\gamma_1} \rho_K^{\beta} |\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,R(z)},$$

где $\gamma_1 = m + 1 - n/p$, $R(z) = \bigcup\{L \in \mathcal{T}_h(z)\}$.

Доказательство. Для смежных элементов $K, L \in \mathcal{T}_h(z)$ по теореме 5

$$|I_K u(z) - I_L u(z)| \leq |I_K u - I_L u|_{\infty, K\cap L} \leq c_1 h_K^{\gamma_1}\rho_K^{\beta}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,K\cup L}.$$

Для произвольных $K, L \in \mathcal{T}_h(z)$ существует такая цепочка конечных элементов $K = K_0, K_1, \ldots$ $K_r = L$ из $\mathcal{T}_h(z)$, что K_i и K_{i-1} смежны. Так что

$$|I_K u(z) - I_L u(z)| \leq \sum_{i=1}^{r} |I_{K_{i-1}} u(z) - I_{K_i} u(z)| \leq c_2 h_K^{\gamma_1}\rho_K^{\beta}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,R(z)},$$

поскольку $n_h(z) \leq c$. $\square$

Далее относительно степени α весовой функции предполагается, что $\alpha < \beta + \gamma$ для $\gamma = m + 1 - k$, $1 \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ и $|\rho^{-\alpha}|_{p,K} \sim h_K^{n/p}\rho_K^{-\alpha}$. Последняя оценка автоматически выполняется в каждом из следующих случаях: 1) $\alpha \leq 0$; 2) для K с $r_K \sim \rho_K$; 3) если Γ_0 многообразие размерности d и $\alpha p < n - d$.

Теорема 7. *Имеет место оценка*

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_h u)|_{p,K} \leq c h_K^{\gamma}\rho_K^{\beta-\alpha}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,R(K)},$$

где $R(K) = \bigcup\{L \in \mathcal{T}_h : K \bigcap L \neq \emptyset\}$.

Доказательство. По теореме 3

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_h u)|_{p,K} \leq |\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_K u)|_{p,K} + |\rho^{-\alpha}\nabla^k(I_h u - I_K u)|_{p,K} \leq$$
$$\leq c_1 h_K^{\gamma}\rho_K^{\beta-\alpha}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,K} + |\rho^{-\alpha}\nabla^k(I_h u - I_K u)|_{p,K}.$$

Для оценки последнего слагаемого запишем в точках $x \in K$

$$I_h u(x) - I_K u(x) = \sum_{z\in\omega_K} (l_{h,z}(u) - I_K u(z))\varphi_z(x),$$

откуда из предыдущей леммы, а также из следствия теоремы 1 получим

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(I_h u - I_K u)|_{p,K} \leq c_2 h_K^{\gamma_1}\rho_K^{\beta}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,R(K)} h_K^{-k}|\rho^{-\alpha}|_{p,K} \leq c_3 h_K^{\gamma}\rho_K^{\beta-\alpha}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,R(K)}. \quad \square$$

Основной результат статьи содержится в следующей оценке.

Теорема 8. *Для сгущающегося к Γ_0 со степенью $\varkappa \geq 1$ семейства триангуляций $(\mathcal{T}_h)$ справедлива оценка погрешности аппроксимации*

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_h u)|_{p,\Omega} \leq c h^{\theta}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,\Omega},$$

где $\theta = \min(m + 1 - k, \varkappa(m + 1 - k + \beta - \alpha))$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы теми же рассуждениями, что и при выводе оценок теоремы 6, получим

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k(u - I_h u)|_{p,K} \leq c h^{\theta}|\rho^{-\beta}\nabla^{m+1}u|_{p,R(K)}. \tag{9}$$

Доказываемая оценка теперь вытекает суммированием по $K \in \mathcal{T}_h$ оценок (9) с учетом того, что (лемма 1) $\operatorname{card}\{L \in \mathcal{T}_h : L \bigcap K \neq \emptyset\} \leq c$. $\square$

8. *Заключительные замечания.*

1. Аппроксимационный оператор I_h строится по локальным проекциям I_K на элементах. Из проведенного анализа погрешности $u - I_h u$ следует, что в качестве локальных проекторов могут быть взяты любые проекторы в пространство полиномов на элементе, удовлетворяющие основной локальной оценке в теореме 3.

2. Аналогичные построения и анализ могут быть проведены для конечных элементов со степенями свободы не только лагранжевого типа, но и использующих, например, производные по направлениям.

3. Результаты работы стандартной техникой распространяются на случай конечных элементов, получаемых из исходного преобразованиями координат более общего вида, чем аффинные, с естественными требованиями обратимости и гладкости прямого и обратного преобразований.

Автор благодарит профессора А.Д. Ляшко за внимание к работе.

Литература

1. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.
2. Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.* – М.: Наука, 1966. – 292 с.
3. Тимербаев М.Р. *Оценки погрешности n-мерной сплайн-интерполяции в весовых нормах* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 54–60.
4. Clement P. *Approximation by finite element functions using local regularization* // Rev. franc. automat. inform., rech. oper. R., Ser. Rouge Anal. Numer. R-2. – 1975. – № 9. – P. 77–84.
5. Kufner A. *Einige Eigenschaften der Sobolewschen Raume mit Belengsfunctionen* // Czechosl. Math. J. – 1965. – P. 597–620.
6. Avantaggiati A. *Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni* // Boll. U.M.I. – 1976. – V. 13A. – № 1. – P. 1–52.
7. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
8. Трибель Х. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
9. Фохт А.С. *Весовые теоремы вложения и оценки решений уравнений эллиптического типа.* I // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 8. – С. 1440–1449.
10. Тимербаев М.Р. *Теоремы вложения весовых пространств Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 9. – С. 56–60.

Казанский государственный университет

Поступила
03.03.2000