ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

УДК 517.968

*А.М. ДЕНИСОВ, А. ЛОРЕНЦИ*

# О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО РОДА

Работа посвящена исследованию одного нелинейного интегрального уравнения первого рода. Хорошо известно, что к интегральным уравнениям первого рода сводятся многие обратные задачи для дифференциальных уравнений (напр., [1], [2]). При исследовании обратных коэффициентных задач для нелинейных дифференциальных уравнений возникают интегральные уравнения первого рода относительно неизвестной функции, аргументом которой является заданная функция двух переменных [3]. Линейные интегральные уравнения такого типа были изучены в [4]. В данной работе доказывается существование и единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода, в котором аргумент неизвестной функции представляет собой заданную функцию двух переменных.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$\int_0^l K(x,t,\varphi(u(x,t)))\,\mathrm{d}x = f(t), \qquad t\in[0,T], \tag{1}$$

где функции $K(x,t,s)$, $u(x,t)$ заданы, а $\varphi(z)$ неизвестна.

Предположим, что

$$u,\, u_x,\, u_t,\, u_{xt},\, u_{xx} \in C([0,l]\times[0,T]), \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\;\; u_{xt}(x,0)>0, \quad x\in[0,l], \tag{3}$$

$$u_x(x,t)>0,\;\; u_t(x,t)\ge \mathrm{const}>0, \quad x\in[0,l],\;\; t\in(0,T], \tag{4}$$

и функция $u_{xx}(x,t)[u_x(x,t)]^{-1}$ может быть продолжена так, что

$$u_{xx}(x,t)[u_x(x,t)]^{-1}\in C([0,l]\times[0,T]). \tag{5}$$

Далее предполагаем, что

$$f\in C^1([0,T]), \tag{6}$$

а функция $K(x,t,s)$ удовлетворяет следующим условиям для любых $x\in[0,l]$, $t\in[0,T]$, $s_1,s_2\in \mathbf{R}$:

$$K,\, K_x,\, K_t \in C([0,l]\times[0,T]\times\mathbf{R}), \tag{7}$$

$$|K(x,t,s_1)-K(x,t,s_2)|\le k_1(x,t)|s_1-s_2|, \tag{8}$$

$$|K_x(x,t,s_1)-K_x(x,t,s_2)|\le k_2(x,t)|s_1-s_2|, \tag{9}$$

$$|K_t(x,t,s_1)-K_t(x,t,s_2)|\le k_3(x,t)|s_1-s_2|, \tag{10}$$

где $k_i\in C([0,l]\times[0,T])$ $(i=1,2,3)$. Кроме того, уравнение

$$\int_0^l K(x,0,s)\,\mathrm{d}x = f(0) \tag{11}$$

имеет решение $s_0\in\mathbf{R}$.

---

Работа выполнена при частичной поддержке Итальянского министерства научных и технологических исследований и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-15-96181).

**Замечание.** Из уравнения (1) следует, что значение $\varphi(0)$ любого непрерывного решения этого уравнения удовлетворяет условию

$$\int_0^l K(x,0,\varphi(0))\,\mathrm{d}x = f(0). \tag{12}$$

Из условия (4) следует, что для любого $t \in (0,T]$ существует функция $y(z,t)$, обратная к $u(x,t)$, т. е. $y(u(x,t),t) = x$. Сделав замену переменной $z = u(x,t)$ в интегральном уравнении (1), получим

$$\int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K(y(z,t),t,\varphi(z))[u_x(y(z,t),t)]^{-1}\,\mathrm{d}z = f(t), \quad t \in (0,T]. \tag{13}$$

Важно отметить, что функция $(u_x(y(z,t),t))^{-1}$ имеет особенность при $t = 0$. Линейные интегральные уравнения первого рода с двумя переменными пределами интегрирования и ядром регулярным при $t = 0$ изучались в [5], [6].

Докажем теорему существования и единственности решения уравнения (1) для достаточно малых значений $t$. Введем функции

$$\alpha(x,t) = u_t(x,t)u_x(l,t)[u_t(l,t)u_x(x,t)]^{-1}, \tag{14}$$

$$\beta(x,t) = \frac{u_{xt}(l,t)}{u_t(l,t)} + \frac{u_x(l,t)}{u_x(x,t)}\left[\frac{u_{xx}(x,t)u_t(x,t)}{u_t(l,t)u_x(x,t)} - \frac{u_{xt}(x,t)}{u_t(l,t)}\right]. \tag{15}$$

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (2)–(11). *Предположим, что функция* $K(l,t,s)$ *для любого* $t \in [0,T]$ *имеет обратную функцию* $G(t,z)$ (*т. е.* $G(t,K(l,t,s)) = s$) *такую, что* $G \in C([0,T] \times \mathbf{R})$,

$$|G(t,z_1) - G(t,z_2)| \le g(t)|z_1 - z_2| \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{R}, \tag{16}$$

*где* $g \in C([0,T])$, *и*

$$q = g(0)\left[k_1(0,0)\alpha(0,0) + \int_0^l (k_2(x,0)\alpha(x,0) + k_1(x,0)|\beta(x,0)|)\,\mathrm{d}x\right] < 1. \tag{17}$$

*Тогда существует* $T_0 \in (0,T]$ *такое, что уравнение* (1) *имеет для* $t \in [0,T_0]$ *единственное решение* $\varphi \in C([0,u(l,T_0)])$.

**Доказательство.** Пусть уравнение (1) имеет решение такое, что $\varphi \in C([0,u(l,T)])$. Тогда для $t \in (0,T]$ функция $\varphi$ является решением уравнения (13). Умножив (13) на $u_x(l,t)$, получим

$$\int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K(y(z,t),t,\varphi(z))u_x(l,t)[u_x(y(z,t),t)]^{-1}\,\mathrm{d}z = f(t)u_x(l,t), \quad t \in (0,T]. \tag{18}$$

Дифференцируя (18), получим следующее интегро-функциональное уравнение:

$$K(l,t,\varphi(u(l,t)))u_t(l,t) - K(0,t,\varphi(u(0,t)))u_x(l,t)u_t(0,t)[u_x(0,t)]^{-1} -$$

$$
-\int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K_x(y(z,t),t,\varphi(z))u_x(l,t)u_t(y(z,t),t)[u_x(y(z,t),t)]^{-2}\,\mathrm{d}z +
$$
$$
+\int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K_t(y(z,t),t,\varphi(z))u_x(l,t)[u_x(y(z,t),t)]^{-1}\,\mathrm{d}z +
$$
$$
+\int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K(y(z,t),t,\varphi(z))u_{xt}(l,t)[u_x(y(z,t),t)]^{-1}\,\mathrm{d}z +
$$
$$
+\int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K(y(z,t),t,\varphi(z))\frac{u_x(l,t)}{[u_x(y(z,t),t)]^2}\times
$$
$$
\times\left[\frac{u_{xx}(y(z,t),t)u_t(y(z,t),t)}{u_x(y(z,t),t)} - u_{xt}(y(z,t),t)\right]\mathrm{d}z = f'(t)u_x(l,t) + f(t)u_{xt}(l,t). \quad (19)
$$

Любое решение уравнения (19) такое, что $\varphi \in C([0,u(l,T)])$, удовлетворяет уравнению (18), в котором правая часть заменена на $f(t)u_x(l,t)+c$, где $c$ — некоторая постоянная. Сделав в интеграле обратную замену переменных $z = u(x,t)$, получим уравнение

$$
\int_0^l K(x,t,\varphi(u(x,t)))\,\mathrm{d}x - f(t) = c[u_x(l,t)]^{-1}, \quad t \in (0,T]. \quad (20)
$$

Переходя в (20) к пределу при $t \to 0+$ и учитывая условие (3), получим $c = 0$. Следовательно, функция $\varphi$ является решением уравнений (18) и (1). Таким образом, уравнения (1) и (19) эквивалентны.

Сделав в интегралах, входящих в левую часть (19), замену переменной $z = u(x,t)$, поделив обе части этого уравнения на $u_t(l,t)$ и использовав обозначения (14),(15), получим интегро-функциональное уравнение, эквивалентное (19)

$$
K(l,t,\varphi(u(l,t))) - K(0,t,\varphi(u(0,t)))\alpha(0,t) - \int_0^l K_x(x,t,\varphi(u(x,t)))\alpha(x,t)\,\mathrm{d}x +
$$
$$
+\int_0^l K_t(x,t,\varphi(u(x,t)))u_x(l,t)[u_t(l,t)]^{-1}\,\mathrm{d}x +
$$
$$
+\int_0^l K(x,t,\varphi(u(x,t)))\beta(x,t)\,\mathrm{d}x = F(t), \quad t \in (0,T], \quad (21)
$$

где

$$
F(t) = [f'(t)u_x(l,t) + f(t)u_{xt}(l,t)][u_t(l,t)]^{-1}. \quad (22)
$$

Введя новую переменную $\tau = u(l,t)$, можем переписать (21) следующим образом:

$$
K(l,\gamma(\tau),\varphi(\tau)) = K(0,\gamma(\tau),\varphi(u(0,\gamma(\tau))))\alpha(0,\gamma(\tau)) +
$$
$$
+\int_0^l K_x(x,\gamma(\tau),\varphi(u(x,\gamma(\tau))))\alpha(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x -
$$
$$
-\int_0^l K_t(x,\gamma(\tau),\varphi(u(x,\gamma(\tau))))u_x(l,\gamma(\tau))[u_t(l,\gamma(\tau))]^{-1}\,\mathrm{d}x -
$$
$$
-\int_0^l K(x,\gamma(\tau),\varphi(u(x,\gamma(\tau))))\beta(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x + F(\gamma(\tau)), \quad \tau \in (0,u(l,T)], \quad (23)
$$

где $\gamma(\tau)$ — функция, обратная к функции $u(l,t)$.

Определим в пространстве $C([0, u(l,T)])$ нелинейный оператор $A$ следующим образом:

$$A\varphi = G\Big(\gamma(\tau), K(0, \gamma(\tau), \varphi(u(0,\gamma(\tau))))\alpha(0,\gamma(\tau)) + \\ + \int_0^l K_x(x,\gamma(\tau),\varphi(u(x,\gamma(\tau))))\alpha(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x - \\ - \int_0^l K_t(x,\gamma(\tau),\varphi(u(x,\gamma(\tau))))u_x(l,\gamma(\tau))[u_t(l,\gamma(\tau))]^{-1}\,\mathrm{d}x - \\ - \int_0^l K(x,\gamma(\tau),\varphi(u(x,\gamma(\tau))))\beta(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x + F(\gamma(\tau))\Big), \quad \tau \in [0, u(l,T)]. \quad (24)$$

Пусть постоянная $T_0 \in (0,T]$.Рассмотрим в пространстве $C([0,u(l,T_0)])$ нелинейное операторное уравнение

$$\varphi = A\varphi. \quad (25)$$

Из условий (2)–(7) и непрерывности функции $G$ следует, что оператор $A$ отображает $C([0,u(l,T_0)])$ в себя. Докажем теперь, что оператор $A$ является сжимающим при достаточно малом $T_0$. Для любой пары функций $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0,u(l,T_0)])$, используя (8)–(10), (16), (24), имеем оценку

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_{C([0,u(l,T_0)])} \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0,u(l,T_0)])} \max_{t\in[0,T_0]} \Big\{ g(t)\Big[k_1(0,t)\alpha(0,t) + \\ + \int_0^l \{k_2(x,t)\alpha(x,t) + k_3(x,t)u_x(l,t)(u_t(l,t))^{-1} + k_1(x,t)|\beta(x,t)|\}\,\mathrm{d}x\Big]\Big\}. \quad (26)$$

Учитывая непрерывность функций $g$, $k_i$ $(i = 1,2,3)$, $\alpha$, $\beta$, условие (17) и оценку (26), получим, что существует $T_0 \in (0,T]$ такое, что оператор $A$ является сжимающим в $C([0,u(l,T_0)])$. Следовательно, уравнение (25) имеет единственное решение в этом пространстве. Так как уравнения (25) и (23) эквивалентны, то уравнение (23) имеет единственное решение в $C([0,u(l,T_0)])$. Таким образом, уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi \in C([0,u(l,T_0)])$ для $t \in [0,T_0]$. $\square$

Перейдем к доказательству существования и единственности решения уравнения (1) на всем отрезке $[0,T]$.

**Теорема 2.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то существует единственная функция* $\varphi \in C([0,u(l,T)])$, *являющаяся решением уравнения* (1) *при* $t \in [0,T]$.

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует существование и единственность функции $\varphi_0 \in C([0,u(l,T_0)])$, являющейся решением уравнения (1) при $t \in [0,T_0]$.

Рассмотрим уравнение (1) при $t \in [T_0,T]$. На этом отрезке уравнение (1) эквивалентно уравнению (19). Используя обозначения (14), (15) и (22), можно переписать (19) в виде

$$K(l,t,\varphi(u(l,t))) - K(0,t,\varphi(u(0,t)))\alpha(0,t) - \\ - \int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K_x(y(z,t),t,\varphi(z))\alpha(y(z,t),t)[u_x(y(z,t),t)]^{-1}\,\mathrm{d}z + \\ + \int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K_t(y(z,t),t,\varphi(z))u_x(l,t)[u_x(y(z,t),t)u_t(l,t)]^{-1}\,\mathrm{d}z + \\ + \int_{u(0,t)}^{u(l,t)} K(y(z,t),t,\varphi(z))\beta(y(z,t),t)[u_x(y(z,t),t)]^{-1}\,\mathrm{d}z = F(t), \quad t \in [T_0,T]. \quad (27)$$

Введем функцию

$$B(t,z,s)=K_x(y(z,t),t,s)\frac{\alpha(y(z,t),t)}{u_x(y(x,t),t)}-\\ -K_t(y(z,t),t,s)\frac{u_x(l,t)}{u_x(y(z,t),t)u_t(l,t)}-K(y(z,t),t,s)\frac{\beta(y(z,t),t)}{u_x(y(z,t),t)}. \quad (28)$$

Используя (28) и функцию $\gamma(\tau)$, обратную к функции $u(l,t)$, запишем (27) следующим образом:

$$K(l,\gamma(\tau),\varphi(\tau))=K(0,\gamma(\tau),\varphi(u(0,\gamma(\tau))))\alpha(0,\gamma(\tau))+\\ +\int\limits_{u(0,\gamma(\tau))}^{\tau}B(\gamma(\tau),z,\varphi(z))\,\mathrm{d}z+F(\gamma(\tau)),\quad \tau\in[u(l,T_0),u(l,T)]. \quad (29)$$

Рассмотрим уравнение (29) для $\tau\in[u(l,T_0),\tau_1]$, где $\tau_1$ — корень уравнения $u(0,\gamma(\tau))=u(l,T_0)$, если $u(0,\gamma(u(l,T)))>u(l,T_0)$ и $\tau_1=u(l,T)$, если $u(0,\gamma(u(l,T)))\le u(l,T_0)$. Так как функция $\varphi$ известна на отрезке $[0,u(l,T_0)]$, то из (29) получим уравнение

$$K(l,\gamma(\tau),\varphi(\tau))=\int\limits_{u(l,T_0)}^{\tau}B(\gamma(\tau),z,\varphi(z))\,\mathrm{d}z+F_1(\tau),\quad \tau\in[u(l,T_0),\tau_1], \quad (30)$$

где известная функция $F_1$ определяется формулой

$$F_1(\tau)=F(\gamma(\tau))+K(0,\gamma(\tau),\varphi_0(u(0,\gamma(\tau))))\alpha(0,\gamma(\tau))+\int\limits_{u(0,\gamma(\tau))}^{u(l,T_0)}B(\gamma(\tau),z,\varphi_0(z))\,\mathrm{d}z. \quad (31)$$

Используя функцию $G(t,z)$, обратную к функции $K(l,t,s)$, можем преобразовать уравнение (30) следующим образом:

$$\varphi(\tau)=G\Big(\gamma(\tau),\int\limits_{u(l,T_0)}^{\tau}B(\gamma(\tau),z,\varphi(z))\,\mathrm{d}z+F_1(\tau)\Big),\quad \tau\in[u(l,T_0),\tau_1]. \quad (32)$$

Учитывая условие (16) и применяя принцип сжимающих отображений, убедимся, что уравнение (32) имеет единственное решение $\varphi_1\in C([u(l,T_0),\tau_1])$.

Определим функцию

$$\varphi_2(\tau)=\begin{cases}\varphi_0(\tau), & \tau\in[0,u(l,T_0)];\\ \varphi_1(\tau), & \tau\in[u(l,T_0),\tau_1].\end{cases} \quad (33)$$

Из (29)–(33) следует, что эта функция принадлежит $C([0,\tau_1])$ и является решением уравнения (29) для $\tau\in(0,\tau_1]$.

Пусть число $\tau_2$ является корнем уравнения $u(0,\gamma(\tau))=\tau_1$, если $u(0,\gamma(u(l,T)))>\tau_1$, и $\tau_2=u(l,T)$, если $u(0,\gamma(u(l,T)))\le\tau_1$. Повторяя предыдущую процедуру, можем доказать, что уравнение (29) имеет единственное решение, непрерывное на отрезке $[0,\tau_2]$. Следовательно, повторив подобную процедуру конечное число раз, докажем, что существует единственная функция $\varphi\in C([0,u(l,T)])$, являющаяся решением уравнения (1) при $[0,T]$. $\square$

Пусть условие (17) теоремы 1 не выполнено. Рассмотрим другое условие разрешимости уравнения (1). Введем функции

$$\alpha_1(x,t)=\alpha(x,t)\frac{u_t(x,t)}{u_t(l,t)},\qquad \beta_1(x,t)=\beta(x,t)\frac{u_t(x,t)}{u_t(l,t)}.$$

**Теорема 3.** *Пусть все условия теоремы 1, за исключением (17), выполнены. Пусть, кроме того,*

$$K(x,t,s) = Q(x,t,s)s, \qquad G(t,z) = G_1(t,z)z, \qquad f(t) = f_1(t)t, \tag{34}$$

*где функции $Q$, $G_1$, $f_1$ таковы, что*

$$Q,\ Q_x,\ Q_t \in C([0,l]\times[0,T]\times\mathbf{R}), \quad G_1 \in C([0,T]\times\mathbf{R}), \quad f_1 \in C^1[0,T].$$

*Если*

$$q_1 = g(0)\left[k_1(0,0)\alpha_1(0,0) + \int_0^l [k_2(x,0)\alpha_1(x,0) + k_1(x,0)|\beta_1(x,0)|]\,\mathrm{d}x\right] < 1, \tag{35}$$

*то уравнение (1) имеет единственное решение, представимое в виде $\varphi(z) = \psi(z)z$, где $\psi \in C([0,u(l,T)])$.*

**Доказательство.** Определим в пространстве $C([0,u(l,T)])$ нелинейный оператор $D$ по следующей формуле:

$$\begin{aligned} D\psi(\tau) = \tau^{-1}G\Big(&\gamma(\tau), K(0,\gamma(\tau),\psi(u(0,\gamma(\tau)))u(0,\gamma(\tau)))\alpha(0,\gamma(\tau)) + \\ &+ \int_0^l K_x\Big(x,\gamma(\tau),\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau))\Big)\alpha(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_0^l K_t\Big(x,\gamma(\tau),\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau))\Big)u_x(l,\gamma(\tau))[u_t(l,\gamma(\tau))]^{-1}\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_0^l K\Big(x,\gamma(\tau),\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau))\Big)\beta(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x + F(\gamma(\tau))\Big), \quad \tau \in [0,u(l,T)]. \end{aligned} \tag{36}$$

Функция $D\psi$ принадлежит $C((0,u(l,T)])$ для любой $\psi \in C([0,u(l,T)])$. Используя условия (34), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to 0}(D\psi)(\tau) = G_1\Big(&0, K(0,0,0)\alpha(0,0) + \int_0^l K_x(x,0,0)\alpha(x,0)\,\mathrm{d}x - \int_0^l K(x,0,0)\beta(x,0)\,\mathrm{d}x\Big) \times \\ &\times \lim_{\tau\to 0}\tau^{-1}\Big[Q(0,\gamma(\tau),\psi(u(0,\gamma(\tau)))u(0,\gamma(\tau)))\psi(u(0,\gamma(\tau)))u(0,\gamma(\tau))\alpha(0,\gamma(\tau)) + \\ &+ \int_0^l Q_x(x,\gamma(\tau),\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau)))\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau))\alpha(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_0^l Q(x,\gamma(\tau),\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau)))\psi(u(x,\gamma(\tau)))u(x,\gamma(\tau))\beta(x,\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x + F(\gamma(\tau))\Big] = \\ &= G_1\Big(0, K(0,0,0)\alpha(0,0) + \int_0^l K_x(x,0,0)\alpha(x,0)\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_0^l K(x,0,0)\beta(x,0)\,\mathrm{d}x\Big)\Big[Q(0,0,0)\psi(0)\alpha_1(0,0) + \int_0^l Q_x(x,0,0)\psi(0)\alpha_1(x,0)\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_0^l Q(x,0,0)\psi(0)\beta_1(x,0)\,\mathrm{d}x + 2f_1(0)u_{xt}(l,0)(u_t(l,0))^{-2}\Big]. \end{aligned}$$

Следовательно, $D\psi \in C([0,u(l,T)])$ для любой $\psi \in C([0,u(l,T)])$.

Рассмотрим в пространстве $C([0,u(l,T_0)])$ нелинейное операторное уравнение

$$\psi = D\psi, \tag{37}$$

где $T_0 \in (0,T]$. Из (8)–(10), (16), (36) следует, что

$$\|D\psi_1 - D\psi_2\|_{C([0,u(l,T_0)])} \le \|\psi_1 - \psi_2\|_{C([0,u(l,T_0)])} \max_{t\in[0,T_0]} \Big\{ g(t) \Big[ k_1(0,t)\alpha(0,t)\frac{u(0,t)}{u(l,t)} +$$
$$+ \int_0^l (k_2(x,t)\alpha(x,t) + k_3(x,t)u_x(l,t)(u_t(l,t))^{-1} + k_1(x,t)|\beta(x,t)|)\frac{u(x,t)}{u(l,t)}\,\mathrm{d}x \Big] \Big\}. \quad (38)$$

Учитывая непрерывность функций $g$, $k_i$ $(i = 1,2,3)$, $\alpha_1$, $\beta_1$ и неравенства (35), (38), убеждаемся, что существует $T_0 \in (0,T]$ такое, что оператор $D$ является сжимающим в пространстве $C([0,u(l,T_0)])$. Используя принцип сжимающих отображений, получим, что уравнение (37) имеет единственное решение $\psi \in C([0,u(l,T_0)])$. Из (36), (37) следует, что $\varphi(\tau) = \tau\psi(\tau)$ является решением уравнения (1) на отрезке $[0,u(l,T_0)]$. Применяя теорему 2, установим, что существует единственная функция $\varphi(\tau) = \tau\psi(\tau)$, являющаяся решением уравнения (1) на отрезке $[0,T]$.

Рассмотрим в заключении некоторые примеры.

**Примеры.** Пусть функция $f$ удовлетворяет условию (6), а

$$K(x,t,s) = (ax + bt + a)\left(s + \frac{s}{1 + (t+d)|s|}\right), \quad a > 0, \ \ b > 0, \ \ d > 0, \quad (39)$$

$$u(x,t) = \rho(x)\mu(t), \quad (40)$$

где функции $\rho(x)$ и $\mu(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho \in C^2([0,l]), \quad \rho(x) > 0, \quad \rho'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,l], \quad (41)$$

$$\mu \in C^1([0,l]), \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0 \quad \forall t \in [0,T]. \quad (42)$$

Функция $K(x,t,s)$, определяемая формулой (39), удовлетворяет условиям (7)–(11) с функциями

$$k_1(x,t) = 2(ax + bt + a), \quad (43)$$

$$k_2(x,t) = 2a. \quad (44)$$

Из (39) также следует, что функция $K(l,t,s)$ для неотрицательных $s$, имеет обратную функцию

$$G(t,z) = \frac{(t+d)\sigma - 2 + \sqrt{(t+d)^2\sigma^2 + 4}}{2(t+d)}, \quad (45)$$

где

$$\sigma = \frac{z}{al + bt + a}. \quad (46)$$

Из (45), (46) следует, что в этом случае

$$g(t) = \frac{1}{al + bt + a}. \quad (47)$$

Вычислим постоянную $q$, входящую в условие (17). Из (40)–(44), (47) следует, что

$$q = \frac{2\rho'(l)}{(l+1)\rho(l)}\left[\frac{\rho(0)}{\rho'(0)} + \int_0^l \frac{\rho(x)}{\rho'(x)}\left(1 + (1+x)\frac{|\rho''(x)|}{\rho'(x)}\right)\mathrm{d}x\right]. \quad (48)$$

Рассмотрим два частных случая функции $\rho(x)$. Пусть

$$\rho(x) = 10x + \exp(cx) \quad (c > 0), \quad (49)$$

$$\rho(x) = (x+1)^\gamma \quad (\gamma > 0). \quad (50)$$

Если функция $\rho(x)$ определяется формулой (49), то из (48), (49) следует, что

$$q = \frac{2(10 + c\exp(cl))}{(l+1)(10l + \exp(cl))}\left[\frac{1}{10+c} + \int_0^l \left(\frac{10x + \exp(cx)}{10 + c\exp(cx)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (x+1)\frac{(10x + \exp(cx))c^2\exp(cx)}{(10 + c\exp(cx))^2}\right) dx\right]. \quad (51)$$

Правая часть в формуле (51) стремится к $1 - (9l-1)/(10l^2 + 11l + 1)$ при $c \to 0$. Следовательно, $q < 1$ при $9l > 1$ и достаточно малых $c$. Таким образом, для таких $l$, $c$ и любой функции $f$, удовлетворяющей условию (6), уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi \in C([0, \mu(T)(10l + \exp(cl))])$.

Рассмотрим теперь случай (50). Из (48), (50) следует, что

$$q = \frac{2}{(l+1)^2}\left(1 + (1 + |\gamma - 1|)\int_0^l (x+1)\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= 1 + (l+1)^{-2} + |\gamma - 1|[1 - (l+1)^{-2}] > 1 \quad \forall \gamma, l \in \mathbf{R}_+.$$

Таким образом, основное условие теоремы 1 не выполнено. Применим в этом случае теорему 3. Из (40)–(44), (47) следует, что

$$q_1 = \frac{2\rho'(l)}{(l+1)\rho(l)^2}\left[\frac{\rho(0)^2}{\rho'(0)} + \int_0^l \frac{\rho(x)^2}{\rho'(x)^2}\left(\rho'(x) + (1+x)|\rho''(x)|\right)\mathrm{d}x\right].$$

Вычислим эту постоянную для случая (50)

$$q_1 = \frac{2}{(l+1)^{\gamma+2}}\left(1 + (1 + |\gamma - 1|)\int_0^l (x+1)^{\gamma+1}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{2(1 + |\gamma - 1|)}{\gamma + 2} + \frac{2(\gamma + 1 - |\gamma - 1|)}{\gamma + 2}(l+1)^{-\gamma-2}.$$

Неравенство $q_1 < 1$ выполнено для $\gamma$, близких к 1, и достаточно больших $l$. Следовательно, для такой пары чисел $(\gamma, l)$ и функции $f$, удовлетворяющей условию (35), уравнение (1) имеет единственное решение, представимое в виде $\varphi(z) = z\psi(z)$, где $\psi \in C([0, (l+1)^\gamma \mu(T)])$.

## Литература


1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1987.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* – М.: Наука, 1980. – 286 с.
3. Денисов А.М. *Единственность решения задачи определения нелинейного коэффициента системы уравнений в частных производных в малом и в целом* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 5. – С. 60–71.
4. Denisov A.M. *On an integral equation of the first kind* // Comput. Math. and Model. – 1998. – V. 9. – № 4. – P. 283–286.
5. Денисов А.М., Коровин С.В. *Об интегральном уравнении 1 рода типа Вольтерра* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет. – 1992. – № 3. – С. 22–28.
6. Denisov A.M., Lorenzi A. *On a special Volterra integral equation of the first kind* // Boll. U.M.I. – 1995. – V. 9. – № 7. – P. 443–457.



*Московский государственный*
*университет им. М.В. Ломоносова*
*Миланский университет*



*Поступила*
07.02.2000