ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 514.763

А.А. УТКИН, А.М. ШЕЛЕХОВ

ТРИ-ТКАНИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Введение. В [1], [2] было начато систематическое изучение специальных классов криволинейных три-тканей, определяемых простейшими соотношениями на относительные инварианты ткани. Было доказано, что обращение в нуль одной из ковариантных производных кривизны характеризует три-ткани, два семейства которых определяются обобщенными уравнениями Абеля вида

$$\frac{dy}{dx} = -ay^n + b(x)y^{n-2} + \cdots + c(x).$$

В данной работе рассматривается в некотором смысле обратная задача, а именно, ставится проблема изучения три-тканей, определяемых дифференциальными уравнениями специального вида, находится аналитическая характеристика тканей, определяемых произвольным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Показано, что класс таких тканей также характеризуется обращением в нуль некоторых относительных инвариантов.

Каждое линейное дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

определяет три-ткань W, состоящую из трех семейств линий λ_α:

$$\lambda_1 : x = \text{const}, \quad \lambda_2 : y = \text{const}, \quad \lambda_3 : F(x,y) = \text{const},$$

причем последнее семейство состоит из интегральных кривых уравнения (1). Обратно, каждая криволинейная три-ткань W эквивалентна некоторой три-ткани $\widetilde{W}$, состоящей из трех вышеуказанных семейств λ_α, причем слои третьего слоения ткани $\widetilde{W}$ являются интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения $F_x dx + F_y dy = 0$. Это уравнение определено не однозначно, а с точностью до замен вида

$$x = \alpha(\tilde{x}), \quad y = \alpha(\tilde{y}), \tag{2}$$

переводящих декартову сеть $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ в такую же. Обычно три-ткань, заданная уравнением $z = F(x,y)$, рассматривается с точностью до изотопических преобразований, т.е. локальных диффеоморфизмов вида $x = \alpha(\tilde{x})$, $y = \alpha(\tilde{y})$, $z = \alpha(\tilde{z})$. Ввиду указанного соответствия между три-тканями и дифференциальными уравнениями вида (1) можно рассматривать эти уравнения также с точностью до изотопии вида (2). Точнее говоря, теория тканей, в рамках которой проводятся рассуждения, улавливает те свойства дифференциальных уравнений, которые сохраняются при изотопических преобразованиях вида (2). Такой подход дает возможность классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения с точностью до указанной изотопии при помощи дифференциально-геометрических инвариантов соответствующей три-ткани. С другой стороны, появляется возможность перенести свойства решений дифференциального уравнения на соответствующие три-ткани.

В данной работе рассматривается наиболее простой случай — уравнение вида

$$y' + yf(x) = g(x), \tag{3}$$

и находится инвариантная характеристика соответствующего класса тканей.

1. Согласно [1] зададим слоения λ_α ткани W уравнениями Пфаффа

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 = 0. \tag{4}$$

Базисные формы $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega, \tag{5}$$

и

$$d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{6}$$

где b есть так называемая кривизна три-ткани W.

Дифференцируя внешним образом уравнение (6) и применяя лемму Картана, придем к уравнению

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2. \tag{7}$$

При дифференцировании последнего аналогичным образом получим

$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \tag{8}$$

причем входящие сюда функции связаны соотношением

$$b_{12} - b_{21} - 2b^2. \tag{9}$$

Функции $b, b_1, b_2, b_{11}, \ldots, b_{22}$ суть относительные инварианты три-ткани W. Это означает следующее: если три-ткань W эквивалентна (изотопна) некоторой другой три-ткани $\widetilde{W}$ и структурные уравнения обеих тканей записаны в виде (4)–(5), то соответствующие базисные формы связаны соотношениями $\widetilde{\omega}_1 = A\omega_1$, $\widetilde{\omega}_2 = A\omega_2$, а кривизна b и ее ковариантные производные — соотношениями $\widetilde{b} = A^{-2}b$, $\widetilde{b}_1 = A^{-3}b_1$, $\widetilde{b}_{11} = A^{-4}b_{11}, \ldots$

2. Рассмотрим уравнение (3). С помощью изотопического преобразования $f(x)dx = d\widetilde{x}$ приведем его к виду

$$dy + (y + \widetilde{g}(x))d\widetilde{x} = 0. \tag{10}$$

Опустив тильду, обозначим

$$\omega_1 = (y + g(x))dx, \quad \omega_2 = dy. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10), определяющее третье слоение ткани, примет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает [1], что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани W должны иметь вид (5)–(8).

Так как $d\omega_2 = 0$, то из (5) следует

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda\, dy. \tag{12}$$

Имеем

$$d\omega_1 = dy \wedge dx = \omega_1 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}.$$

Сравнивая с (5), находим

$$\omega = \frac{-\omega_2}{y + g(x)} = \frac{-dy}{y + g(x)}. \tag{13}$$

Далее,

$$d\omega = -d\frac{1}{y + g(x)} \wedge dy = \frac{g'dx}{(y + g)^2} \wedge dy = \frac{g'}{(y + g)^3}\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая с (6), находим

$$b = \frac{g'}{(y+g)^3}. \tag{14}$$

Используя формулы (11)–(14), находим

$$db - 2b\omega = \left(\frac{g''}{(y+g)^3} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^4}\right)dx - \frac{3g'dy}{(y+g)^4} - \frac{2g'}{(y+g)^3}\frac{-\omega_2}{y+g} =$$
$$= \left(\frac{g''}{(y+g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^5}\right)\omega_1 - \frac{g'}{(y+g)^4}\omega_2.$$

Сравнивая с (7), находим

$$b_1 = \frac{g''}{(y+g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^5}, \quad b_2 = -\frac{g'}{(y+g)^4}. \tag{15}$$

Далее

$$db_2 - 3b_2\omega = \left(-\frac{g''}{(y+g)^4} + \frac{4(g')^2}{(y+g)^5}\right)dx + \frac{4g'dy}{(y+g)^5} + \frac{3g'}{(y+g)^4}\frac{-dy}{y+g} =$$
$$= \left(\frac{-g''}{(y+g)^5} + \frac{4{g'}^2}{(y+g)^6}\right)\omega_1 + \frac{g'}{(y+g)^5}\omega_2.$$

Сравнивая с уравнениями (8), получаем

$$b_{21} = \frac{-g''}{(y+g)^5} + \frac{4{g'}^2}{(y+g)^6}, \quad b_{22} = \frac{g'}{(y+g)^5}. \tag{16}$$

Исключая из уравнений (14)–(16) переменные g', g'' и т. д., получим соотношения, связывающие относительные инварианты ткани

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \quad bb_{21} - b_1 b_2 - b^3 = 0. \tag{17}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: *инварианты три-ткани W, соответствующей линейному дифференциальному уравнению, удовлетворяют соотношениям* (17).

3. Обратно, рассмотрим три-ткань W, для которой выполняются соотношения (17), и докажем, что ей отвечает линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Заметим сначала, что на любой три-ткани можно выбрать кобазис так, чтобы форма ω_2, например, была полным дифференциалом:

$$\omega_2 = dy. \tag{18}$$

Тогда $d\omega_2 = 0$, и в силу (5) получаем

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda\, dy. \tag{19}$$

Соотношения (17) можно разрешить, введя параметр k,

$$b_2 = kb, \quad b_{22} = k^2 b, \quad b_{21} = kb_1 + b^2, \quad b_{12} = kb_1 + 3b^2 \tag{20}$$

(последнее вытекает из (9)).

В результате уравнения (7)–(9) примут вид

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + kb\omega_2,$$
$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + (kb_1 + 3b^2)\omega_2,$$
$$db_2 - 3b_2\omega = (kb_1 + b^2)\omega_1 + k^2 b\omega_2.$$

Дифференцируя с помощью (20), (7) равенство $b_2 = kb$, придем к уравнению

$$dk - k\omega = b\omega_1. \tag{21}$$

Из (21) и (5) имеем $dk \wedge \omega_1 = k\omega \wedge \omega_1 = -k\omega_1 \wedge \omega = -kd\omega_1$, или $d\omega_1 = -\frac{dk}{k} \wedge \omega_1$. Отсюда следует

$$\omega_1 = -\frac{1}{k}dx, \tag{22}$$

где x — некоторая новая переменная. Дифференцируя внешним образом уравнения (19) с учетом равенства (22), получим $d\omega = d\lambda \wedge dy = \lambda_x dx \wedge dy = -\lambda_x k\omega_1 \wedge \omega_2$. Сравнивая далее с (6), находим

$$b = -k\lambda_x. \tag{23}$$

В результате уравнение (21) примет вид $dk = k\lambda\, dy + \lambda_x dx$. Отсюда $k_x = \lambda_x$, $k_y = k\lambda$ и $\lambda = k + \varphi(y)$. Исключая λ, находим

$$k_y = k^2 + k\varphi, \tag{24}$$

а равенство (23) запишется в форме $b = -kk_x$. Положим

$$\mu = k^{-1}. \tag{25}$$

С помощью (24) находим, что μ удовлетворяет уравнению

$$\mu_y = -1 - \mu\varphi(y). \tag{26}$$

Положим $\varphi(y) = -\theta_y(y)/\theta(y)$. Тогда однородное уравнение $\mu_y = -\mu\varphi$ имеет решение $\mu = c(x)\theta(y)$, а общее решение уравнения (26) —

$$\mu = \Big(-\int\frac{dy}{\theta} - g(x)\Big)\theta.$$

В результате уравнение третьего слоения имеет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, тогда в силу (18), (22), (25) $-\mu\, dx + dy = 0$, значит, $dy + \left(\int \frac{dy}{\theta(y)} + g(x)\right)\theta(y)dx = 0$, наконец, получаем

$$\frac{dy}{\theta} + \Big(\int\frac{dy}{\theta} + g(x)\Big)dx = 0. \tag{27}$$

Теперь произведем изотопическое преобразование $\int \frac{dy}{\theta(y)} = \widetilde{y}$. В результате уравнение (27) примет вид $d\widetilde{y} + (\widetilde{y} + g(x))dx = 0$, т. е. совпадет с уравнением (10). $\square$

Литература

1. Utkin A.A., Shelekhov A.M. *On local classification of curvilinear three-webs* // Webs and quasigroups. – Tver: TSU, 1998–1999. – P. 76–85.
2. Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 375 p.

Орский гуманитарно-технологический институт

Тверской государственный университет

Поступила
18.09.2000