ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 517.958

Л.Д. ЭСКИН

УРАВНЕНИЕ ОНЗАГЕРА КАК УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА–ШМИДТА

1. Л. Онзагером (см., напр., [1], с. 50) подробно исследованы термодинамические свойства системы сильно вытянутых жестких (недеформируемых) цилиндрических стержней ($\delta = dl^{-1} \ll 1$, d — диаметр, l — длина стержня) с парным взаимодействием типа стерического отталкивания (модель Онзагера исключенного объема). Было показано, что в системе, ориентационно-разупорядоченной при низких концентрациях, с увеличением концентрации происходит фазовый переход первого рода в анизотропную (ориентационно-упорядоченную) фазу, трактуемую как жидкокристаллический нематик. Все термодинамические свойства изотропной фазы описываются равномерной функцией распределения ориентаций осей частиц с плотностью $f(n) = 1$ (n — орт оси стержня), термодинамические свойства нематика описываются отличной от единицы плотностью f, имеющей единственный максимум в направлении директора (направление преимущественной ориентации осей), инвариантной относительно поворотов вокруг этого направления и замены $n \to -n$. Для $f(n)$ из условия минимума свободной энергии системы стержней, найденной в приближении второго вириального коэффициента, Онзагер получил нелинейное интегральное уравнение

$$\nu + \ln f(n') + \lambda \int B(n,n') f(n) d^2n = 0. \tag{1.1}$$

В (1.1) $\lambda = 2cdl^2$ (c — плотность системы) — безразмерный параметр, ядро

$$B = (1 - (nn')^2)^{1/2},$$

nn' — скалярное произведение ортов n, n', неизвестная константа ν определяется условием нормировки для $f(n)$

$$\int f(n) d^2n = 1, \tag{1.2}$$

d^2n — элемент поверхности сферы, который в сферической системе координат с полярной осью в направлении директора задается соотношением

$$d^2n = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\varphi\, d\theta$$

(φ, θ — сферические координаты орта n). Поскольку плотность $f(n)$ описывает нематик, то она является решением интегрального уравнения (1.1), удовлетворяющим, кроме условия нормировки (1.2), еще и следующим условиям:

a) $f(n)$ не зависит от угла φ ($f(n) = f(\theta)$),
b) $f(\theta) = f(\pi - \theta)$, следовательно, $f(n)$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра с четным индексом P_{2s},
c) $f(0) = f(\pi) = \max$, других максимумов f не имеет.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00270) и Международного научного фонда (грант № RHA-300).

Отметим, что среди полиномов P_{2s} условию c) удовлетворяет только P_2, этот факт весьма важен для дальнейшего.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее (1.2) и условиям a), b), c), изучалось, в основном, численными методами во многих физических работах (соответствующие ссылки можно найти в монографии [1]). Цель данной заметки — продемонстрировать возможность применения методов теории ветвления решений нелинейных интегральных уравнений (теория Ляпунова–Шмидта) для построения алгоритма, позволяющего найти разложение анизотропной плотности f в степенной ряд по целым степеням отклонения параметра λ от его бифуркационного значения λ^* (точки ветвления) и доказать сходимость этого разложения в некоторой достаточно малой окрестности λ^*.

2. Поскольку нас будут интересовать лишь решения уравнения (1.1), описывающие нематик (т. е. удовлетворяющие условиям (1.2) и условиям a), b), c)), то будем рассматривать это уравнение в банаховом пространстве C непрерывных функций на сфере, инвариантных относительно поворотов вокруг полярной оси сферической системы координат (т. е. зависящих лишь от угла θ между вектором n и положительным направлением оси Z) и при замене $n \to -n$ $(\theta \to \pi - \theta)$. Учитывая, что ядро B зависит лишь от угла α между векторами n и n', причем $B(n,n') = B(-n,n') = B(n,-n')$, а мера d^2n инвариантна при поворотах, нетрудно доказать, что интегральный оператор

$$A_\lambda : h \to A_\lambda h = \lambda \int B(n,n')h(n)d^2n$$

отображает C в себя.

Нас будут интересовать анизотропные решения уравнения (1.1), близкие к изотропному. Полагая $f = 1 + h(n)$, где $|h(n)|$ мал, получим для $h(n)$ уравнение

$$\nu + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}h/l + A_\lambda h = 0 \tag{2.1}$$

и условие нормировки

$$\int h(n)d^2n = 0. \tag{2.2}$$

Снова используя то обстоятельство, что ядро B зависит лишь от угла α, найдем, что

$$\int B(n,n')d^2n$$

не зависит от n', откуда, меняя порядок интегрирования в двукратном интеграле

$$I = \int A_\lambda h\, d^2n',$$

найдем в силу (2.2) $I = 0$. Интегрируя уравнение (2.1) по n', теперь без труда получаем уравнение для h

$$h + A_\lambda h + \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l l^{-1}\left(h^l - \int h^l\, d^2n\right) = 0. \tag{2.3}$$

Левая часть уравнения (2.3) является интегро-степенным рядом по h, λ, регулярно сходящимся при $\|h\| \le q < 1$, $|\lambda| < \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$ произвольно). Малые решения таких уравнений исследуются в теории ветвления решений нелинейных интегральных уравнений — теории Ляпунова–Шмидта [2]. При любом λ уравнение (2.3) имеет решение $h = 0$. В теории Ляпунова–Шмидта доказывается возможность существования в окрестности точки бифуркации λ^* малого решения h_λ, стремящегося к нулю при $\lambda \to \lambda^*$.

Ядро B оператора A_λ разлагается в ряд по полиномам Лежандра [3]

$$B = \frac{\pi}{2} - K_1(n,n'), \quad K_1 = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)c_k P_{2k}(nn'), \quad c_k = \frac{(2k-3)!!(2k-1)!!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}. \tag{2.4}$$

Решение h уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (2.2), является решением уравнения

$$h - \lambda\int K_1(n,n')h(n)d^2n = \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}\left(\int h^l d^2n - h^l\right). \tag{2.5}$$

Обратно, любое решение уравнения (2.5) удовлетворяет условию (2.2) и, следовательно, автоматически удовлетворяет уравнению (2.3). Действительно, из (2.4) следует

$$\int K_1(n,n')d^2n' = 0.$$

Интегрируя в обеих частях (2.5) и меняя порядок интегрирования в двукратном интеграле в левой части полученного равенства, без труда получим условие (2.2) для любого непрерывного решения уравнения (2.5).

Для полиномов Лежандра справедлива теорема сложения [3]

$$P_l(nn') = P_l(n)P_l(n') + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(n)P_l^m(n')\cos m(\varphi-\varphi')$$

(для сокращения записи обозначаем $P_l(n) = P_l(\cos\theta)$, $P_l^m(n) = P_l^m(\cos\theta)$, P_l^m — присоединенные сферические функции).

С помощью теоремы сложения с учетом того, что $h(n)$ зависит лишь от угла θ и не зависит от угла φ, нетрудно убедиться, что уравнение (2.5) можно заменить интегральным уравнением

$$h - \lambda\int K(n,n')h(n)d^2n = \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}\left(\int h^l d^2n - h^l\right), \tag{2.6}$$

где ядро

$$K = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)c_k P_{2k}(n)P_{2k}(n'). \tag{2.7}$$

Точками бифуркации λ^* нелинейного интегрального уравнения (2.6) являются характеристические числа ядра K. С помощью разложения (2.7) и соотношения ортогональности для полиномов Лежандра нетрудно доказать, что собственными функциями ядра K в пространстве C являются полиномы Лежандра P_{2s}, $s = 1, 2, \ldots$, а именно,

$$\int K(n,n')P_{2s}(n)d^2n = \frac{\pi c_s}{2}P_{2s}(n'), \tag{2.8}$$

откуда получаем бесконечную последовательность точек бифуркации $\lambda_s^* = \frac{2}{\pi c_s}$.

Нас будет интересовать лишь ненулевое решение $h(n)$ уравнения (2.6), ответвляющееся от нулевого решения в точке бифуркации $\lambda_1^* = 32/\pi$, т. к. только это решение будет давать плотность $f(n) = 1 + h(n)$, удовлетворяющую как условию нормировки (1.2), так и всем трем условиям a), b) c), т. е. будет описывать нематическую фазу. Из дальнейшего будет ясно, что решения, ответвляющиеся в точках λ_s^*, $s \geq 2$, не будут удовлетворять условию c), а следовательно, и описывать нематик. Отметим, что для каждой точки бифуркации λ_s^* в C существует с точностью до постоянного множителя лишь одна собственная функция, так что мы имеем простой случай ветвления. Положим $\lambda = \lambda_1^* + \mu$, $\varphi_1(n) = \sqrt{5}\,P_2(n)$ — нормированная собственная функция ядра K,

$$\xi = \int h(n)\varphi_1(n)d^2n$$

(в физике величина ξ называется параметром порядка и представляет большой самостоятельный интерес),

$$E(n,n') = \lambda_1^* K(n,n') - \varphi_1(n)\varphi_1(n').$$

Уравнение (2.6) в новых обозначениях можно переписать в виде

$$h - \int E(n,n')h(n)d^2n = \xi\varphi_1 + \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}\left(\int h^l d^2n - h^l\right) + \mu\int K(n,n')h(n)d^2n. \qquad (2.9)$$

Для ядра E единица является правильным числом, так что существует резольвента R этого ядра, имеющая вид

$$R(n,n') = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varphi_k(n)\varphi_k(n')}{\lambda_k - 1},$$

где $\varphi_k = \sqrt{4k+1}\,P_{2k}$ — нормированные собственные функции ядра E, а λ_k — соответствующие характеристические числа, в силу (2.8) $\lambda_k = 2/(\lambda_1^*\pi c_k)$.

С помощью резольвенты R уравнение (2.9) можно записать в эквивалентной форме

$$h(n') = \xi\varphi_1(n') + \int R(n,n')\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}\left(\int h^l d^2n - h^l\right)d^2n +$$
$$+ \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}\left(\int h^l d^2n - h^l\right) + \mu\int (k(n,n') + G(n,n'))h(n)d^2n, \qquad (2.10)$$

где

$$G(n,n') = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varphi_k(n)\varphi_k(n')}{\lambda_1^*\lambda_k(\lambda_k - 1)},$$
$$K(n,n') + G(n,n') = \frac{1}{\lambda_1^*}\left(\varphi_1(n)\varphi_1(n') + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varphi_k(n)\varphi_k(n')}{\lambda_k - 1}\right).$$

В теории ветвления решений нелинейных интегральных уравнений [2] доказывается, что уравнения вида (2.10) имеют при достаточно малых $|\xi|$ и $|\mu|$ единственное малое решение в C, которое представляется в виде сходящегося ряда

$$h = \xi\varphi_1 + \sum_{r+s=2}^{\infty}\xi^r\mu^s a_{rs}(n), \qquad (2.11)$$

где ξ является малым решением уравнения разветвления, имеющего вид

$$\sum_{m=2}^{\infty}\mathcal{L}_{m0}\xi^m + \sum_{m=0}^{\infty}\xi^m\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{L}_{mr}\mu^r = 0, \quad \mathcal{L}_{ij} = \int a_{ij}(n)\varphi_1(n)d^2n. \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.12) не содержит слагаемого с первой степенью ξ, поэтому его малые решения разлагаются в сходящиеся при малых $|\mu|$ степенные ряды по положительным, вообще говоря, дробным степеням μ (в теории метода Ньютона доказывается, что показатели степени имеют конечный общий знаменатель). Мы покажем, что ненулевое малое решение уравнения разветвления (2.12), соответствующего интегральному уравнению (2.10), единственно и разлагается в сходящийся ряд по целым положительным степеням μ. С учетом (2.11) отсюда будет следовать, что существует единственное ненулевое малое решение $h(n) \in C$, разлагающееся в сходящийся степенной ряд по целым положительным степеням μ с коэффициентами, зависящими от n (т. е. от угла θ сферической системы координат). Эффективный метод построения этого решения укажем в п. 3.

Нам понадобятся некоторые из коэффициентов $\mathcal{L}_{ij}$ уравнения (2.12). Прежде всего убедимся, что $\mathcal{L}_{0j} = 0$, $j = 1,2,\ldots$ С этой целью подставим решение (2.11) в уравнение (2.10), а затем в полученном тождестве положим $\xi = 0$, после чего слева и справа в (2.10) будем иметь ряды по целым степеням μ. Если $a_{02} \neq 0$, то в левой части полученного равенства будет присутствовать моном $a_{02}\mu^2$, в то время как разложение в правой части по степеням μ будет начинаться по меньшей мере со слагаемого, содержащего μ^3. Следовательно, $a_{02} = 0$. Если теперь $a_{03} \neq 0$, то разложение левой части начинается со слагаемого $a_{03}\mu^3$, тогда как в правой части наименьшая возможная степень μ четвертая. Следовательно, $a_{03} = 0$. Продолжая эти рассуждения, получим $a_{0j}(\theta) = 0\ \forall j$, откуда и $\mathcal{L}_{0j} = 0$. Вычислим теперь коэффициент $\mathcal{L}_{20}$ уравнения разветвления (2.12). С этой целью снова подставим (2.11) в (2.10) и сравним в обеих частях полученного равенства коэффициенты при ξ^2. Получим

$$a_{20} = \frac{1}{2}\Big(-1 + \varphi_1^2 + \int R(n,n')(-1+\varphi_1^2)d^2n\Big). \tag{2.13}$$

Ниже будем использовать формулу Клебша–Гордана [4]

$$P_{l_1}P_{l_2} = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!(l_1+l_2-l)!(l-l_1+l_2)!(g!)^2}{(1+l_1+l_2+l)![(g-l_1)!(g-l_2)!(g-l)!]^2}, \quad g = \frac{l_1+l_2+l}{2} \tag{2.14}$$

(суммирование по l той же четности, что и $l_1 + l_2$). Из (2.14) следует

$$P_2^2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{7}P_2 + \frac{18}{35}P_4 \tag{2.15}$$

или

$$\varphi_1^2 = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{7}\varphi_1 + \frac{2}{7}\varphi_2.$$

Из (2.13) без труда найдем $a_{20} = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$, где $\alpha_1 = \sqrt{5}/7$, а α_2 не понадобится. Окончательно получаем $\mathcal{L}_{20} = \sqrt{5}/7$.

Чтобы найти a_{11}, надо после подстановки (2.11) в (2.10) сравнить в полученном равенстве коэффициенты при произведении $\xi\mu$. Получим

$$a_{11} = \int (K(n,n') + G(n,n'))\varphi_1(n)d^2n = \frac{1}{\lambda_1^*}\varphi_1,$$

откуда $\mathcal{L}_{11} = (\lambda_1^*)^{-1} = \pi/32$. Так как по доказанному $\mathcal{L}_{0j} = 0$, $\mathcal{L}_{20} \neq 0$, $\mathcal{L}_{11} \neq 0$, то убывающая часть диаграммы Ньютона уравнения разветвления (2.12), определяющая его малое решение $\xi = \xi(\mu)$, состоит из одного отрезка, соединяющего точки $(1,1)$ и $(2,0)$. В этом случае, как известно [2], кроме решения $\xi = 0$, уравнение разветвления имеет единственное ненулевое решение, разлагающееся в сходящийся в некоторой окрестности $\mu = 0$ степенной ряд по целым положительным степеням μ

$$\xi = \tau_1\mu + \tau_2\mu^2 + \cdots, \tag{2.16}$$

где $\tau_1 = -\mathcal{L}_{11}/\mathcal{L}_{20} = -\frac{7\pi}{32\sqrt{5}}$. Решение (2.16) с помощью (2.11) определяет в некоторой окрестности $\mu = 0$ (т. е. $\lambda = \lambda_1^*$) решение $f = 1 + h(n)$ уравнения Онзагера (1.1), разлагающееся в сходящийся степенной ряд по целым степеням $\mu = \lambda - \lambda_1^*$, удовлетворяющее условиям нормировки (1.2) и условиям a), b). Из (2.11) следует, что это решение будет при достаточно малых $|\mu|$ удовлетворять и условию c), но лишь тогда и только тогда, когда знаки μ и τ_1 одинаковы, т. е. при $\lambda < \lambda_1^*$.

Аналогично строятся решения $h(n)$ (а вместе с ними и $f(n)$), ответвляющиеся от тривиального решения $h = 0$ в точках бифуркации λ_k^*, $k \geq 2$. Эти решения будут также представляться в виде рядов (2.11), в которых, однако, $\varphi_1 = \sqrt{5}\,P_2$ придется заменить на $\sqrt{4k+1}\,P_{2k}$. Так как при $k \geq 2$ полином P_{2k} имеет в отличие от P_2 локальные максимумы внутри отрезка $0 \leq \theta \leq \pi$, то для решений, ответвляющихся от тривиального при $\lambda = \lambda_k^*$, $k \geq 2$, условие c) выполняться не будет, следовательно, такие решения не будут описывать нематик.

3. Эффективный алгоритм построения анизотропной плотности $f(n)$ — решения уравнения Онзагера (1.1), удовлетворяющего условию нормировки (1.2) и условиям a), b), c), состоит в применении метода неопределенных коэффициентов к уравнению (2.5), предварительно записанному в виде

$$Ah = h - \lambda_1^* \int K(n,n')h(n)d^2n = \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-1}\left(\int h^l d^2n - h^l\right) + \mu \int K(n,n')h(n)d^2n. \quad (3.1)$$

Положим

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(n)\mu^i. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим для определения h_i линейное неоднородное уравнение с правой частью, зависящей лишь от коэффициентов $h_1, \dots, h_{i-1}$. Сравнивая коэффициенты при первой степени μ, получим однородное уравнение $Ah_1 = 0$. Так как единица есть простое характеристическое число ядра $\lambda_1^* K$, которому принадлежит собственная функция P_2, имеем $h_1 = \tau_1 P_2$, τ_1 будет определено при построении следующего приближения h_2. Уравнение для h_2 получим, сравнивая коэффициенты при μ^2. Будем иметь

$$Ah_2 = \frac{1}{2}\left(h_1^2 - \int h_1^2 d^2n\right) + \int K(n,n')h_1(n)d^2n. \quad (3.3)$$

С помощью (2.14) и (2.7) уравнение (3.3) перепишем в виде

$$Ah_2 = \tau_1\left(\frac{\pi}{32} + \frac{\tau_1}{7}\right)P_2 + \frac{9\tau_1^2}{35}P_4. \quad (3.4)$$

Условием существования решения h_2 для уравнения (3.4) является ортогональность правой части этого уравнения к решению P_2 однородного уравнения $Ah = 0$. Следовательно, равен нулю коэффициент при P_2 в правой части (3.4), т. е. $\tau_1 = -7\pi/32$ (в случае $\tau_1 = 0$ получим тривиальное решение $h = 0$ уравнения (2.3)), и уравнение (3.4) принимает вид

$$Ah_2 = \frac{7 \cdot 9}{5 \cdot 2^{10}}\pi^2 P_4. \quad (3.5)$$

Его решение следует, очевидно, искать в виде

$$h_2 = \tau_2 P_2 + \beta P_4. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в уравнение (3.5), найдем $\beta = \frac{9\pi^2}{5 \cdot 2^7}$, а τ_2 найдем при построении третьего приближения h_3, для которого из (3.1) получим уравнение

$$Ah_3 = \frac{1}{3}\left(\int h_1^3 d^2n - h_1^3\right) + \int K(n,n')h_2 d^2n + \left(h_1 h_2 - \int h_1 h_2 d^2n\right). \quad (3.7)$$

С помощью (2.7) и соотношений

$$P_2 P_4 = \frac{2}{7}P_2 + \frac{20}{77}P_4 + \frac{5}{11}P_6, \quad P_2^3 = \frac{2}{35} + \frac{3}{7}P_2 + \frac{108}{5 \cdot 77}P_4 + \frac{18}{77}P_6, \quad (3.8)$$

получающихся в силу (2.13), (2.14), без труда найдем, что правая часть в (3.7) есть линейная комбинация полиномов Лежандра P_2, P_4, P_6, причем коэффициент при P_2 снова должен быть равен нулю. Это дает уравнение для определения τ_2

$$2\tau_1(\tau_2 + \beta) + 7 \cdot 2^{-5}\pi\tau_2 - \tau_1^3 = 0,$$

откуда получаем $\tau_2 = \frac{101}{5\cdot 2^{10}}\pi^2$, причем уравнение для h_3 принимает вид

$$Ah_3 = -\frac{\pi^3}{11\cdot 2^{14}}\Big(\frac{9\cdot 1987}{50}P_4 + 105P_6\Big). \tag{3.9}$$

Поэтому h_3 следует искать в виде

$$h_3 = \tau_3 P_2 + \beta_1 P_4 + \beta_2 P_6. \tag{3.10}$$

Коэффициенты β_1, β_2 находим, подставляя (3.10) в уравнение (3.9) и сравнивая коэффициенты при P_4 и P_6 соответственно в полученном равенстве. Будем иметь

$$\beta_1 = -\frac{9\cdot 1987}{25\cdot 77\cdot 2^{12}}\pi^3, \quad \beta_2 = -\frac{35}{11\cdot 41\cdot 2^7}\pi^3.$$

Коэффициент τ_3, как и ранее τ_1, τ_2, находим из условия равенства нулю коэффициента при P_2 в правой части уравнения для h_4, имеющего вид

$$\begin{aligned} Ah_4 = {} & 4^{-1}h_1^4 + 2^{-1}h_2^2 + h_1h_3 - h_1^2h_2 - \\ & - \int (4^{-1}h_1^4 + 2^{-1}h_2^2 + h_1h_3 - h_1^2h_2)d^2n + \int K(n,n')h_3(n)d^2n. \end{aligned} \tag{3.11}$$

С помощью формулы Клебша–Гордана (2.13), соотношений (2.14), (3.8) и найденных выше выражений для h_1, h_2, h_3 нетрудно убедиться, что правая часть в (3.11) является линейной комбинацией P_2, P_4, P_6, P_8, причем коэффициент при P_2 в этой линейной комбинации оказывается равным

$$\tau_3\Big(\frac{\pi}{32} + \frac{2}{7}\tau_1\Big) + \frac{1}{7}\Big(\frac{5\tau_1^4 - 12\tau_1^2\beta}{11} + \tau_2^2 + 2\tau_2\beta + 2\tau_1\beta_1 + \frac{50}{99}\beta^2 - 3\tau_1^2\tau_2\Big) = 0,$$

откуда с учетом найденных выше значений τ_1, τ_2, β, β_1 получим

$$\tau_3 = -\frac{141017}{25\cdot 77\cdot 2^{15}}\pi^3.$$

Итак, мы вычислили с точностью до слагаемых порядка $O(\mu^4)$ плотность распределения ориентаций стержней $f(n)$ и параметр порядка — одну из важнейших физических характеристик фазового перехода. Не представляет труда вычислить и h_4, но выкладки быстро становятся более громоздкими и мы не будем на этом останавливаться.

Отметим в заключение, что сходимость ряда (3.2) в достаточно малой окрестности λ_1^* следует из результатов п. 2, а решение поставленной задачи о вычислении анизотропной плотности $f(n)$ этот ряд дает лишь в левой полуокрестности λ_1^*, т. к. $\tau_1 < 0$ и должно выполняться условие с) (имеем, таким образом, левое направление бифуркации при $\lambda = \lambda_1^*$).

Развитый здесь метод построения плотности распределения ориентаций в системе стержней может быть применен и для случая системы магнитных стержней, когда к рассматриваемому здесь стерическому взаимодействию добавляется и их диполь-дипольное взаимодействие. Нелинейное интегральное уравнение для плотности распределения ориентаций в этом случае указано в [5]. Аналог развитого здесь алгоритма (существенно более сложный) вместе с исследованием вопроса о направлении бифуркаций мы рассмотрим в отдельной работе, где также докажем и сходимость получаемого ряда для f.

Пользуясь случаем, благодарю за внимание Э.Ю. Лернера и М.Д. Миссарова.

Литература

1. Де Жен П.Ж. *Физика жидких кристаллов.* – М.: Мир, 1977. – 400 с.
2. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений.* – 4-е изд., перераб. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 1100 с.
4. Виленкин Н.Я. *Специальные функции и теория представлений групп.* – М.: Наука, 1965. – 588 с.
5. Корнев К.Г., Эскин Л.Д. *Фазовые переходы в суспензии иглообразных магнитов* // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1991. – Т. 35. - № 6. – С. 1050–1054.

Казанский государственный университет

Поступила 12.10.1995