ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.956

Р.С. ХАЙРУЛЛИН

О ЗАДАЧЕ ТИПА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0, \quad \alpha \le -1/2, \tag{1}$$

в смешанной области D, эллиптическая часть которой D_1 совпадает со всей верхней полуплоскостью, а гиперболическая часть состоит из двух бесконечных треугольников: D_2, ограниченного характеристиками $y = 0$ и $x - 2\sqrt{-y} = 0$, и D_3, ограниченного характеристиками $y = 0$ и $x + 2\sqrt{-y} = 0$. Задачи Геллерстедта для уравнения (1) в случае ограниченных областей рассматривались в работах [1]–[3]. В данной статье исследуется случай неограниченной области, и в ней продолжены исследования, начатые в работах [4], [5], в которых были решены аналогичные задачи Трикоми.

Через n и m обозначим натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $-1/2 < \alpha + n = \alpha_0 \le 1/2$, $0 < 2\alpha + m - 1 = \delta \le 1$. Очевидно, $m = 2n + 2$, $\delta = 2\alpha_0 + 1$ при $-1/2 < \alpha_0 \le 0$ и $m = 2n + 1$, $\delta = 2\alpha_0$ при $0 < \alpha_0 \le 1/2$.

Задача G_α. *В области D найти функцию $u(x, y)$ со свойствами*

1) *$u(x, y)$ принадлежит $C(D \cup \{x^2 + 4y = 0\})$;*
2) *имеют место соотношения*

$$u = o(R^{2-2\alpha}), \quad u_x = o(R^{1-2\alpha}), \quad u_y = o(R^{-2\alpha}) \tag{2}$$

при $R \to +\infty$, где $R^2 = x^2 + 4y$, $(x, y) \in D_1$;

3) *$u(x, y)$ принадлежит $C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D_1 \cup D_2 \cup D_3$;*
4) *существуют пределы $(x \ne 0)$*

$$\nu_i(x) = \lim_{y\to 0,\ (x,y)\in D_i} |y|^\alpha [u(x, y) - A_\alpha(x, y, \tau)]_y, \tag{3}$$

$i = 1, 2, 3$, и выполняются условия склеивания

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad x > 0, \tag{4}$$

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_3(x), \quad x < 0, \tag{5}$$

где

$$\tau(x) = u(x, 0), \tag{6}$$

$$A_\alpha(x, y, \tau) = \sum_{s=1}^{[m/2]} \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!} y^s, \quad \alpha \ne -n,$$

$$A_\alpha(x, y, \tau) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!} y^s - \frac{\tau^{(2n+2)}(x)}{n!(n+1)!} y^{n+1} \Big[\ln|y| - \sum_{s=1}^{n+1} \frac{1}{s} \Big], \quad \alpha = -n,$$

$[\,\cdot\,]$ — *целая часть числа,* $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_s = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\cdots(\alpha + s - 1)$;

5) $u(x,y)$ *удовлетворяет краевому условию*

$$u(x,y)|_{x^2+4y=0} = \psi(x),$$

где $\psi(x)$ *— заданная функция.*

Предполагаем, что удовлетворяется

Условие 1. Функция $\psi(x)$ принадлежит классу $C^n(-\infty,+\infty) \cup C^{n+1,\lambda}(-\infty,0) \cup C^{n+1,\lambda}(0,+\infty)$, $\lambda > 1/2-\alpha_0$, производная $\psi^{(n+1)}(x)$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $\alpha_0+1/2$, если $-1/2<\alpha_0\le 0$, и ниже δ, если $0<\alpha_0\le 1/2$, и должна иметь представление $\psi^{(n+1)}(x) = O(|x|^{-\beta})$ при $x\to\infty$, где $\beta>\alpha_0$.

На функции $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$ наложим следующие условия 2 и 3.

Условие 2. Функция $\tau(x)$ принадлежит классу $C^n(-\infty,+\infty)\cup C^{m,\gamma}(-\infty,0)\cup C^{m,\gamma}(0,+\infty)$, $\gamma>1-\delta$, производная $\tau^{(n+1)}(x)$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $\alpha_0+1/2$, если $-1/2<\alpha_0\le 0$, и ниже δ, если $0<\alpha_0\le 1/2$, и должна иметь представление $\tau^{(n+1)}(x)=O(|x|^{-\beta})$ при $x\to\infty$.

Условие 3. Функции $\nu_i(x)$ непрерывны в соответствующих областях определения и могут иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $3/2-\alpha$.

2. Основные соотношения между τ и ν

Задачу будем решать методом интегральных уравнений, поэтому понадобятся основные соотношения между τ и ν из каждой подобласти. Для вывода этих соотношений рассмотрим вспомогательные задачи. В эллиптической подобласти используем решение задачи Дирихле с краевым условием (6). Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих на бесконечности соотношениям (2). Указанная задача имеет единственное решение

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(3/2-\alpha)y^{1-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)4^{\alpha-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(\xi)[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi.$$

В классе ограниченных функций это решение построено в [6], [7]. Оно остается справедливым и для неограниченных функций из требуемого класса. В этом можно убедиться, используя метод функции Грина. Аналогичная задача для области, совпадающей с первым квадрантом, решена в [4].

Перейдем к гиперболическим подобластям. Здесь используем решение задачи типа Коши с начальными условиями (6), (3). Оно имеет вид [8]

$$u(x,y) = B_\alpha(x,y,\tau) - \frac{2\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma^2(3/2-\alpha)}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu_i(\zeta)[\xi(1-\xi)]^{1/2-\alpha}d\xi,$$

где $(x,y)\in D_i$, $i=2,3$, $\zeta = x-2\sqrt{-y}(1-2\xi)$,

$$B_\alpha(x,y,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\frac{n!(2n-s)!2^{2s}}{s!(n-s)!(2n)!}(-y)^{s/2}[\tau^{(s)}(x-2\sqrt{-y})+(-1)^s\tau^{(s)}(x+2\sqrt{-y})], \quad \alpha_0=1/2,$$

$$B_\alpha(x,y,\tau) = \sum_{s=0}^{n}\frac{C_{n+1}^s\Gamma(\alpha_0+1)4^{\alpha_0+s}}{\sqrt{\pi}(\alpha)_s\Gamma(\alpha_0+s+1/2)}(-y)^s\int_0^1\tau^{(2s)}(\zeta)[\xi(1-\xi)]^{\alpha_0+s-1/2}d\xi +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha)4^{\alpha+m-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+m-1/2)}(-y)^{m/2}\int_0^1\tau^{(m)}(\zeta)[\xi(1-\xi)]^{\alpha+m-3/2}[\xi+(-1)^m(1-\xi)]d\xi, \quad \delta<1,$$

$$B_\alpha(x,y,\tau) = \sum_{s=0}^{n}\frac{C_{n+1}^s 4^s}{\sqrt{\pi}(\alpha)_s\Gamma(s+1/2)}(-y)^s\int_0^1\tau^{(2s)}(\zeta)[\xi(1-\xi)]^{s-1/2}d\xi +$$

$$+\frac{(-1)^n 2^{2n+3}(-y)^{n+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+3/2)n!}\int_0^1 \tau^{(2n+2)}(\zeta)[\xi(1-\xi)]^{n+1/2}\left[\ln 16\sqrt{-y}\xi(1-\xi)-\sum_{s=1}^{n+1}\frac{2}{2s-1}\right]d\xi, \quad \alpha_0=0.$$

Из этих решений выводятся требуемые соотношения. Их вид определяется следующими леммами. Они доказываются по аналогии с соответствующими утверждениями работ [4], [5].

Лемма 1. *При $x > 0$ основное соотношение из эллиптической подобласти имеет вид* $(a > x)$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_1(x) = k\Bigg[\Gamma(2\alpha-2)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(D_{0x}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x)+(-1)^{m+1}D_{xa}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x))+$$

$$+\frac{1}{(2-\delta)_m}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left(\int_a^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\xi)(\xi-x)^{\delta-2}d\xi+(-1)^m\int_{-\infty}^0\tau^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{\delta-2}d\xi\right)\Bigg], \quad \delta<1,$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_1(x) = \frac{k}{m!}\Bigg[\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\Bigg((-1)^m\int_0^x\tau^{(n+1)}(\xi)\ln(x-\xi)d\xi-$$

$$-\int_x^a\tau^{(n+1)}(\xi)\ln(\xi-x)d\xi\Bigg)+\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left(\int_a^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi-x}-(-1)^m\int_{-\infty}^0\frac{\tau^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi-x}\right)\Bigg], \quad \delta=1,$$

где $k=\Gamma(3/2-\alpha)(1-\alpha)/\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}$.

Лемма 2. *При $x < 0$ основное соотношение из эллиптической подобласти имеет вид* $(-a < x)$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_1(x) = k\Bigg[\Gamma(2\alpha-2)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(D_{-ax}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x)+(-1)^{m+1}D_{x0}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x))+$$

$$+\frac{1}{(2-\delta)_m}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left(\int_0^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\xi)(\xi-x)^{\delta-2}d\xi+(-1)^m\int_{-\infty}^{-a}\tau^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{\delta-2}d\xi\right)\Bigg], \quad \delta<1,$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_1(x) = \frac{k}{m!}\Bigg[\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\Bigg((-1)^m\int_{-a}^x\tau^{(n+1)}(\xi)\ln(x-\xi)d\xi-$$

$$-\int_x^0\tau^{(n+1)}(\xi)\ln(\xi-x)d\xi\Bigg)+\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi-x}-(-1)^m\int_{-\infty}^{-a}\frac{\tau^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi-x}\right)\Bigg], \quad \delta=1.$$

Лемма 3. *Основное соотношение из гиперболической подобласти D_2 имеет вид*

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_2(x)=\Gamma(\alpha)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}D_{0x}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}), \quad \alpha_0\neq 0,$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_2(x)=\frac{2(-1)^n}{n!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\xi)\ln(x-\xi)d\xi-\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}), \quad \alpha_0=0,$$

$$\tau^{(s)}(0)=\psi^{(s)}(0)2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s, \quad s=\overline{0,n},$$

где

$$\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})=2^{1-2\alpha-n}\sqrt{\pi}x^{\alpha-1/2}D_{0x}^{1/2-\alpha_0}\psi^{(n+1)}(x/2).$$

Лемма 4. *Основное соотношение из гиперболической подобласти D_3 имеет вид*

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_2(x)=\Gamma(\alpha)(-1)^{m+1}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}D_{x0}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}), \quad \alpha_0\neq 0,$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu_3(x)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_x^0\tau^{(n+1)}(\xi)\ln(\xi-x)d\xi-\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}), \quad \alpha_0=0,$$

$$\tau^{(s)}(0)=\psi^{(s)}(0)2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s, \quad s=\overline{0,n},$$

где

$$\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})=2^{1-2\alpha-n}\sqrt{\pi}(-x)^{\alpha-1/2}(-1)^{n+1}D_{x0}^{1/2-\alpha_0}\psi^{(n+1)}(x/2).$$

Здесь D_{bc}^{l} — оператор дробного дифференцирования по Риману–Лиувиллю при $l \geq 0$ и дробного интегрирования при $l < 0$ (напр.,[9]).

Лемма 5. *Если $\psi(x)$ удовлетворяет условию 1, то функция $\Psi_\alpha(x, \psi^{(n+1)})$ может иметь при $x = 0$ особенность порядка ниже $\frac{3}{2} - \alpha$, если $-\frac{1}{2} < \alpha_0 \leq 0$, и ниже $n+1$, если $0 < \alpha_0 \leq \frac{1}{2}$, а при $x \to \infty$ имеет нуль порядка выше $1 - \alpha$.*

3. Вывод интегральных уравнений и решение задачи G_α

Приступим к выводу интегральных уравнений и их решению.

Теорема 1. *Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию 1, то решение задачи G_α в классе функций, удовлетворяющих условиям 2, 3, редуцируется к решению следующей системы интегральных уравнений:*

$$\mu_1(x)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mu_1(\xi)d\xi}{\xi - x} - \frac{(-1)^m}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mu_2(\xi)d\xi}{\xi + x} = g_1(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s^1 x^s, \tag{7}$$

$$\mu_2(x)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mu_2(\xi)d\xi}{\xi - x} - \frac{(-1)^m}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mu_1(\xi)d\xi}{\xi + x} = g_2(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s^2 x^s \tag{8}$$

с дополнительными условиями

$$\tau^{(s)}(0) = a_s, \quad s = \overline{0, n}, \tag{9}$$

где

$$\mu_1(x) = \tau^{(n+1)}(x)x^{\delta-1}, \qquad x > 0, \tag{10}$$

$$\mu_2(-x) = \tau^{(n+1)}(x)(-x)^{\delta-1}, \quad x < 0, \tag{11}$$

$$g_1(x) = \frac{(-1)^{m+1}\Gamma(1-\alpha)x^{\delta-1}}{\pi(m-n-2)!}D_{0x}^{\delta-1}\int_x^{+\infty}\Psi_\alpha(\xi, \psi^{(n+1)})(\xi - x)^{m-n-2}d\xi,$$

$$g_2(-x) = \frac{(-1)^{m-n}\Gamma(1-\alpha)(-x)^{\delta-1}}{\pi(m-n-2)!}D_{x0}^{\delta-1}\int_{-\infty}^{x}\Psi_\alpha(\xi, \psi^{(n+1)})(x - \xi)^{m-n-2}d\xi,$$

$$a_s = \psi^{(s)}(0)2^{-s}(2\alpha - 1)_s/(\alpha - 1/2)_s, \quad s = \overline{0, n},$$

c_s^1, c_s^2, $s = \overline{0, m-n-2}$, — произвольные постоянные.

При доказательстве используются леммы 1–4 и условия склеивания (4), (5).

Лемма 6. *Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию 1, то функции $g_i(x)$ могут иметь особенность при $x = 0$ порядка ниже $1/2 - \alpha_0$, если $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$, и ниже 1, если $0 < \alpha_0 \leq 1/2$, и имеют нуль при $x \to +\infty$ порядка выше $-\alpha_0$, если $-1/2 < \alpha_0 \leq 0$, и выше $1 - \alpha_0$, если $0 < \alpha_0 \leq 1/2$.*

Замечание. Из условия 2 и соотношений (10), (11) следует, что функции $\mu_i(x)$ при $x = 0$ и $x \to +\infty$ должны удовлетворять условиям, аналогичным приведенным в утверждении леммы 6.

Лемма 7. *При условиях леммы* 6 *система уравнений* (7), (8) *имеет единственное решение из требуемого класса.*

Доказательство. Умножив уравнение (8) на $(-1)^m$, сложим его с уравнением (7) и вычтем из него. В результате имеем

$$\rho_1(x)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi - x} + \frac{1}{\xi + x}\right]\rho_1(\xi)d\xi = h_1(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} d_s^1 x^s,$$

$$\rho_2(x)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi + x}\right]\rho_2(\xi)d\xi = h_2(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} d_s^2 x^s,$$

где

$$\rho_1(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x)(-1)^m, \quad \rho_2(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x)(-1)^m,$$
$$h_1(x) = g_1(x) + g_2(x)(-1)^m, \quad h_2(x) = g_1(x) - g_2(x)(-1)^m.$$

Отсюда после замены $\xi^2 = \sigma$, $x^2 = \eta$,

$$\rho_1(x) = v_1(\eta), \quad h_1(x) = b_1(\eta), \quad \rho_2(x)/x = v_2(\eta), \quad h_2(x)/x = b_2(\eta)$$

получим

$$v_1(\eta)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{v_1(\sigma)d\sigma}{\sigma - \eta} = b_1(\eta) + \sum_{s=0}^{m-n-2} d_s^1 \eta^{s/2}, \tag{12}$$

$$v_2(\eta)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{v_2(\sigma)d\sigma}{\sigma - \eta} = b_2(\eta) + \sum_{s=0}^{m-n-2} d_s^2 \eta^{(s-1)/2}. \tag{13}$$

Для существования решений уравнений вида (12), (13) необходимо обращение в нуль правых частей при $x \to +\infty$ [10], поэтому имеем $d_s^1 = 0$, $s = \overline{0, m-n-2}$, и $d_s^2 = 0$, $s = \overline{1, m-n-2}$. Выполним подстановку [10]

$$\eta = \zeta/(1-\zeta), \qquad \sigma = t/(1-t),$$
$$v_i(\eta) = z_i(\zeta)(1-\zeta), \quad b_i(\eta) = w_i(\zeta)(1-\zeta)$$

и получим

$$z_1(\zeta)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{z_1(t)dt}{t-\zeta} = w_1(\zeta), \tag{14}$$

$$z_2(\zeta)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{z_2(t)dt}{t-\zeta} = w_2(\zeta) + \frac{d_0^2}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}. \tag{15}$$

Функция $w_1(\zeta)$ может иметь особенности при $\zeta = 0$ порядка ниже $(1-2\alpha_0)/4$, если $-1/2 < \alpha_0 \le 0$, и ниже $1/2$, если $0 < \alpha_0 \le 1/2$, при $\zeta = 1$ — порядка ниже $1 + \alpha_0/2$, если $-1/2 < \alpha_0 \le 0$, и ниже $(1+\alpha_0)/2$, если $0 < \alpha_0 \le 1/2$. Функция $w_2(\zeta)$ может иметь особенности при $\zeta = 0$ порядка ниже $(3-2\alpha_0)/4$, если $-1/2 < \alpha_0 \le 0$, и ниже 1, если $0 < \alpha_0 \le 1/2$, при $\zeta = 1$ — порядка ниже $(1+\alpha_0)/2$, если $-1/2 < \alpha_0 \le 0$, и ниже $\alpha_0/2$, если $0 < \alpha_0 \le 1/2$. Аналогичные особенности допускаются у функций $z_1(\zeta)$ и $z_2(\zeta)$. Из того, что у функций $z_2(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ при $\zeta = 1$ допускаются особенности порядка ниже $1/2$, следует равенство $d_0^2 = 0$. В требуемых классах уравнения (14), (15) имеют единственные решения. Эти решения записываются для уравнения (15) по формуле решения, ограниченного при $\zeta = 0$. По этой же формуле оно записывается и для уравнения (14) в случае $0 < \alpha_0 \le 1/2$. Если же $-1/2 < \alpha_0 \le 0$, то для уравнения (14) решение записывается по формуле решения, ограниченного при $\zeta = 0$. $\square$

С помощью леммы 7 нетрудно доказывается

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *задача* (7)–(9) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* 2.

Итогом является

Теорема 3. *Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию 1, то задача G_α имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям 2, 3.*

Доказательство состоит в последовательном использовании теорем 1, 2. Единственность решения следует из однозначности определения функций $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$ и единственности решений вспомогательных задач.

Литература

1. Хе Кан Чер. *О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа* // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1976. – Вып. 26. – С. 134–141.
2. Исамухамедов С.С. *Краевые задачи Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа второго рода* // Дифференц. уравнения с частн. произв. и их приложения. – Ташкент, 1977. – С. 33–40.
3. Емелина И.Д. *Задачи типа Геллерстедта для одного однородного уравнения смешанного типа второго рода* // Тр. семин. по краев. задачам. — Казань, 1983. – Вып. 20. – С. 93–103.
4. Хайруллин Р.С. *К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т.35. – № 4. – С. 927–936.
5. Хайруллин Р.С. *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае неограниченной области* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 11. – С. 2010–2017.
6. Джаиани Г.В. *Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу.* – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1984. – 80 с.
7. Маричев О.И. *Сингулярные краевые задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и двуосесимметричного уравнения Гельмгольца* // Тр. Всесоюзн. конф. по уравн. в частн. произв. – М., 1978. – С. 373–374.
8. Хайруллин Р.С. *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 8. – С. 1396–1407.
9. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Высш. шк., 1985. – 305 с.
10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступили
первый вариант 08.05.2003
окончательный вариант 19.02.2004