ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.5

В.В. ДУБРОВСКИЙ, В.В. ГЛЕКОВА

ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим задачи Дирихле

$$(-\Delta_D+q_j)u(x)\equiv-\Delta u(x)+q_j(x)u(x)=\lambda u(x)\ \ (\forall x\in\Omega),\quad u(x)=0\ \ (\forall x\in S),$$

для которых Ω — трехмерная ограниченная область с границей S класса C^2 за исключением конечного числа угловых точек; q_j $(j=1,2)$ — действительные непрерывные в Ω функции; λ — комплексный параметр.

Пусть $\mu_j(q_j)$ — собственные числа оператора $-\Delta_D+q_j$, перечисленные в порядке возрастания их величин с учетом кратности; $u_i(q_j)$ $(u_i(q_j)\in\mathcal{L}_2(\Omega))$ — отвечающие им собственные ортонормированные функции.

Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть потенциалы q_j в Ω таковы, что*

$$\mu_i(q_1),\mu_i(q_2)\sim C_1i^{2/3}+C_2i^{1/3}+o(i^{1/3});\tag{1}$$

$$p_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,i^{\varepsilon}|\mu_i(q_2)-\mu_i(q_1)|<\infty\quad \textit{при}\quad \varepsilon>\frac{5}{9};\tag{2}$$

$$\Big\|\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\Big\|_{\mathcal{L}_2(S)},\ \Big\|\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\Big\|_{\mathcal{L}_2(S)}\le C_3i^{1/3};\tag{3}$$

$$q_0=\overline{\lim_{i\to\infty}}\,i^{\delta}\Big\|\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y)-\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}}(y)\Big\|_{\mathcal{L}_2(S\times S)}<\infty\quad \textit{при}\quad \delta>\frac{1}{3}.\tag{4}$$

Тогда $q_1=q_2$.

Введем действующие в $\mathcal{L}_2(S)$ операторы $N(\lambda,q_j)$,

$$N(\lambda,q_j)f=\frac{\partial u_j}{\partial\nu}\Big|_S,$$

где ν — внутренняя нормаль к S, а u_j — решение задачи

$$(-\Delta_D+q_j)u(x)=\lambda u(x)\ \ (\forall x\in\Omega),\quad u(x)=f(x)\ \ (\forall x\in S,\ \lambda\ne\mu_i(q_j),\ i=\overline{1,\infty}).$$

В [1] показано, что оператор $N(\lambda,q_j)$ имеет представление

$$N(\lambda,q_j)f=\int_S\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial u_i(q_j)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_j)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_j)-\lambda)^{-1}\Big)f(x)dx.$$

Используя ядро

$${}^kN(\lambda,q_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial u_i(q_j)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_j)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_j)-\lambda)^{-1}$$

Работа первого автора поддержана грантом Сороса.

этого интегрального оператора, находим

$$
\begin{aligned}
{}^kN(\lambda,q_1)-{}^kN(\lambda,q_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_1)-\lambda)^{-1}-\\
-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_2)-\lambda)^{-1}=\\
=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_2)-\lambda)-\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_1)-\lambda)\Big)\times\\
\times(\mu_i(q_1)-\lambda)^{-1}(\mu_i(q_2)-\lambda)^{-1}=\\
=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_2)-\mu_i(q_1)+\mu_i(q_1)-\lambda)-\\
-\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}}(y)(\mu_i(q_1)-\lambda)\Big)(\mu_i(q_1)-\lambda)^{-1}(\mu_i(q_2)-\lambda)^{-1}\equiv\Sigma'+\Sigma'',
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Sigma'=\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_i(q_2)-\mu_i(q_1))(\mu_i(q_1)-\lambda)^{-1}(\mu_i(q_2)-\lambda)^{-1}\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y);\\
\Sigma''=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y)-\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}}(y)\Big)(\mu_i(q_2)-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Теперь для операторной нормы имеем

$$
\begin{aligned}
\|N(\lambda,q_1)-N(\lambda,q_2)\|\le\|N(\lambda,q_1)-N(\lambda,q_2)\|_2=\\
=\Big(\int_S|{}^k[N(\lambda,q_1)-{}^kN(\lambda,q_2)]|^2dx\,dy\Big)^{1/2}=\\
=\Big(\int_S|{}^kN(\lambda,q_1)-{}^kN(\lambda,q_2)|^2dx\,dy\Big)^{1/2}=\Big(\int_S|\Sigma'+\Sigma''|^2dx\,dy\Big)^{1/2}\le\\
\le\Big(\int_S|\Sigma'|^2dx\,dy\Big)^{1/2}+\Big(\int_S|\Sigma''|^2dx\,dy\Big)^{1/2}=\|\Sigma'\|_{\mathcal{L}_2(S)}+\|\Sigma''\|_{\mathcal{L}_2(S)}\le\\
\le\sum_{i=1}^{\infty}|\mu_i(q_1)-\mu_i(q_2)\|\mu_i(q_1)-\lambda|^{-1}|\mu_i(q_2)-\lambda|^{-1}\Big\|\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\Big\|^2_{\mathcal{L}_2(S)}+\\
+\sum_{i=1}^{\infty}\Big\|\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial\nu}}(y)-\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}(x)\overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial\nu}}(y)\Big\|_{\mathcal{L}_2(S\times S)}|\mu_i(q_2)-\lambda|^{-1}\equiv S_1+S_2.
\end{aligned}
$$

В [2] доказано, что при $|n-t_k|>c_1t_k^{\beta}>0$, где $\frac{1}{3}\le\beta\le1$, справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
|\mu_n(q_j)-\mu_{t_k}(q_j)|\ge c_2\max\{t_k,n\}^{\beta}>0,\\
|\mu_n(q_2)-\mu_{t_k}(q_1)|\ge c_3\max\{t_k,n\}^{\beta}>0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Полагая $\lambda=N^2-1+2Ni\equiv\mu_{i_0}(q_1)+2Ni$,

$$\max\{\tfrac{5}{6}-\tfrac{\varepsilon}{2};\tfrac{1}{3}\}<\beta<\min\{1;\varepsilon\},\quad \max\{1-\delta;\tfrac{1}{3}\}<\widetilde{\beta}<\min\{1;\tfrac{1}{3}+\delta\},$$

имеем в силу (3)

$$S_1 \le c_4 \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i(q_1) - \mu_i(q_2)| i^{2/3} |\mu_i(q_1) - \mu_{i_0}(q_1) - 2Ni|^{-1} |\mu_i(q_2) - \mu_{i_0}(q_1) - 2Ni|^{-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{|i-i_0|\le C i_0^{\beta}} + \sum_{|i-i_0|\ge C i_0^{\beta}>0} .$$

В силу (2) и (5) (применительно ко второму слагаемому)

$$\sum_{|i-i_0|\le C i_0^{\beta}} + \sum_{|i-i_0|\ge C i_0^{\beta}>0} \le c_5 \left(\frac{p_0 i_0^{-\varepsilon} i_0^{2/3} i_0^{\beta}}{i_0^{1/3} i_0^{1/3}} + \sum_{|i-i_0|\ge C i_0^{\beta}>0} \frac{p_0 i^{-\varepsilon} i^{2/3}}{i^{2\beta}} \right) \le$$

$$\le c_6 p_0 \left(\frac{1}{i_0^{\varepsilon-\beta}} + \frac{1}{i_0^{2\beta+\varepsilon-5/3}} \right) \to 0$$

при $i_0 \to \infty$. Аналогично

$$S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial u_i(q_1)}{\partial \nu}(x) \overline{\frac{\partial u_i(q_1)}{\partial \nu}}(y) - \frac{\partial u_i(q_2)}{\partial \nu}(x) \overline{\frac{\partial u_i(q_2)}{\partial \nu}}(y) \right\|_{\mathcal{L}_2(S\times S)} |\mu_i(q_2) - \mu_{i_0}(q_1) - 2Ni|^{-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{|i-i_0|\le C_0 i_0^{\widetilde{\beta}}} + \sum_{|i-i_0|\ge C_0 i_0^{\widetilde{\beta}}>0} ,$$

и в силу (4), (5) (применительно ко второму слагаемому)

$$\sum_{|i-i_0|\le C_0 i_0^{\widetilde{\beta}}} + \sum_{|i-i_0|\ge C_0 i_0^{\widetilde{\beta}}>0} \le c_7 \left(\frac{q_0 i_0^{-\delta} i_0^{\widetilde{\beta}}}{i_0^{1/3}} + \sum_{|i-i_0|\ge C_0 i_0^{\widetilde{\beta}}>0} \frac{q_0 i^{-\delta}}{i^{\widetilde{\beta}}} \right) \le$$

$$\le c_8 q_0 \left(\frac{1}{i_0^{\delta-\widetilde{\beta}+1/3}} + \frac{1}{i_0^{\delta+\widetilde{\beta}-1}} \right) \to 0$$

при $i_0 \to \infty$. Подытожив, приходим к равенству

$$\lim_{i_0\to\infty} \|N(\lambda, q_1) - N(\lambda, q_2)\| = 0. \tag{6}$$

Введем функцию рассеяния

$$S(\lambda, \theta, \omega; q_j) = \int_S (N(\lambda, q_j)\varphi_{\lambda,\omega})(x) \overline{\varphi_{\lambda,-\theta}} dS_x,$$

где S_x — элемент площади поверхности, $\varphi_{\lambda,\omega}(x) = \exp(i\sqrt{\lambda}\,\omega x)$, $\|\omega\| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$. Имеем

$$|S(\lambda,\theta,\omega;q_1) - S(\lambda,\theta,\omega;q_2)| = \left| \int_S (N(\lambda,q_1)\varphi_{\lambda,\omega})(x)\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}})(x) dS_x - \int_S (N(\lambda,q_2)\varphi_{\lambda,\omega})(x)\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}(x)} dS_x \right| =$$

$$= \left| \int_S [(N(\lambda,q_1)\varphi_{\lambda,\omega})(x) - (N(\lambda,q_2)\varphi_{\lambda,\omega})(x)] \overline{\varphi_{\lambda,-\theta}(x)} dS_x \right| =$$

$$= \left| \int_S ([N(\lambda,q_1) - N(\lambda,q_2)]\varphi_{\lambda,\omega}(x)] \overline{\varphi_{\lambda,-\theta}(x)} dS_x \right| =$$

$$= \langle [N(\lambda,q_1) - N(\lambda,q_2)]\varphi_{\lambda,\omega},\ \varphi_{\lambda,-\theta} \rangle \le \|[N(\lambda,q_1) - N(\lambda,q_2)]\varphi_{\lambda,\omega}\|_{\mathcal{L}_2(S)} \|\varphi_{\lambda,-\theta}\|_{\mathcal{L}_2(S)} \le$$
$$\le \|N(\lambda,q_1) - N(\lambda,q_2)\| \, \|\varphi_{\lambda,\omega}\|_{\mathcal{L}_2(S)} \|\varphi_{\lambda,-\theta}\|_{\mathcal{L}_2(S)}.$$

Отсюда в силу (6) и равномерной ограниченности $\varphi_{\lambda,\omega}$ получаем

$$\lim_{i_0\to\infty} |S(\lambda,\theta,\omega;q_1) - S(\lambda,\theta,\omega;q_2)| = 0. \tag{7}$$

Доказано [1], что

$$S(\lambda,\theta,\omega;q_j) = -\frac{\lambda}{2}(\theta-\omega)^2\int_\Omega \exp(-i\sqrt{\lambda}(\theta-\omega)x)dx +$$
$$+\int_\Omega \exp(-i\sqrt{\lambda}(\theta-\omega)x)q_j(x)dx - \int_S (R(\lambda)q_j\varphi_{\lambda,\omega})(x)\overline{q_j\varphi_{\lambda,-\theta}(x)}dS_x,$$

где $R(\lambda) = (-\Delta_D + q_j - \lambda)^{-1}$;

$$\lim_{N\to\infty}(St_N,\theta_N,\omega_N;q_j) = -\frac{|\xi|^2}{2}\int_\Omega \exp(-ix\xi)dx + \int_\Omega \exp(-ix\xi)q_j(x)dx,$$

где при $(\xi,\eta)=0$, $\xi\neq 0$ положено

$$c_N = \left(1-\frac{\xi^2}{4N^2}\right)^{1/2}, \quad \theta_N = c_N\eta + \frac{\xi}{2N}, \quad \omega_N = c_N\eta - \frac{\xi}{2N}, \quad \sqrt{t_N} = N+i.$$

Если $N\to\infty$, то $\mu_{i_0}(q_1)\to\infty$, поскольку $\mu_{i_0}(q_1) = N^2-1$, и из (1) следует, что $i_0\to\infty$. Таким образом, в силу (7)

$$\lim_{N\to\infty}|S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_1) - S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_2)| = 0. \qquad (8)$$

Кроме того, ввиду существования пределов $\lim\limits_{N\to\infty} S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_1)$ и $\lim\limits_{N\to\infty} S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_2)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty}|S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_1) - S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_2)| = |\lim_{N\to\infty} S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_1) - \lim_{N\to\infty} S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_2)|.$$

Теперь (8) дает $\lim\limits_{N\to\infty} S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_1) = \lim\limits_{N\to\infty} S(t_N,\theta_N,\omega_N;q_2)$, т.е. $\int\limits_\Omega \exp(-ix\xi)q_1(x)dx = \int\limits_\Omega \exp(-ix\xi)q_2(x)dx$.

Таким образом, показано, что преобразования Фурье для функций q_1 и q_2 совпадают, откуда следует, что $q_1 = q_2$. $\square$

Литература

1. Isosaki H. // J. Math. Kyoto Univ. – 1991. – V. 31. – № 3. – P. 743–753.
2. Дубровский В.В. // УМН. – 1991. – Т.46. – Вып. 3. – С. 187–188.

Магнитогорский государственный
педагогический институт

Поступила
02.10.1997