ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.95

Е.А. МАЗЕПА

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЛИУВИЛЛЕВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. Введение и основные результаты

Данная работа посвящена проблеме разрешимости некоторых краевых задач (аналогов задачи Дирихле) для эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$\Delta u = u\phi(|u|) \equiv g(u), \tag{1}$$

где $\phi(\xi) \geq 0$ — монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая функция при $0 \leq \xi < \infty$, на некомпактном римановом многообразии M без края.

Вопросы существования ограниченных решений и однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) в ограниченных областях R^n достаточно полно изучены в [1]–[3]. В [4]–[8] исследуется проблема существования целых решений для полулинейных эллиптических уравнений в R^n и на компактных римановых многообразиях без края.

Однако не меньший интерес для изучения представляют вопросы, связанные с проблемой разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) на произвольных некомпактных и особенно полных римановых многообразиях с граничными данными на "бесконечности".

В данной работе используется подход к постановке краевых задач, предложенный в [9], устанавливается зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения (1), а также изучается связь между справедливостью лиувиллевых теорем для уравнения (1) и однозначной разрешимостью некоторых внешних краевых задач. При доказательстве некоторых утверждений существенное применение находят идеи и методы, изложенные в [4] и [10].

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)} = \sup\limits_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Ясно, что введенное отношение не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00304а).

В этой связи будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной* (*асимптотически неположительной*), если на M существует такая непрерывная ограниченная функция $w \geq 0$ ($w \leq 0$), что $w \sim f$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует такое решение $u(x)$ уравнения (1), что $u \in [f]$.

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с непустой внутренностью и гладкой границей, $B \subset B_k$ для всех k, $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная на ∂B функция.

Будем говорить, что для непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на $M \setminus B$ существует такое решение $u(x)$ уравнения (1), что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Аналогичным образом можно осуществить постановку краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях для уравнения Лапласа, уравнения Шрёдингера и для ряда других эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см. [9]).

Заметим, что если многообразие M имеет компактный край или существует естественная геометрическая компактификация многообразия M (напр., на многообразиях отрицательной секционной кривизны, на сферически-симметричных многообразиях), добавляющая границу на бесконечности, то данный подход естественным образом приводит к классической постановке задачи Дирихле ([1], [4], [11]–[14]).

Будем говорить, что на многообразии M *выполнена лиувиллева теорема*, если любое ограниченное решение уравнения (1) тождественно равно нулю.

Сформулируем основные результаты.

Пусть G_1, G_2 — некоторые предкомпактные области многообразия M такие, что $B \subset G_1$ и $\overline{G_1} \subset G_2$. Обозначим

$$M_i(v) = \sup_{\partial G_i} v, \quad m_i(v) = \inf_{\partial G_i} v, \quad a^+ = \max\{0, a\}, \quad a^- = \min\{0, a\}.$$

Теорема 1.1. *На M существует ненулевое ограниченное решение $u(x)$ уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда на $M \setminus B$ существует ненулевое ограниченное решение $v(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям*

$$M_1(v) < M_2(v^+), \quad m_1(v) > m_2(v^-). \tag{2}$$

Данная теорема для линейных эллиптических уравнений была доказана в [10].

Теорема 1.2. *Пусть на $M \setminus B$ для уравнения* (1) *для любой постоянной на ∂B функции $\Phi(x)$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Доказательство основных результатов опирается на некоторые аналоги принципа максимума, теоремы сравнения и единственности решения краевых и внешних краевых задач для уравнения (1) (формулировки и доказательства этих утверждений см. в разделе 2).

В разделе 3 изучаются вопросы разрешимости краевых задач и справедливости лиувиллевых теорем при некоторых вариациях правой части уравнения (1).

2. Доказательства основных теорем

Предложение 2.1 (принцип максимума). *Пусть $\Omega \subset M$ — компактное подмножество, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω неравенствам $\Delta u \geq g(u)$ ($\Delta u \leq g(u)$). Тогда $\sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$ ($\inf\limits_{\Omega} u \geq \inf\limits_{\partial\Omega} u^-$). Если же $\Delta u = g(u)$ в Ω, то $\sup\limits_{\Omega} |u| = \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$.*

Доказательство. Из условия вытекает, что $u(x)$ является соответственно субрешением (суперрешением) или решением уравнения Шрёдингера $Lu \equiv \Delta u - c(x)u$, где $c(x) = \phi(|u(x)|) \geq 0$. Дальнейшее доказательство непосредственно следует из справедливости принципа максимума для линейного эллиптического оператора L (напр., [3], с. 40).

Предложение 2.2 (теорема сравнения). *Пусть $\Delta w \leq g(w)$, $\Delta u \geq g(u)$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $w \sim u$, тогда $w \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta w \leq g(w)$, $\Delta u \geq g(u)$ на M, $w \sim u$, тогда $w \geq u$ на M.

Доказательство. Рассмотрим функцию $z = w - u$. Тогда $\Delta z = \Delta w - \Delta u \leq g(w) - g(u)$, т. е. z удовлетворяет неравенству $\Delta z - c(x)z \leq 0$, где $c(x) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(u)}{w-u} & \text{при } z \neq 0; \\ 0 & \text{при } z = 0, \end{cases}$ и условиям $z|_{\partial B} \geq 0$, $z \sim 0$. Причем в силу монотонного возрастания функции $g(\xi)$ и условия $g(0) = 0$ справедливо $c(x) \geq 0$ на $M \setminus B$. Используя принцип сравнения для линейных эллиптических операторов на многообразии (напр., [9]), получаем $z \geq 0$ на $M \setminus B$ и, следовательно, $w \geq u$. Первое утверждение доказано.

Доказательство второго утверждения проводится аналогично. □

Из теоремы сравнения непосредственно следует теорема единственности решений краевых и внешних краевых задач для уравнения (1).

Предложение 2.3 (теорема единственности). *Пусть $\Delta w = g(w)$ и $\Delta u = g(u)$ на $M \setminus B$ и $w|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $w \sim u$, тогда $w = u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta w = g(w)$, $\Delta u = g(u)$ на M и $w \sim u$, тогда $w = u$ на M.

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость. Пусть $u(x)$ — ненулевое ограниченное решение уравнения (1) на M. Положим $v(x) \equiv u(x)$ на $M \setminus B$. Тогда функция $v(x)$ является ненулевым ограниченным решением уравнения (1) на $M \setminus B$. Условия (2) выполняются в силу принципа максимума.

Достаточность. Пусть $v(x)$ — ограниченное решение уравнения (1) на $M \setminus B$, для которого выполняются условия (2). Обозначим $K = \sup_{M \setminus B} |v|$. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Без ограничения общности можем считать, что $\overline{G}_2 \subset B_k$ для всех k. Рассмотрим последовательность функций u_k, которые являются решениями соответствующих задач

$$\begin{gathered} \Delta u_k = u_k \phi(|u_k|) \quad \text{в} \quad B_k, \\ u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k}. \end{gathered} \tag{3}$$

Решения u_k существуют в силу условий, наложенных на коэффициенты уравнения (1) (см. [3], с. 347–351). Тогда для каждого k функция u_k является решением уравнения Шрёдингера $\Delta u_k - c_k(x)u_k = 0$, где $0 \leq c_k(x) = \phi(|u_k|)$ (напр., [4]).

В силу принципа максимума для всех k имеем

$$|u_k| \leq \sup_{B_k} |u_k| = \sup_{\partial B_k} |u_k| \leq K.$$

Используя внутренние оценки градиентов в комбинации с внутренними оценками производных в пространстве Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$ ([3], сс. 294, 346), для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M$ получаем, что семейство функций $c_k(x) = \phi(|u_k(x)|)$ имеет равномерно ограниченные нормы в $C^\alpha(\Omega)$. Тогда с учетом внутренних оценок Шаудера (напр., [3], сс. 91, 94–95) получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Последнее условие влечет существование функции $u = \lim_{k\to\infty} u_k$, которая является решением уравнения (1) на M.

Покажем, что $u \not\equiv 0$. Предположим противное, $u \equiv 0$. Рассмотрим последовательность функций $w_k = v - u_k$, каждая из которых является решением уравнения $\Delta w_k - c_k(x) w_k = 0$, где

$$c_k(x) = \begin{cases} \frac{g(v)-g(u_k)}{v-u_k} & \text{при } \ w_k \neq 0; \\ 0 & \text{при } \ w_k = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $c_k(x) \geq 0$.

Кроме того, выполнены условия

$$w_k|_{\partial B_k} = 0, \quad w_k|_{\partial B} = v|_{\partial B} - u_k|_{\partial B}$$

и $w_k \to v$ при $k \to \infty$.

В силу условий (2) теоремы 1.1 при достаточно больших k имеем

$$M_1(w_k) < M_2(w_k^+), \quad m_1(w_k) > m_2(w_k^-). \tag{4}$$

Применим принцип максимума для решений уравнения Шрёдингера к функции w_k в $B_k \setminus \overline{G}_1$:

$$M_1(w_k^+) \geq M_2(w_k) \quad \text{и} \quad m_1(w_k^-) \leq m_2(w_k). \tag{5}$$

Объединяя условия (4) и (5), легко получим

$$M_2(w_k) \leq 0, \quad M_1(w_k) < 0. \tag{6}$$

Действительно, рассмотрим два случая: $M_2(w_k^+) > 0$ и $M_2(w_k^+) = 0$. Если $M_2(w_k^+) > 0$, то $M_2(w_k) = M_2(w_k^+) > 0$, и из (4) имеем $M_1(w_k) < M_2(w_k^+) = M_2(w_k) \leq M_1(w_k^+)$. Последнее неравенство возможно лишь в случае, если $M_1(w_k) < 0$ и $M_1(w_k^+) = 0$. Тогда из (5) $M_2(w_k) \leq 0$. Пришли к противоречию.

Значит, $M_2(w_k^+) = 0$. Тогда из (4) имеем $M_1(w_k) < 0$, следовательно, $M_1(w_k^+) = 0$ и из (5) вытекает $M_2(w_k) \leq 0$. Аналогично получаем

$$m_2(w_k) \geq 0 \quad \text{и} \quad m_1(w_k) > 0,$$

что невозможно одновременно с (6). Значит, $u \not\equiv 0$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Обозначим через $v \in [f]$ решение внешней краевой задачи для уравнения (1) на $M \setminus B$, удовлетворяющее условию $v|_{\partial B} = 0$.

Рассмотрим последовательность функций u_k, являющихся решением задач (3) с новой функцией v.

Как и при доказательстве теоремы 1.1, получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\alpha}(\Omega)$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Последнее условие влечет существование функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является решением уравнения (1) на M.

Докажем далее, что $u \in [f]$. Действительно, в силу непрерывности функции $u(x)$ существуют $U_1 = \min\limits_{\partial B} u(x)$, $U_2 = \max\limits_{\partial B} u(x)$. Тогда $U_1 \leq u|_{\partial B} \leq U_2$ и, следовательно, при достаточно больших k выполнено $U_1 - 1 \leq u_k|_{\partial B} \leq U_2 + 1$. Пусть $A_1 = \min\{0, U_1 - 1\}$, $A_2 = \max\{0, U_2 + 1\}$. Учитывая, что $v|_{\partial B} = 0$, имеем $A_1 \leq v|_{\partial B} \leq A_2$, и $A_1 \leq u_k|_{\partial B} \leq A_2$ для достаточно больших k. Согласно условию теоремы на $M \setminus B$ существуют решения $v_1 \in [f]$ и $v_2 \in [f]$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям $v_1|_{\partial B} = A_1$, $v_2|_{\partial B} = A_2$. Так как $v_1 \sim v_2 \sim v$ и $v_1|_{\partial B} \leq v|_{\partial B} \leq v_2|_{\partial B}$, то согласно теореме сравнения на $M \setminus B$ получаем $v_1 \leq v \leq v_2$. Тогда для достаточно больших k выполнено

$$v_1|_{\partial B_k} \leq u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k} \leq v_2|_{\partial B_k},$$
$$v_1|_{\partial B} \leq u_k|_{\partial B} \leq v_2|_{\partial B}.$$

Применяя теорему сравнения к функциям u_k, на множестве $B_k \setminus B$ имеем $v_1 \leq u_k \leq v_2$. Перейдем к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получим $v_1 \leq u \leq v_2$. Учитывая, что $v_1 \sim v_2 \sim v$, получаем $u \sim v$ и, следовательно, $u \in [f]$. $\square$

Заметим, что если f — асимптотически неотрицательная (неположительная) функция, то условие теоремы можно ослабить, потребовав разрешимость внешних краевых задач в классе $[f]$ только для неотрицательных (неположительных) постоянных на ∂B функций $\Phi(x)$.

Путем применения теоремы 1.1 получается

Следствие 2.1. На M для уравнения (1) справедлива лиувиллева теорема тогда и только тогда, когда на $M \setminus B$ любое ограниченное решение $v(x)$ уравнения (1) такое, что $\frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\partial B} = 0$, тождественно равно нулю, где ν — нормаль к ∂B.

Заметим, что утверждения теоремы 1.1 и следствия 2.1 являются обощением аналогичных результатов, полученных для решений линейных эллиптических уравнений в [10].

3. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы при вариациях функции $\phi(\xi)$

В этом разделе наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнения

$$\Delta u = u\phi_i(|u|) \equiv g_i(u), \tag{7}$$

где $i = 1, 2$ и $\phi_i(\xi) \geq 0$ — монотонно возрастающие, непрерывно дифференцируемые функции при $0 \leq \xi < \infty$.

Теорема 3.1. *Пусть $\phi_1(\xi) \leq \phi(\xi) \leq \phi_2(\xi)$. Тогда если на $M \setminus B$ для любой постоянной $A \geq 0$ ($A \leq 0$) разрешима внешняя краевая задача для уравнений (7) при $i = 1, 2$ с граничными условиями из класса $[f]$, где f — асимптотически неотрицательная (неположительная) на M функция, то*

1) *на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \geq 0$ ($\Phi(x) \leq 0$) для уравнения (1) разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$;*
2) *на M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.*

Доказательство проведем для случая асимптотически неотрицательной функции f. Для асимптотически неположительной функции доказательство проводится аналогично.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная неотрицательная на ∂B функция. Обозначим $A_1 = \sup\limits_{\partial B} \Phi(x) \geq 0$. По условию существует такая функция u_0 — ограниченное решение внешней краевой задачи для уравнения (7) при $i = 1$ на $M \setminus B$, что $u_0 \in [f]$ и $u_0|_{\partial B} = A_1|_{\partial B}$, причем $0 \leq u_0 \leq K$ на $M \setminus B$, где $K = \sup\limits_{M \setminus B} u_0$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta u_k = g(u_k) \ \text{ в } \ B_k \setminus B, \\ u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}, \\ u_k|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}. \end{gathered}$$

Учитывая принцип максимума, для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup\limits_{\partial B_k \cup \partial B} u_k \leq K$, откуда следует равномерная ограниченность семейства функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $M \setminus B$. Как и в теореме 1.2, из равномерной ограниченности семейства получаем компактность семейства функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ в классе $C^{2,\alpha}(\Omega)$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$ и, следовательно, существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является решением уравнения (1) на $M \setminus B$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Кроме того, $\Delta u_0 = g_1(u_0) \leq g(u_0)$, $\Delta u_k = g(u_k)$ в B_k, $u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$, $u_k|_{\partial B} \leq u_0|_{\partial B}$. Тогда с учетом принципа сравнения в $B_k \setminus B$ получаем $u_k \leq u_0$. Следовательно, $0 \leq u \leq u_0$ на $M \setminus B$.

Покажем, что $u \sim u_0$. Согласно условию на $M \setminus B$ существует решение v_0 уравнения (7) при $i = 2$ такое, что $v_0|_{\partial B} = 0$ и $v_0 \in [f]$. Используя принцип сравнения для решений уравнения (1) на $M \setminus B$, получаем $u_0 \geq v_0 \geq 0$. Более того, для каждого k имеют место следующие неравенства:

$$\Delta u_k = g(u_k) \leq g_2(u_k) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B,$$
$$v_0|_{\partial B} \leq u_k|_{\partial B}, \quad v_0|_{\partial B_k} \leq u_k|_{\partial B_k}.$$

Тогда по принципу сравнения в $B_k \setminus B$ имеем $u_k \geq v_0$, и, следовательно, $u_0 \geq u_k \geq v_0 \geq 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получаем $u_0 \geq u \geq v_0$. Так как $u_0 \sim v_0 \sim f$, то $u \sim f$. Утверждение 1) доказано.

Доказательство утверждения 2) следует из теоремы 1.2 и замечания в конце второго раздела. □

Обозначив $K_1 = \sup\limits_M |f|$, $\lambda = \phi(K_1) \geq 0$, получим

Следствие 3.1. Пусть на $M \setminus B$ для любой постоянной $A \geq 0$ $(A \leq 0)$ разрешимы внешние краевые задачи для уравнений $\Delta u = 0$ и $\Delta u - \lambda u = 0$ с граничными условиями из класса $[f]$, где $f \not\equiv$ — асимптотически неотрицательная (неположительная) на M функция. Тогда

1) на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \geq 0$ $(\Phi(x) \leq 0)$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]$;
2) на M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.

Теорема 3.2. *Пусть $0 \leq \phi_1(\xi) \leq A\phi(\xi)$, где $A = \mathrm{const} > 0$, $\phi_1(\xi) \not\equiv 0$ при $\xi \geq 0$. Если на M выполнена лиувиллева теорема для уравнения* (7) *при $i = 1$, то она выполнена и для уравнения* (1).

Доказательство. Пусть существует функция $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения $\Delta u_0 = g(u_0)$ на M.

Рассмотрим сначала случай, когда $\phi_1(\xi) \leq \phi(\xi)$ для $\xi \geq 0$. Покажем, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения $\Delta u = g_1(u)$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k = g_1(u_k) \quad \text{в} \quad B_k,$$
$$u_k|_{\partial B_k} = u_0^+|_{\partial B_k}.$$

Можем считать, что $u_0^+ \not\equiv 0$. Тогда, учитывая принцип максимума, для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup\limits_M u_0$. Так как

$$\Delta u_k = g_1(u_k) \leq g(u_k), \quad \Delta u_0 = g(u_0), \quad u_k|_{\partial B_k} \geq u_0|_{\partial B_k},$$

то по принципу сравнения $u_k \geq u_0$ и, следовательно, $u_k \geq u_0^+$ в B_k.

Как и в теореме 1.2, доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая является ограниченным положительным решением уравнения (7) на M. Пусть теперь $\phi_1(\xi) \leq A\phi(\xi)$ для $\xi \geq 0$, $A \geq 1$. Можем считать, что u_0 — положительное ограниченное решение уравнения (1), в противном случае вместо u_0 возьмем u_0^+. Покажем, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения $\Delta u = Ag(u)$.

Рассмотрим решения следующих краевых задач:

$$\Delta u_k = Ag(u_k) \quad \text{в} \quad B_k,$$
$$u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

Так как $0 \le u_k \le \sup\limits_M u_0$, то существует функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, причем $0 \le u \le \sup\limits_M u_0$. Кроме того, с учетом принципа сравнения в B_k выполнено $u_k \le u_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции w_k, $\overline{v}_k$, $\overline{u}_k$, которые являются соответственно решениями следующих краевых задач в области B_k:

$$\begin{array}{lll} \Delta w_k = 0, & \Delta\overline{v_k} = -g(u_0), & \Delta\overline{u_k} = -Ag(u_k), \\ w_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}, & \overline{v_k}|_{\partial B_k} = 0, & \overline{u_k}|_{\partial B_k} = 0. \end{array}$$

Ясно, что $w_k - \overline{u_k} = u_k$, $w_k - \overline{v_k} = u_0$ и $u_0 \le w_k \le \sup\limits_M u_0$, $\overline{u_k} \ge 0$, $\overline{v_k} \ge 0$. Покажем, что $\overline{u_k} \le A\overline{v_k}$. Действительно, $\Delta(A\overline{v_k}) = -Ag(u_0) \le -Ag(u_k) = \Delta\overline{u_k}$, тогда из принципа сравнения получаем $A\overline{v_k} \ge \overline{u_k}$. Далее, выберем точку x_0, в которой $u_0(x_0) > \sup\limits_M u_0 - \varepsilon$. Тогда

$$w_k(x_0) > \sup_M u_0 - \varepsilon,$$
$$\overline{v_k}(x_0) = w_k(x_0) - u_0(x_0) \le \sup_M u_0 - u_0(x_0) < \varepsilon,$$
$$\overline{u_k}(x_0) < A\varepsilon, \quad u_k(x_0) = w_k(x_0) - \overline{u_k}(x_0) > \sup_M u_0 - (A+1)\varepsilon.$$

Отсюда при $k \to \infty$ получаем $u(x_0) \ge \sup\limits_M u_0 - (A+1)\varepsilon > 0$ при достаточно малом ε. Функция u является положительным ограниченным решением уравнения $\Delta u = Ag(u)$. Возвращаясь к случаю, разобранному в начале доказательства, окончательно заключаем справедливость теоремы. $\square$

Заметим, что данный результат для линейных эллиптических уравнений был получен в [10].

Литература

1. Ландис Е.М. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* – М.: Наука, 1971. – 288 с.
2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.
3. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. Ландис Е.М. *О задаче Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений* // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – № 3. – С. 49–53.
5. Vazqnez J.-L., Verson L. *Solutions positives d'equations elliptiques semi-lineares sur des varietes riemanniennes compactes* // C.R. Acad. Sci. – 1991. – V. 312. – Ser. I. – P. 811–815.
6. Garcia-Huidobro M., Manasevich R., Ubilla P. *Existence of positive solutions for some Dirichlet problems with an asymptotically homogeneous operator* // Electronic J. Diff. Eq. – 1995. – V. 1. – № 10. – P. 1–22.
7. Naito Y., Usami H. *Entire solutions of the inequality* $\operatorname{div}(A(|Du|)Du) \ge f(u)$ // Math. Z. – 1997. – V. 225. – P. 167–175.
8. Ambrosio L., Cabre X. *Entire solutions of semilinear elliptic equations in* R^3 *and a conjecture of de Giorgi* // J. AMS. – 2000. – V. 13. – № 4. – P. 725–739.
9. Мазепа Е.А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 591–599.
10. Григорьян А.А., Надирашвили Н.С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 25–33.
11. Лосев А.Г. *Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 4. – С. 558–564.

12. Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях специального вида* // Докл РАН. – 1999. – Т. 367. – № 2. – С. 166–167.
13. Sullivan D. *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds* // J. Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – P. 722–732.
14. Anderson M.T. *The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature* // J. Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – P. 701–722.

Волгоградский государственный университет

Поступила
07.12.2002