ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.9

О.Г. АВСЯНКИН, В.М. ДЕУНДЯК

ОБ ИНДЕКСЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С БИОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

Интегральные операторы с однородными ядрами играют важную роль в различных разделах математики и механики. Изучение таких операторов в многомерной ситуации было начато в [1], продолжилось в [2]–[4] (см. также библиографию в них) и в данной работе.

Определим C^*-алгебру многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами. В пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} k(x,y)f(y)dy, \qquad (0.1)$$

ядро $k(x,y)$ которого удовлетворяет следующим условиям:

1°. однородности степени $(-n)$, т. е. $\forall \alpha > 0 \;\; k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$,

2°. инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbf{R}^n$, т. е.

$$\forall \omega \in SO(n) \;\; k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y),$$

3°. суммируемости, т. е.

$$\int_{\mathbf{R}^n} |k(e_1, y)|\, |y|^{-n/2} dy < +\infty, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

Пусть $\mathcal{A}$ — множество всех функций $a \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$, для каждой из которых существуют такие числа a_0 и a_∞, что для любого компактного множества $M \subset \mathbf{R}^n$ выполняются условия

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_M |a(\varepsilon x) - a_0| dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_M |a(\varepsilon x) - a_\infty| dx = 0. \qquad (0.2)$$

Обозначим через $\mathcal{B}_n$ C^*-алгебру, порожденную операторами

$$B = \lambda I + M_a K + T, \qquad (0.3)$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$, M_a — оператор умножения на функцию $a \in \mathcal{A}$, K — оператор вида (0.1), T — компактный оператор. В [3] для алгебры $\mathcal{B}_n$ построено символическое исчисление, получены критерий фредгольмовости и формула для вычисления индекса.

В данной работе исследуются многомерные операторы с биоднородными ядрами и переменными коэффициентами, т. е. операторы из топологического тензорного произведения $\mathcal{B}_{n_1,n_2} = \mathcal{B}_{n_1} \otimes \mathcal{B}_{n_2}$. Для таких операторов в разделе 3 построен операторнозначный символ, в терминах которого найдены необходимые и достаточные условия фредгольмовости, и получена топологическая формула для вычисления индекса. Существенным моментом для вычисления индекса

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00917, и программы Министерства образования Российской Федерации, грант № Е00-1.0-166.

является теорема о вложении C^*-алгебры $\mathcal{B}_n$ в C^*-алгебру операторов Винера–Хопфа с компактными коэффициентами, которая получена в разделе 2.

1. Предварительные сведения и результаты

1.1. *Операторы Винера–Хопфа на полупрямой.* Всюду в работе $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ — множества целых, действительных и комплексных чисел соответственно. Если $\mathcal{H}$ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство, то $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ — идеал компактных операторов. Пусть $\mathrm{Fr}(\mathcal{V})$ — пространство фредгольмовых операторов из алгебры $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{U}$ — произвольная C^*-алгебра, то $L(n;\mathcal{U}) = L(n;\mathbf{C}) \otimes \mathcal{U}$ — C^*-алгебра $n \times n$-матриц над $\mathcal{U}$, $G\mathcal{U}$ — группа обратимых элементов из $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^+$ — унитализация $\mathcal{U}$, $GL_{\mathcal{K}(\mathcal{H})} = G(\mathcal{K}(\mathcal{H}))^+$, $GL(\infty;\mathcal{U}) = \lim\limits_{n\to\infty} GL(n;\mathcal{U})$ — прямой предел группового спектра $\{GL(n;\mathcal{U}); i_{n,k}\}$, где $i_{n,k}$ — естественное диагональное вложение $GL(n;\mathcal{U})$ в $GL(n+k;\mathcal{U})$.

Для компакта X и метризуемого пространства Y через $C(X;Y)$ будем обозначать пространство непрерывных отображений X в Y с равномерной топологией, пусть $C(X) = C(X;\mathbf{C})$. Для локально компактного не компактного пространства X через $\dot{X}$ будем обозначать компактификацию X точкой ∞. Если Y — топологическая группа или C^*-алгебра, то и $C(X;Y)$ — топологическая группа или C^*-алгебра с обычными операциями. В случае, когда Y — пунктированное H-пространство ([5], с. 80), в множестве $[X;Y] = \pi_0(C(X;Y);I)$, состоящем из компонент линейной связности пространства $C(X;Y)$, естественно определяется групповая структура; если $f \in C(X;Y)$, то соответствующий элемент из $\pi_0(C(X;Y);I)$ будем обозначать $[f]$. Для произвольного множества X через id_X будем обозначать тождественное преобразование X.

Пусть $\mathbf{R}_\pm = \{t \in \mathbf{R} \mid \pm t \geq 0\}$, $\mathbf{Z}_\pm = \mathbf{R}_\pm \cap \mathbf{Z}$. Равенство

$$(Bf)(x) = \int_0^\infty b(x-y)f(y)dy, \tag{1.1}$$

где $b \in L_1(\mathbf{R})$, определяет в пространстве $L_2(\mathbf{R}_+)$ оператор Винера–Хопфа B, символом которого называется преобразование Фурье $\widehat{b}$ ядра b. C^*-алгебру с единицей, порожденную операторами вида (1.1), обозначим через $\mathcal{W}$. Теория фредгольмовости матричных операторов Винера–Хопфа, т. е. операторов из $L(m;\mathcal{W})$, содержится в ([6], с. 277). Приведем в удобном виде некоторые результаты этой теории.

Сопоставление оператору B символа $\widehat{b}$ продолжается до символа-гомоморфизма $s : \mathcal{W} \to C(\dot{\mathbf{R}})$, причем короткая последовательность

$$0 \to \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}_+)) \xrightarrow{\iota} \mathcal{W} \xrightarrow{s} C(\dot{\mathbf{R}}) \to 0,$$

где ι — вложение, является точной. В результате тензорного произведения членов этой последовательности на C^*-алгебру $L(m;\mathbf{C})$ получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{K}(L_2^m(\mathbf{R}_+)) \xrightarrow{\iota^{(m)}} L(m;\mathcal{W}) \xrightarrow{s^{(m)}} L(m;C(\dot{\mathbf{R}})) \to 0, \tag{1.2}$$

где $\iota^{(m)}$ — вложение, а $s^{(m)} = s \otimes \mathrm{id}_{L(m;\mathbf{C})}$ — символ-гомоморфизм. Из точности (1.2) вытекает: если $B \in L(m;\mathcal{W})$, то

$$B \in \mathrm{Fr}(L(m;\mathcal{W})) \iff s^{(m)}(B) \in C(\dot{\mathbf{R}}; GL(m;\mathcal{W}))(\subset C(\dot{\mathbf{R}}; GL(\infty;\mathcal{W}))).$$

Индекс оператора B из $\mathrm{Fr}(L(m;\mathcal{W}))$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{ind}(B) = -(1/2\pi)\Delta\arg(\det\sigma^{(m)}(B))|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Сопоставление $(\varphi(\in C(\dot{\mathbf{R}}; GL(m;\mathbf{C}))) \mapsto -(1/2\pi)\Delta\arg(\det\varphi)|_{-\infty}^{+\infty})$ порождает изоморфизм $[\dot{\mathbf{R}}; GL(m;\mathbf{C})]$ на $\mathbf{Z}$, который будем обозначать через $i_{\mathcal{W}^{(m)}}^{(t)}$. Таким образом,

$$\mathrm{ind}(B) = i_{\mathcal{W}^{(m)}}^{(t)}([s^{(m)}(B)]). \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим C^*-алгебру $\mathcal{W}^{(\mathcal{K}(\mathcal{H}))} = (\mathcal{W} \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))^+$, элементы которой будем называть операторами Винера–Хопфа с компактными коэффициентами. Аналогично (1.2) получим короткую точную последовательность, заменяя $L(m; \mathbf{C})$ на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ и используя унитализацию,

$$0 \to \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{H}) \xrightarrow{\iota^{(\mathcal{K}(\mathcal{H}))}} \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(\mathcal{H}))} \xrightarrow{s^{(\mathcal{K}(\mathcal{H}))}} C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(\mathcal{H})) \to 0, \tag{1.4}$$

где $\iota^{(\mathcal{K}(\mathcal{H}))}$ — вложение, а $s^{(\mathcal{K}(\mathcal{H}))} = s \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ — символ-гомоморфизм.

Замечание 1.1. В тех случаях, когда гильбертово пространство $\mathcal{H}$ зафиксировано, во введенных выше обозначениях для краткости вместо $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ будем писать иногда $\mathcal{K}$. В частности, до конца этого раздела $\mathcal{H}$ — произвольное фиксированное гильбертово пространство, а в разделе 3 это пространство будет конкретизировано.

Из точности (1.4) вытекает: если $B \in \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}$, то

$$B \in \mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})}) \iff s^{(\mathcal{K})}(B) \in GC^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

Вычислим индекс операторов из $\mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})})$. Естественное вложение $GL(m; \mathbf{C})$ в $GL(\infty; \mathbf{C})$ индуцирует изоморфизм $j_m : [\dot{\mathbf{R}}; GL(m; \mathbf{C})] \to [\dot{\mathbf{R}}; GL(\infty; \mathbf{C})]$, а осуществляющее гомотопическую эквивалентность вложение $GL(\infty; \mathbf{C})$ в $GL_{\mathcal{K}}$ индуцирует изоморфизм

$$j_{\mathcal{K}} : [\dot{\mathbf{R}}; GL(\infty; \mathbf{C})] \to [\dot{\mathbf{R}}; GL_{\mathcal{K}}] = \pi_0(GC^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(\mathcal{H})); I)$$

(см. [7]). Рассмотрим изоморфизм

$$i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})}} = i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(m)}} j_m^{-1} j_{\mathcal{K}}^{-1} : [\dot{\mathbf{R}}; GL_{\mathcal{K}}] \to \mathbf{Z}. \tag{1.5}$$

Из формулы (1.3) и гомотопической устойчивости индекса вытекает, что для $B \in \mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})})$

$$\mathrm{ind}(B) = i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})}}([s^{(\mathcal{K})}(B)]). \tag{1.6}$$

1.2. *Операторы Винера–Хопфа в четверть-плоскости.* C^*-алгебра операторов Тёплица в четверть-плоскости $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$ исследована диаграммным методом в [8], где построено символическое исчисление и получены условия фредгольмовости. Метод Дугласа–Хоува можно применять к исследованию как интегральных операторов Винера–Хопфа в четверть-плоскости $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, так и других классов операторов типа бисингулярных. Применим этот метод к C^*-алгебре $\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}$ для построения в удобном для нас виде символического исчисления и формулировки результатов о фредгольмовости.

Пусть $\mathcal{Q}_1 = C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2)) \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}$, $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2))$, $\mathcal{Q}_0 = C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2)) \otimes C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2))$. Рассмотрим пару частичных символов

$$s_{(1)} : \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \to \mathcal{Q}_1, \quad s_{(2)} : \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \to \mathcal{Q}_2,$$

где $s_{(1)} = s^{(\mathcal{K})} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})}}$, $s_{(2)} = \mathrm{id}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})}} \otimes s^{(\mathcal{K})}$ (см. (1.4)), и слабый символ

$$s_{(0)} = s^{(\mathcal{K})} \otimes s^{(\mathcal{K})} : \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \to \mathcal{Q}_0.$$

Пара эпиморфизмов $h = (\mathrm{id}_0 \otimes s^{(\mathcal{K})}, s^{(\mathcal{K})} \otimes \mathrm{id}_0)$, где $\mathrm{id}_0 = \mathrm{id}_{C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(\mathcal{H}))}$, определяет расслоенную сумму C^*-алгебр (см. [9], с. 96)

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \oplus_h \mathcal{Q}_2 = \{(b_1, b_2) : b_j \in \mathcal{Q}_j,\ (\mathrm{id}_0 \otimes s^{(\mathcal{K})})(b_1) = (s^{(\mathcal{K})} \otimes \mathrm{id}_0)(b_2)\}.$$

Полным символом C^*-алгебры $\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}$ назовем гомоморфизм

$$s_{(1,2)} : \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \to \mathcal{Q}, \tag{1.7}$$

определяемый формулой $s_{(1,2)}(A) = (s_{(1)}(A), s_{(2)}(A))$. Доказательство следующей теоремы нетрудно провести методом из [8] на основе исследования (5×5)-диаграммы, получаемой с помощью тензорного произведения двух коротких точных последовательностей вида (1.4).

Теорема 1.1. *Пусть* $A \in \mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}$. *Тогда*
1) $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}) \Leftrightarrow s_{(1,2)}(A) \in G\mathcal{Q}$;
2) $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}) \Leftrightarrow s_{(j)}(A) \in G\mathcal{Q}_j$, $j \in \{1,2\}$;
3) $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}) \Rightarrow \sigma_{(0)}(B) \in G\mathcal{Q}_0$.

Индекс операторов Тёплица в дискретной четверть-плоскости впервые был вычислен в [10], где для произвольного оператора Тёплица построен путь в пространстве фредгольмовых операторов, соединяющий его с некоторым простым оператором, чей индекс вычислялся явно. Этот же метод подходит и для интегральных аналогов операторов Тёплица — операторов Винера–Хопфа. Ниже, в теореме 1.2, приведена топологическая формула для индекса операторов из $\mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})})$, в которой индекс выражен через гомотопический инвариант символа.

В группе $G\mathcal{Q}$ выделим специальную подгруппу

$$G_0\mathcal{Q} = \{(b, I) : b \in GC^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2 \otimes L_2(\mathbf{R}_+) \otimes l_2))\}$$

и рассмотрим группы компонент линейной связности $\pi_0(G_0\mathcal{Q}; I)$ и $\pi_0(G\mathcal{Q}; I)$. Нетрудно проверить, что группы $G_0\mathcal{Q}$ и $GC^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2 \otimes L_2(\mathbf{R}_+) \otimes l_2))$ естественно изоморфны, и, следовательно, сопоставление элементу $(b, I) \in G_0\mathcal{Q}$ числа $i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})}}(b)$ (см. (1.5)) корректно задает изоморфизм $d_0 : \pi_0(G_0\mathcal{Q}; I) \to \mathbf{Z}$. С помощью формулы (1.6) и некоторой модификации конструкции пути из [10] доказывается

Теорема 1.2. *Вложение* $\lambda : G_0\mathcal{Q} \to G\mathcal{Q}$ *индуцирует изоморфизм* $\lambda_0 : \pi_0(G_0\mathcal{Q}; I) \to \pi_0(G\mathcal{Q}; I)$. *Если* $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})})$, *то* $\mathrm{ind}(A) = i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}}([s_{(1,2)}(A)])$, *где* $i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}} = d_0 \lambda_0^{-1} : \pi_0(G\mathcal{Q}; I) \to \mathbf{Z}$ *— гомоморфизм топологического индекса.*

Отметим, что для многомерных обобщенных теплицевых операторов близкий результат содержится в [11], а для семейств многомерных бисингулярных операторов — в [12].

2. Операторы с однородными ядрами

2.1. *Символическое исчисление и фредгольмовость.* Пусть P — оператор умножения на характеристическую функцию единичного шара, $Q = I - P$. Приведем эквивалентное описание определенной во введении C^*-алгебры $\mathcal{B}_n$.

Лемма 2.1. *Пусть* $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ — C^**-алгебра, порожденная операторами*

$$A = \lambda I + K^{(1)} P + K^{(2)} Q + \widetilde{T}, \tag{2.1}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$, $\widetilde{T} \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}^n))$, $K^{(j)}$ *— оператор вида* (0.1) *с ядром* $k^{(j)}$, *удовлетворяющим условиям* 1°–3°. *Тогда* $\widetilde{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B}_n$.

Доказательство. C^*-алгебра $\mathcal{B}_n$ порождена операторами вида (0.3):

$$B = \lambda I + M_a K + T_1,$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$, M_a — оператор умножения на функцию $a \in \mathcal{A}$, K — оператор вида (0.1), $T_1 \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}^n))$. В ([3], с. 6) показано, что $M_a K = a_0 PK + a_\infty QK + T_2$, где $T_2 \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}^n))$, а числа a_0 и a_∞ определяются функцией a (см. (0.2)). В силу $PKQ, QKP \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}^n))$ ([4], с. 380) отсюда получаем

$$B = \lambda I + a_0 PK + a_\infty QK + T_1 + T_2 = \lambda I + a_0 KP + a_\infty KQ + T,$$

где $T \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}^n))$. Поэтому $\mathcal{B}_n \subset \widetilde{\mathcal{B}}_n$. Обратное вложение очевидно. $\square$

Приведем в удобном виде основные результаты о фредгольмовости операторов из алгебры $\mathcal{B}_n$. Пусть $x \cdot y$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbf{R}^n$, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, $\mathcal{P}_m(t)$ — многочлен Лежандра степени m ([13], с. 41), $\mathcal{M}$ — компактификация произведения $\{1;2\}\times\mathbf{Z}_+\times\mathbf{R}$ точкой ∞. Сопоставление оператору A вида (2.1) его символа $\sigma_n(A)\in C(\mathcal{M})$, определяемого равенством

$$(\sigma_n(A))(j,m,\xi)=\lambda+\int_{\mathbf{R}^n}k^{(j)}(e_1,y)\mathcal{P}_m((e_1\cdot y)/|y|)|y|^{-n/2+i\xi}dy, \tag{2.2}$$

продолжается до символа-гомоморфизма $\sigma_n:\mathcal{B}_n\to C(\mathcal{M})$, причем короткая последовательность

$$0\to\mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}^n))\xrightarrow{\gamma_n}\mathcal{B}_n\xrightarrow{\sigma_n}C(\mathcal{M})\to 0, \tag{2.3}$$

где γ_n — вложение, является точной. Из точности (2.3) вытекает критерий фредгольмовости: если $A\in\mathcal{B}_n$, то $A\in\mathrm{Fr}(\mathcal{B}_n)\iff\sigma_n(A)\in GC(\mathcal{M})$.

2.2. *Вложение алгебры $\mathcal{B}_n$ в алгебру операторов Винера–Хопфа с компактными коэффициентами.* Пусть S_{n-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$. Переход в $\mathbf{R}^n$ от декартовых координат к сферическим позволяет отождествить $L_2(\mathbf{R}^n)$ с тензорным произведением $L_2(\mathbf{R}_+,r^{n-1})\otimes L_2(S_{n-1})$, где $L_2(\mathbf{R}_+,r^{n-1})$ — весовое L_2-пространство с обычной нормой.

В пространстве $L_2(S_{n-1})$ рассмотрим подпространство сферических гармоник порядка $m\in\mathbf{Z}_+$ и зафиксируем в этом подпространстве ортонормированный базис $\{Y_{m,\mu}\}_{\mu=1,\dots,d_n(m)}$, где

$$d_n(m)=(n+2m-2)\frac{(n+m-3)!}{m!(n-2)!}.$$

Лексикографическое упорядочение множества $\{(m,\mu)\mid m\in\mathbf{Z}_+,\ \mu=1,\dots,d_n(m)\}$ позволяет задать биективное отображение множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ на это множество и определить тем самым для каждого $j\in\mathbf{N}$ пару индексов $m(j)\in\mathbf{Z}_+$, $\mu(j)\in\{1,\dots,d_n(m)\}$. Известно ([13], с. 34), что система $\{Y_{m,\mu}\}_{m\in\mathbf{Z}_+;\ \mu=1,\dots,d_n(m)}$ полна в $L_2(S_{n-1})$, а сопоставление функции $\varphi\in L_2(S_{n-1})$ чисел

$$\varphi_{m,\mu}=\int_{S_{n-1}}\varphi(\eta)Y_{m,\mu}(\eta)d\eta,$$

где $m\in\mathbf{Z}_+$ и $\mu=1,\dots,d_n(m)$, определяет изоморфизм

$$F:\ L_2(S_{n-1})\to l_2, \tag{2.4}$$

называемый преобразованием Фурье–Лапласа. Рассмотрим в l_2 естественный базис $\{\varepsilon_j\}$ и через P_j обозначим оператор проектирования на одномерное подпространство, порожденное элементом ε_j.

Замечание 2.1. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство, а $\{A_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{L}(l_2)$ — ограниченная последовательность. Тогда сумма $\sum\limits_{j=1}^\infty A_j\otimes P_j$ корректно определяет "диагональный" ограниченный оператор $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{L}(l_2)$, причем $\|A\|=\sup\{\|A_j\|\}$.

Нетрудно проверить, что оператор $V_1:\ L_2(\mathbf{R}_+,r^{n-1})\to L_2(\mathbf{R})$, определяемый формулой

$$(V_1f)(t)=e^{-nt/2}f(e^{-t}),\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5}$$

является изоморфизмом. Рассмотрим также изоморфизм $V_2:\ L_2(\mathbf{R})\to L_2^2(\mathbf{R}_+)$, задаваемый равенством

$$(V_2f)(t)=(f(t),f(-t)),\quad t\in\mathbf{R}_+. \tag{2.6}$$

Если $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — гильбертовы пространства, а $W:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ — изоморфизм, то через $\widehat{W}:\mathcal{L}(\mathcal{X})\to\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ будем обозначать изометрический изоморфизм подобия C^*-алгебр, определяемый формулой

$$\widehat{W}(A)=WAW^{-1},\quad A\in\mathcal{L}(\mathcal{X}). \tag{2.7}$$

Изоморфизм гильбертовых пространств

$$U = (V_2V_1)\otimes F : L_2(\mathbf{R}^n) = L_2(\mathbf{R}_+, r^{n-1})\otimes L_2(S_{n-1}) \to L_2^2(\mathbf{R}_+)\otimes l_2$$

(см. (2.4)–(2.6)) с помощью формулы (2.7), где $W = U$, задает изометрический изоморфизм подобия C^*-алгебр

$$\widehat{U} : \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R}^n)) \to \mathcal{L}(L_2^2(\mathbf{R}_+)\otimes l_2) = \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R}_+)\otimes (l_2\oplus l_2)).$$

Теорема 2.1. *Ограничение изоморфизма подобия $\widehat{U}$ на $\mathcal{B}_n$ определяет мономорфизм C^*-алгебр $\alpha_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}$.*

Доказательство разобьем на три этапа.

1) Рассмотрим изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_1 = \mathrm{id}_{L_2(\mathbf{R}_+, r^{n-1})}\otimes F : L_2(\mathbf{R}^n) \to L_2(\mathbf{R}_+, r^{n-1})\otimes l_2$$

(см. (2.4)), и, используя результаты [4], вычислим $U_1KU_1^{-1}$ для оператора K вида (0.1).

Так как ядро k оператора K удовлетворяет условию 2^0, то существует такая определенная на $\mathbf{R}^3$ функция l, что

$$k(x,y) = l(|x|^2, |y|^2, x\cdot y), \quad x, y\in \mathbf{R}^n$$

([4], с. 68). По оператору K и числу $m\in \mathbf{Z}_+$ определим оператор $K_m \in \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R}_+, r^{n-1}))$:

$$(K_m g)(r) = \int_0^\infty k_m(r,\rho) g(\rho) d\rho, \quad r\in \mathbf{R}_+, \tag{2.8}$$

где

$$k_m(r,\rho) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\rho\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{-1}^1 l\left(1, \frac{\rho^2}{r^2}, \frac{\rho}{r}t\right)\mathcal{P}_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt,$$

$\mathcal{P}_m(t)$ — многочлен Лежандра степени m. В ([4], с. 76–77) показано, что функция k_m однородна степени -1 и удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} |k_m(1,\rho)|\rho^{-n/2} d\rho < +\infty,$$

а для норм операторов (2.8) выполняется условие

$$\lim_{m\to\infty}\|K_m\| = 0. \tag{2.9}$$

Используя формулу (6.37) из [4] и введенные ранее обозначения, можно записать в “диагональном” виде оператор

$$U_1KU_1^{-1} = \sum_{j=1}^\infty K_{m(j)}\otimes P_j, \tag{2.10}$$

причем $\|\widehat{U}_1(K)\| = \sup\{\|K_m\|\}$ (см. замечание 2.1).

2) Рассмотрим изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_2 = V_1\otimes F : L_2(\mathbf{R}^n) \to L_2(\mathbf{R})\otimes l_2$$

(см. (2.4)–(2.5)) и вычислим $U_2AU_2^{-1}$ для оператора A вида (2.1).

Для оператора $K^{(i)}$ с помощью (2.8) определим оператор $K_m^{(i)} \in \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R}_+, r^{n-1}))$, а по $K_m^{(i)}$ зададим оператор свертки $H_m^{(i)} (\in \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R})))$:

$$(H_m^{(i)} g)(x) = \int_{-\infty}^\infty h_m^{(i)}(x-y) g(y) dy$$

с ядром $h_m^{(i)} (\in L_1(\mathbf{R}))$, определяемым равенством

$$h_m^{(i)}(t) = e^{t(1-n/2)} k_m^{(i)}(1, e^t). \tag{2.11}$$

В силу ([4], с. 52) $V_1(K_m^{(i)})V_1^{-1} = H_m^{(i)}$ и поэтому из (2.9) вытекает $\lim\limits_{m\to\infty}\|H_m^{(i)}\| = 0$. Это позволяет для оператора $K^{(i)}$ вывести из (2.10) равенство

$$U_2K^{(i)}U_2^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} H_{m(j)}^{(i)} \otimes P_j,$$

при этом $\|U_2K^{(i)}U_2^{-1}\| = \sup\{\|H_m^{(i)}\|\}$ (см. замечание 2.1). Нетрудно видеть, что для проекторов P и Q

$$U_2PU_2^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} P_+ \otimes P_j, \quad U_2QU_2^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} P_- \otimes P_j.$$

Таким образом, из сказанного выше получаем

$$U_2AU_2^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda I + H_{m(j)}^{(1)}P_+ + H_{m(j)}^{(2)}P_-) \otimes P_j + T', \tag{2.12}$$

где $T' \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}) \otimes l_2)$.

3) Непосредственно проверяется, что

$$V_2(\lambda I + H_{m(j)}^{(1)}P_+ + H_{m(j)}^{(2)}P_-)V_2^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda P_+ + P_+H_{m(j)}^{(1)}P_+ & T_{m(j)}^{(2)} \\ T_{m(j)}^{(1)} & \lambda P_+ + P_+\widetilde{H}_{m(j)}^{(2)}P_+ \end{pmatrix},$$

где V_2 — изоморфизм (2.6), $T_{m(j)}^{(i)} \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}_+))$, $\widetilde{H}_{m(j)}^{(2)}$ — оператор свертки с ядром $\widetilde{h}_{m(j)}^{(2)}$, определяемым условием $\widetilde{h}_{m(j)}^{(2)}(t) = h_{m(j)}^{(2)}(-t)$, $t \in \mathbf{R}$. Из этого равенства, (2.12) и соотношения $U = (V_2V_1) \otimes F = (V_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}(l_2)})U_2$ вытекает, что для оператора A вида (2.1) выполняется равенство

$$\begin{aligned}\alpha_n(A) = UAU^{-1} = (V_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}(l_2)})U_2AU_2^{-1}(V_2^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}(l_2)}) = \\ = \sum_{j=1}^{\infty}\begin{pmatrix} (\lambda P_+ + P_+H_{m(j)}^{(1)}P_+) \otimes P_j & T_{m(j)}^{(2)} \otimes P_j \\ T_{m(j)}^{(1)} \otimes P_j & (\lambda P_+ + P_+\widetilde{H}_{m(j)}^{(2)}P_+) \otimes P_j \end{pmatrix} + T'',\end{aligned} \tag{2.13}$$

где $T'' \in \mathcal{K}(L_2(\mathbf{R}_+) \otimes (l_2 \oplus l_2))$. Таким образом, $\alpha_n(A) \in \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}$. Но операторы вида (2.1) являются образующими банаховой алгебры $\mathcal{B}_n$, поэтому α_n мономорфно отображает $\mathcal{B}_n$ в $\mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}$. $\square$

Итак, вложение $\mathcal{B}_n$ в алгебру операторов Винера–Хопфа с компактными коэффициентами построено. Выясним, как это вложение связано с символами (см. (1.4), (2.3)). Если $\psi \in C(\dot{\mathbf{Z}}_+)$ и $\psi(\infty) = 0$, то оператор умножения M_ψ на функцию ψ является компактным в пространстве l_2. Определим мономорфизм $\beta : C(\mathcal{M}) \to C^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))$ формулой

$$(\beta(\varphi))(x) = \begin{pmatrix} M_{\varphi(1,-,x)} & 0 \\ 0 & M_{\varphi(2,-,x)} \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in C(\mathcal{M}), x \in \mathbf{R}$.

Теорема 2.2. *Следующая диаграмма является коммутативной*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle s^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}} \\ C(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\beta} & GC^+(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2 \oplus l_2)). \end{array}$$

Доказательство. Прямыми вычислениями для оператора A вида (2.1) проверяется, что

$$(\sigma_n(A))(j,m,\xi) = \lambda + \widehat{h}_m^{(j)}(\xi)$$

(см. (2.2), (2.11)). Используя это равенство, из (2.13) получаем

$$s^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}(\alpha_n(A)) = \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (\lambda + \widehat{h}_{m(j)}^{(1)}(\xi)) \otimes P_j & 0 \\ 0 & (\lambda + \widehat{\widehat{h}}_{m(j)}^{(2)}(\xi)) \otimes P_j \end{pmatrix} = \beta(\sigma_n(A)).$$

В силу леммы 2.1 это завершает доказательство теоремы. $\square$

3. Операторы с биоднородными ядрами

3.1. *Символическое исчисление и фредгольмовость.* Исследование фредгольмовости многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами из C^*-алгебры $\mathcal{B}_{n_1,n_2} \subset \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2}))$ проведем с помощью диаграммного метода Дугласа–Хоува [8], упомянутого в п. 1.2. Именно, рассмотрим C^*-алгебры

$$\mathcal{S}_1 = C(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{B}_{n_2}, \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{B}_{n_1} \otimes C(\mathcal{M}), \quad \mathcal{S}_0 = C(\mathcal{M}) \otimes C(\mathcal{M}).$$

Определим два частичных символа:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{n_1} \otimes \mathrm{id}_2 : \mathcal{B}_{n_1,n_2} \to \mathcal{S}_1, \quad \sigma_{(2)} = \mathrm{id}_1 \otimes \sigma_{n_2} : \mathcal{B}_{n_1,n_2} \to \mathcal{S}_2$$

и слабый символ $\sigma_{(0)} = \sigma_{n_1} \otimes \sigma_{n_2} : \mathcal{B}_{n_1,n_2} \to \mathcal{S}_0$, где id_j — тождественное преобразование $\mathcal{B}_{n_j}$. Пара эпиморфизмов $p = (\mathrm{id}_{C(\mathcal{M})} \otimes \sigma_{n_2}, \sigma_{n_1} \otimes \mathrm{id}_{C(\mathcal{M})})$ определяет расслоенную сумму C^*-алгебр

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus_p \mathcal{S}_2 = \{(b_1,b_2) : b_j \in \mathcal{S}_j,\ (\mathrm{id}_{C(\mathcal{M})} \otimes \sigma_{n_2})(b_1) = (\sigma_{n_1} \otimes \mathrm{id}_{C(\mathcal{M})})(b_2)\}.$$

Формулой $\sigma_{(1,2)}(A) = (\sigma_{(1)}(A), \sigma_{(2)}(A))$, $A \in \mathcal{B}_{n_1,n_2}$, определим полный символ

$$\sigma_{(1,2)} : \mathcal{B}_{n_1,n_2} \to \mathcal{S}. \tag{3.1}$$

Для C^*-алгебр $\mathcal{B}_{n_i}$ рассмотрим короткие точные последовательности вида (2.3). Тензорное произведение этих последовательностей приводит к (5×5)-диаграмме, на основе исследования которой доказывается

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \mathcal{B}_{n_1,n_2}$. Тогда*
1) $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{B}_{n_1,n_2}) \Leftrightarrow \sigma_{(1,2)} \in G\mathcal{S}$;
2) $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{B}_{n_1,n_2}) \Leftrightarrow \sigma_{(j)} \in G\mathcal{S}_j$, $j \in \{1,2\}$;
3) $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{B}_{n_1,n_2}) \Rightarrow \sigma_{(0)} \in G\mathcal{S}_0$.

Замечание 3.1. Доказательство аналога теоремы 3.1 для многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами на произведении двух шаров имеется в [14].

3.2. *Вычисление индекса.* Чтобы получить топологическую формулу для индекса операторов из $\mathrm{Fr}(\mathcal{B}_{n_1,n_2})$, необходимо построить гомоморфизм топологического индекса. Для этого понадобится следующее вспомогательное утверждение о символах алгебр $\mathcal{B}_{n_1,n_2}$ и $\mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}$ (см. (1.7), (3.1)).

Лемма 3.1. *Равенство $\gamma(b_1,b_2) = ((\beta \otimes \alpha_{n_2})(b_1), (\alpha_{n_1} \otimes \beta)(b_2))$, где $(b_1,b_2) \in \mathcal{S}$, корректно определяет мономорфизм C^*-алгебр $\gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$, при этом следующая диаграмма является коммутативной*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{n_1,n_2} & \xrightarrow{\alpha_{n_1}\otimes\alpha_{n_2}} & \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{(1,2)}} & & \big\downarrow{\scriptstyle s_{(1,2)}^{(\mathcal{K}(l_2\oplus l_2))}} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Q}. \end{array}$$

Доказательство. Проверим корректность определения γ. Из определения $\mathcal{S}$ вытекает равенство $(\mathrm{id}_{C(\mathcal{M})} \otimes \sigma_{n_2})(b_1) = (\sigma_{n_1} \otimes \mathrm{id}_{C(\mathcal{M})})(b_2)$, где $(b_1, b_2) \in \mathcal{S}$. Тогда в силу теоремы 2.2 получаем

$$(\beta \otimes \beta\sigma_{n_2})(b_1) = (\beta\sigma_{n_1} \otimes \beta)(b_2),$$
$$(\beta \otimes s^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}\alpha_{n_2})(b_1) = (s^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}\alpha_{n_1} \otimes \beta)(b_2),$$
$$(\mathrm{id}_0 \otimes s^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))})((\beta \otimes \alpha_{n_2})(b_1)) = (s^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))} \otimes \mathrm{id}_0)((\alpha_{n_1} \otimes \beta)(b_2)),$$

где $\mathrm{id}_0 = \mathrm{id}_{C^{+}(\dot{\mathbf{R}}; \mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}$. Отсюда $\gamma(b_1, b_2)$ принадлежит $\mathcal{Q}$ и γ — гомоморфизм C^*-алгебр. Мономорфность γ следует из мономорфности α_{n_i} и β. Коммутативность диаграммы выводится из теоремы 2.2 с помощью непосредственной проверки. $\square$

Построенное в лемме 3.1 отображение γ индуцирует гомоморфизм $\gamma_0 : \pi_0(G\mathcal{S}; I) \to \pi_0(G\mathcal{Q}; I)$. Определим гомоморфизм топологического индекса

$$i^{(t)}_{\mathcal{B}_{n_1,n_2}} = i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K})} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K})}} \gamma_0 : \pi_0(G\mathcal{S}; I) \to \mathbf{Z}.$$

Теорема 3.2. *Пусть* $A \in \mathrm{Fr}(\mathcal{B}_{n_1,n_2})$. *Тогда*

$$\mathrm{ind}(A) = i^{(t)}_{\mathcal{B}_{n_1,n_2}}([\sigma_{(1,2)}(A)]).$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1 α_{n_i} — мономорфизм подобия, следовательно, таким же свойством обладает, как нетрудно проверить, и $\alpha_{n_1} \otimes \alpha_{n_2}$. Поэтому $\mathrm{ind}(A) = \mathrm{ind}((\alpha_{n_1} \otimes \alpha_{n_2})(A))$. Отсюда и из теоремы 1.2 получаем

$$\mathrm{ind}(A) = i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}}([s^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}_{(1,2)}((\alpha_{n_1} \otimes \alpha_{n_2})(A))]).$$

Тогда в силу леммы 3.1

$$\mathrm{ind}(A) = i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}}([\gamma\sigma_{(1,2)}(A)]) =$$
$$= i^{(t)}_{\mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))} \otimes \mathcal{W}^{(\mathcal{K}(l_2 \oplus l_2))}} \gamma_0([\sigma_{(1,2)}(A)]) = i^{(t)}_{\mathcal{B}_{n_1,n_2}}([\sigma_{(1,2)}(A)]). \quad \square$$

Литература

1. Михайлов Л.Г. *Новый класс особых интегральных уравнений* // Math. Nachr. – 1977. – Bd. 76. – S. 91–107.
2. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 368. – № 6. – С. 727–729.
3. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 3–10.
4. Karapetiants N., Samko S. *Equations with involutive operators.* – Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001. – 427 p.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы теории гомологий.* – М.: Наука, 1984. – 343 с.
6. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.
7. Шварц А.С. *К гомотопической топологии банаховых пространств* // ДАН СССР. – 1964. – Т. 154. – № 1. – С. 61–63.
8. Douglas R., Howe R. *On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 158. – № 1. – P. 203–217.
9. Каш Ф. *Модули и кольца.* – М.: Мир, 1981. – 368 с.
10. Coburn L.A., Douglas R.G., Singer I.M. *On index theorem on the discrete quarter-plane* // J. Diff. Geom. – 1972. – № 4. – P. 587–593.

11. Деундяк В.М. *Гомотопические свойства множества нетеровых элементов C^*-алгебры многомерных обобщенных теплицевых операторов* // Функц. анализ и его прилож. – 1980. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 79–80.
12. Деундяк В.М. *Гомотопическая классификация и вычисление индекса семейств многомерных бисингулярных интегральных операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 4. – С. 34–47.
13. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Изд-во Ростовск. ун-та, 1984. – 208 с.
14. Авсянкин О.Г., Деундяк В.М. *Многомерные биоднородные интегральные операторы* // Деп. в ВИНИТИ 23.01.2002, № 120-В2002. – 23 с.

Ростовский государственный университет
Донской государственный технический университет

Поступила
03.12.2002