ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 512.543

Ж.С. САТАРОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП НАД КОММУТАТИВНЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ БЕЗ ЕДИНИЦЫ

1. Введение

В [1] были выявлены образующие элементы и определяющие соотношения классической ортогональной группы $O(n,R)=\{a\in GL(n,R): a^{-1}=a^\top\}$ ($^\top$ — транспонирование) над произвольным коммутативным локальным кольцом R с 1, для которого выполнено условие

$$(R^\bullet)^2+R^2\subseteq (R^\bullet)^2, \qquad (*)$$

где $^\bullet$ — взятие мультипликативной группы. В данной работе мы распространяем основные результаты [1] на (вообще говоря) безъединичные локальные кольца R. Важнейшими примерами коммутативного локального кольца с 1, обладающего свойством $(*)$, могут служить поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и кольцо дуальных чисел $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (с почленным сложением и умножением, заданным как $\langle\alpha,\beta\rangle\langle\gamma,\delta\rangle=\langle\alpha\gamma,\alpha\delta+\beta\gamma\rangle$ (напр., [2])). Частный случай результата [1], когда $R=\mathbb{R}$, был рассмотрен в [3].

Чтобы точнее сформулировать постановку задачи, приведем некоторые определения из [4]. Пусть Λ — произвольное (не обязательно с 1) ассоциативное кольцо и $\circ$ — его присоединенное умножение, т. е. $\alpha\circ\beta=\alpha+\alpha\beta+\beta$. Элемент α из Λ называется квазиобратимым, если для него $\alpha\circ\alpha'=\alpha'\circ\alpha=0$ при некотором $\alpha'\in\Lambda$. Совокупность всех квазиобратимых элементов Λ° из Λ образует группу относительно операции $\circ$ (где единицей будет 0). В случае, когда Λ имеет 1, отображение $\Lambda^\bullet\to\Lambda^\circ$, $1+\alpha\to\alpha$ задает изоморфизм групп, поэтому группа Λ° является обобщением понятия мультипликативной группы $\Lambda^\bullet$ на самые общие случаи ассоциативных колец. Группу квазиобратимых матриц из полного матричного кольца $\Lambda=M(n,R)$ обозначим через $GL^\circ(n,R)$ и назовем ее обобщенной полной линейной группой степени n над кольцом R. В некоторых (важнейших) случаях как группу $GL^\circ(n,R)$, так и ее классические подгруппы, удается описать на языке образующих и определяющих соотношений.

Пусть $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R (т. е. его наибольший квазирегулярный идеал). Ассоциативное (не обязательно с 1) кольцо R будем называть *локальным*, если его фактор-кольцо $\overline{R}=R/J(R)$ по радикалу Джекобсона образует тело. Пусть $\overline{e}$ означает для локального кольца R единичный класс тела вычетов $\overline{R}$. Для этого кольца принимаем также следующие обозначения: $R^2=\{x^2 : x\in R\}$, $R^{(2)}=\{x\circ x : x\in R^\circ\}$. В данной работе мы находим образующие элементы и определяющие соотношения (классической) ортогональной группы $O^\circ(n,R)=\{a\in GL^\circ(n,R): a'=a^\top\}$ степени $n\geq 2$ над произвольным коммутативным локальным кольцом R, не обязательно обладающим 1, для которого выполнены условия

$$R^{(2)}+R^2\subseteq R^{(2)} \qquad (\subseteq)$$

и

$$(-e)\circ(-e)+\mu^2=0 \qquad (=)$$

при некоторых $e \in \overline{e}$, $\mu \in R$ (e — вычет единичного класса). Найдем также образующие и соотношения специальной ортогональной группы $SO^{\circ}(n, R)$, $n \geq 2$.

Очевидным примером локального кольца R с условиями ($\subseteq$), ($=$) является всякое коммутативное локальное кольцо с 1, для которого выполнено условие ($*$), поскольку здесь условия ($\subseteq$), ($=$) могут быть заменены на ($*$) и $(-1) \circ (-1) + 1^2 = 0$ соответственно. Можно привести пример и локального кольца без 1, также обладающего свойствами ($\subseteq$) и ($=$). Пусть Λ — произвольное локальное кольцо (с единицей или нет), для которого выполнены условия ($\subseteq$), ($=$), и $\{0\} \neq K$ — также произвольное кольцо с нулевым умножением. Рассмотрим прямую сумму $R = \Lambda \dot{+} K$. Поскольку здесь $J(K) = K$ ($\Rightarrow J(R) = J(\Lambda) \dot{+} K$), то, профакторизовав по радикалу $J(R)$, имеем $R/J(R) \simeq \Lambda/J(\Lambda) + \{0\} \simeq \Lambda/J(\Lambda)$, т. е. кольцо R локально. Поскольку слагаемое K не имеет 1, кольцо R также не обладает 1. Построенное кольцо R удовлетворяет условиям ($\subseteq$) и ($=$).

($\subseteq$): действительно, произвольно взяв элементы $\alpha + \beta \in R^{\circ}$ ($\Leftrightarrow \alpha \in \Lambda^{\circ}$), $\gamma + \delta \in R$, при некотором $\varepsilon \in \Lambda^{\circ}$ имеем $(\alpha + \beta) \circ (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta)^2 = (\alpha \circ \alpha + \gamma^2) + (\beta \circ \beta + \delta^2) = \varepsilon \circ \varepsilon + \beta \circ \beta = (\varepsilon + \beta) \circ (\varepsilon + \beta) \in R^{(2)}$;

($=$): если $-e$, μ — элементы из Λ, удовлетворяющие равенству ($=$), то при любом $\beta \in K$ имеем $(-e + 0) \circ (-e + 0) + (\mu + \beta)^2 = (-e) \circ (-e) + \mu^2 = 0$.

В дальнейшем R считается произвольным коммутативным локальным кольцом, для которого выполнены условия ($\subseteq$) и ($=$). При представлении групп $O^{\circ}(n, R)$, $SO^{\circ}(n, R)$ используем метод трансформации, в простейших формах применявшийся еще при получении результатов [1], [3] и [5]. Пару $\langle \alpha, \beta \rangle$ из $R \times R$ назовем согласованной, если для нее $\alpha \circ \alpha + \beta^2 = 0$.

В работе принимаются следующие обозначения: $\langle -e, \mu \rangle$ — фиксированная согласованная пара (e — вычет единичного класса $\overline{e}$); $E(R \times R)$ — совокупность всех согласованных пар $\langle \alpha, \beta \rangle$ из $R \times R$; для согласованной пары $\langle \alpha, \beta \rangle \in E(R \times R)$ и индексов $i < j$ $T_{ij}(\alpha, \beta)$ означает матрицу из $M(n, R)$, у которой на позициях (i, i), (i, j), (j, i), (j, j) стоят элементы α, β, $-\beta$, α соответственно, а на прочих позициях — нули; для индексов $i \leq j$ η_{ij} означает символ, равный $T_{ij}(-e, \mu)$ при $i < j$ и 0 при $i = j$; кроме того, $O(R) = \{\varepsilon \in R^{\circ} : \varepsilon' = \varepsilon\}$ и $d_k(\varepsilon) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots, 0)$, где элемент ε стоит на k-м месте; $\equiv$ — сравнение в R по модулю $J(R)$; $'$ — как и выше, взятие квазиобратного элемента.

При представлении группы $O^{\circ}(n, R)$ используем матрицы простейшего вида

$$\begin{gathered} T_{ij}(\alpha, \beta),\ \langle \alpha, \beta \rangle \in E(R \times R) \quad (i < j); \\ d_k(\varepsilon),\ \varepsilon \in O(R) \quad (1 \leq i, k, j \leq n). \end{gathered} \tag{1}$$

2. Стандартные формы в группе $O^{\circ}(n, R)$

В дальнейшем понадобится

Предложение. *Для кольца R имеет место дизъюнктное разложение*

$$R = \overline{-e} \cup R^{\circ}. \tag{$\cup$}$$

Доказательство. Включение $\supseteq$ в ($\cup$) очевидно. Покажем $\subseteq$. Пусть $-e \not\equiv \alpha$ — произвольный элемент из R. Поскольку класс $\overline{e + \alpha}$ обратим в $\overline{R}$, то найдется элемент $x \in R$, для которого $x(e + \alpha) \equiv -\alpha$. Отсюда имеем $x \circ \alpha = x + x\alpha + \alpha \equiv xe + x\alpha + \alpha \equiv 0$, т. е. $\alpha \in R^{\circ}$.

Пусть теперь $x \in \overline{-e} \cap R^{\circ}$. Тогда из $x \equiv -e$ и $x \circ x' = 0$ следует $e = e + x' - x' \equiv -(x + xx' + x') = 0$ — противоречие. $\square$

Наш метод использует стандартные формы элементов группы $O^{\circ}(n, R)$. Для индекса i, $1 \leq i < n$, формами ступени i назовем слова алфавита (1) вида $f_i = T_{i,i+1}(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) \circ \cdots \circ T_{in}(\alpha_n, \beta_n) \circ \eta_{is} = \prod\limits_{i<k} T_{ik}(\alpha_k, \beta_k) \circ \eta_{is}$, для которых $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in R^{\circ}$ и при $s > i$ считается выполненным условие $\beta_s \equiv 0$. Стандартными формами в группе $O^{\circ}(n, R)$ объявляются всевозможные комбинации $d_1(\varepsilon_1) \circ \cdots \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$. Стандартное разложение $d_1(\varepsilon_1) \circ \cdots \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ будем называть диагональным, если диагональными являются все буквы, входящие в это слово.

Стандартное строение в группе $O^\circ(n,R)$ описывает

Теорема 1. *Элементы a из $O^\circ(n,R)$ представляются в стандартном виде*

$$a = d_1(\varepsilon_1)\circ\cdots\circ d_n(\varepsilon_n)\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1,$$

причем любое такое представление для $a=0$ является диагональным.

Доказательство теоремы согласно разложению ($\cup$) различает случаи $a_{11}\equiv -e$ и $a_{11}\in R^\circ$ (a_{11} — элемент матрицы a, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца). Оно использует условие ($\subseteq$) и проводится аналогично теореме 1 из [1]. Эти повторяющиеся подробности мы опускаем.

3. Соотношения группы $O^\circ(n,R)$

При $\beta=0$ принимаем специальное обозначение $T_{ij}(\alpha,\beta)=h_{ij}(\alpha)$. Для матрицы $a=\left(\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right)\in O(2,R)$ равенства $a\circ a^\top = a^\top\circ a=0$ влекут за собой цепочку $\alpha\equiv -e\Leftrightarrow \beta\equiv e\vee\beta\equiv -e\Leftrightarrow\gamma\equiv e\vee\gamma\equiv -e\Leftrightarrow\delta\equiv -e$. Отсюда, пользуясь свойством квазимультипликативности ($\det^\circ$) (см. § 6), можем записать в алфавите (1) непосредственно проверяемые 15 соотношений, составляющих 6 совокупностей. Приведем эти соотношения в описательном виде

1. a) $d_i(\varepsilon)\circ d_i(\sigma)=d_i(\varepsilon\circ\sigma)$,
   b) $d_i(\varepsilon)\circ d_k(\sigma)=d_k(\sigma)\circ d_i(\varepsilon)$, $i\neq k$;
2. для индексов $i<j$ и аргументов $\beta\neq 0$, $\varepsilon\in O(R)$
   a) $T_{ij}(\alpha,\beta)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ T_{ij}(\alpha,\beta)$, $k\neq i,j$,
   b) $T_{ij}(\alpha,\beta)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ T_{ij}(\alpha,\beta+\beta\varepsilon)$, $k\in\{i,j\}$,
   c) $h_{ij}(\varepsilon)=d_i(\varepsilon)\circ d_j(\varepsilon)$,
   d) $\eta_{ij}\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ T_{ij}(\varepsilon\mu^2,\mu\varepsilon-\mu\varepsilon e)\circ\eta_{ij}$, $k\in\{i,j\}$;
3. для индексов $i<p$ и аргументов $\beta\neq 0$, $\delta\neq 0$
   a) $T_{ip}(\alpha,\beta)\circ T_{ip}(\gamma,\delta)=\begin{cases}T_{ip}(\tau,a), & \text{если } \tau=\alpha\circ\gamma-\beta\delta\not\equiv -e;\\ T_{ip}(b,c)\circ\eta_{ip} & \text{в противном случае,}\end{cases}$
   где $a=\beta+\delta+\alpha\delta+\beta\gamma$, $b=\tau\circ(-e)+a\mu$, $c=a-ae-\mu-\tau\mu$,
   b) $\eta_{ip}\circ T_{ip}(\alpha,\beta)=T_{ip}(\alpha,\beta)\circ\eta_{ip}$;
4. для индексов $\{p,q\}\cap\{s,k\}=\varnothing$ и аргументов $\beta\neq 0$, $\delta\neq 0$

$$T_{pq}(\alpha,\beta)\circ T_{sk}(\gamma,\delta)=T_{sk}(\gamma,\delta)\circ T_{pq}(\alpha,\beta);$$

5. для индексов $i<p<q$ и аргумента $\beta\neq 0$
   a) $\eta_{iq}\circ T_{ip}(\alpha,\beta)=T_{pq}(x,y)\circ T_{ip}(b,\beta-e\beta)\circ T_{iq}(z,t)\circ\eta_{iq}$, где $x=\alpha\circ b+c(e\beta-\beta)$, $y=\beta\mu+(\beta-\beta e)t+\beta\mu z$, $b=a\circ z+(e\alpha-\alpha)\mu t$, $c=\beta e-\beta+(\beta e-\beta)z+\beta\mu t$, $z=a\circ\gamma'$, $t=(e\alpha-\alpha)\mu\gamma'+(e\alpha-\alpha)\mu$, $a=\alpha+(e^2-2e)\alpha$ и γ определен из $a\circ a+(e\alpha\mu-\alpha\mu)^2=\gamma\circ\gamma$;
   b) $\eta_{ip}\circ T_{iq}(\alpha,\beta)=T_{pq}(x,y)\circ T_{ip}(b,e\alpha-\alpha)\circ T_{iq}(z,t)\circ\eta_{ip}$, где $x=(\alpha\mu)^2\circ b+c(\alpha-e\alpha)$, $y=-\mu\beta+(\mu-\mu e)\alpha t-\mu\beta z$, $b=a\circ z+(\beta-e\beta)t$, $c=\mu\alpha e-\mu\alpha+(\mu e-\mu)\alpha z-\mu\beta t$, $z=a\circ\gamma'$, $t=(\beta-e\beta)\gamma'+\beta-e\beta$, $a=\alpha+(e^2-2e)\alpha$ и γ определен из $a\circ a+(\beta-e\beta)^2=\gamma\circ\gamma$;
   c) $\eta_{ip}\circ T_{pq}(\alpha,\beta)=T_{pq}(x,y)\circ T_{ip}(b,\mu\alpha-\mu\alpha e)\circ T_{iq}(z,t)\circ\eta_{ip}$, где $x=a\circ b+c(\mu e-\mu)\alpha$, $y=\beta-e\beta+(e\alpha-\alpha)\mu t+(\beta-e\beta)z$, $a=\alpha+(e^2-2e)\alpha$, $b=(\alpha\mu^2)\circ z+\mu\beta t$, $c=(\alpha-e\alpha)\mu+(\alpha-e\alpha)\mu z+(\beta-e\beta)z$, $z=(\alpha\mu^2)\circ\gamma'$, $t=\mu\beta\gamma'+\mu\beta$ и γ определен из $(\alpha\mu^2)\circ(\alpha\mu^2)+(\mu\beta)^2=\gamma\circ\gamma$;
   d) $\eta_{iq}\circ T_{pq}(\alpha,\beta)=T_{pq}(x,y)\circ T_{ip}(b,-\mu\beta)\circ T_{iq}(z,t)\circ\eta_{iq}$, где $x=\alpha\circ b+c\beta\mu$, $y=\beta-\beta e-\beta\mu t+(\beta-\beta e)z$, $b=(\alpha\mu^2)\circ z+(\mu-\mu e)\alpha t$, $c=\beta\mu+\beta\mu z+(\beta-\beta e)t$, $z=(\alpha\mu^2)\circ\gamma'$, $t=(\mu-\mu e)\alpha\gamma'+(\mu-\mu e)\alpha$ и γ определен из $(\alpha\mu^2)\circ(\alpha\mu^2)+(\mu\alpha-\mu\alpha e)^2=\gamma\circ\gamma$;
6. для индексов $i<p<q$ и аргументов $\alpha,\gamma\in R^\circ$, $\psi\neq 0$

a) $T_{ip}(\alpha,\beta)\circ T_{iq}(\gamma,\delta)\circ T_{pq}(\varphi,\psi) = T_{pq}(k,g)\circ T_{ip}(f,a)\circ T_{iq}(z,t)$, где $z=\alpha\circ\gamma\circ\Delta'$, $t=b\Delta'+b$, Δ — элемент, определенный из $\alpha\circ\gamma\circ\alpha\circ\gamma+b^2=\Delta\circ\Delta$, $b=\delta+\alpha\delta+\beta\psi+\delta\varphi+\alpha\delta\varphi$, $a=\beta+\beta\varphi-\delta\psi-\alpha\delta\psi$, $f=\alpha\circ\gamma\circ z+bt$, $k=c\circ f-ha$, $c=\alpha\circ\varphi+\beta\delta\psi$, $h=-\beta-\beta\gamma-\beta z-\beta\gamma z+dt$, $d=\psi-\beta\delta+\alpha\psi-\beta\delta\varphi$, $g=d+\beta t+\beta\gamma t+dz$;

b) $T_{iq}(\alpha,\beta)\circ T_{ip}(\gamma,\delta) = T_{pq}(d,\delta t)\circ T_{ip}(a,\delta+\alpha\delta)\circ T_{iq}(z,t)$, где $d=\gamma\circ a+(\delta+\delta z)(\delta+\alpha\delta)$, $a=\alpha\circ\gamma\circ z+\beta t$, $z=\alpha\circ\gamma\circ\Delta'$, $t=\beta\Delta'+\beta$ и Δ определен из $\alpha\circ\gamma\circ\alpha\circ\gamma+\beta^2=\Delta\circ\Delta$.

4. Трансформационное преобразование

В этом пункте докажем так называемую теорему о трансформации, которая при доказательстве основного утверждения работы играет фундаментальную роль. Сначала на множестве всех слов алфавита (1) введем отношения $\overset{i}{\tilde{\to}}$, $1\le i<n$, положив $w\overset{i}{\tilde{\to}}v$ в том и только том случае, когда эти слова связаны соотношением $w=X\circ v$, где слово X не содержит буквы вида $T_{kj}(\alpha,\beta)$, $\beta\ne 0$, $k\le i$. Отношения $\overset{i}{\tilde{\to}}$ очевидным образом являются рефлексивными и транзитивными. Через $I(v)$ обозначим совокупность индексов всех букв слова v. Всюду ниже символами $\langle *,*\rangle$ (с индексами и без них) будут обозначаться, вообще говоря, различные на разных местах пары из $E(R\times R)$. В дальнейшем понадобится

Лемма. *Для любых перестановок $m,\dots,r$ и $s,\dots,k$, составленных из одних и тех же чисел, бо́льших i, слово $v=T_{im}(\alpha_m,\beta_m)\circ\cdots\circ T_{ir}(\alpha_r,\beta_r)$, $\alpha_t\in R^\circ$, $\beta_t\ne 0$, $t=m,\dots,r$, соотношениями $6_{\mathrm{b})}$, $3_{\mathrm{a})}$ и 4 можно привести к виду $v\overset{i}{\tilde{\to}}T_{is}(*,*_s)\circ\cdots\circ T_{ik}(*,*_k)$, где $*_t\ne 0$ и $*_t\equiv 0\Leftrightarrow\beta_t\equiv 0$ при всех $t=s,\dots,k$.*

Доказательство. Пусть в v буква $T_{is}(\alpha_s,\beta_s)$ находится не на первом месте и $T_{ip}(\alpha_p,\beta_p)$ — буква, предшествующая ей. Применяя к слову $v=X\circ[T_{ip}(\alpha_p,\beta_p)\circ T_{is}(\alpha_s,\beta_s)]\circ Y$ соотношения $6_{\mathrm{b})}$ (возможно в обратном порядке), $T_{ip}(x,y)\circ T_{ip}(x,-y)=0$ ($\Leftarrow 3_{\mathrm{a})}$) и 4, будем иметь $v\overset{i}{\tilde{\to}}X\circ T_{is}(*,*)\circ T_{ip}(*,*)\circ Y$, т.е. буква $T_{is}(\alpha,\beta)$ перекинута налево. Продолжая это перемещение и далее, будем иметь $v\overset{i}{\tilde{\to}}T_{is}(*,*)\circ\widetilde{Y}$, где слово $\widetilde{Y}$ не содержит индекс s. Аналогичным образом вытягиваем из $\widetilde{Y}$ букву с надлежащими индексами и т. д. В результате действительно приходим к требуемой записи $v\overset{i}{\tilde{\to}}T_{is}(*,*_s)\circ\cdots\circ T_{ik}(*,*_k)$. Здесь утверждение, что $*_t\ne 0$ и $*_t\equiv 0\Leftrightarrow\beta_t\equiv 0$, просто следует из соотношений $6_{\mathrm{b})}$. $\square$

Сформулируем теперь упомянутую выше теорему.

Теорема 2 (о трансформации букв). *Пусть f_i — произвольная ненулевая форма ступени i и x — также произвольная ненулевая буква алфавита (1), индексы которой не меньше i. Тогда при помощи соотношений 1–6 можно выполнить преобразование $v=f_i\circ x\overset{i}{\tilde{\to}}\widetilde{f}_i$, где $\widetilde{f}_i$ — некоторая форма ступени i.*

Доказательство. Если $I(f_i)\cap I(x)=\varnothing$, то, применяя соотношения $2_{\mathrm{a})}$, $2_{\mathrm{b})}$ и 4, для рассматриваемого слова сразу будем иметь $v\overset{i}{\tilde{\to}}f_i$. Поэтому впредь это пересечение будем считать непустым. Ниже F_i будет означать некоторое слово вида $F_i=T_{ir}(*_r,*)\circ\cdots\circ T_{im}(*_m,*)$, где $i<r<\cdots<m$ и $*_r,\dots,*_m\in R^\circ$ (сюда включается и случай $F_i=\varnothing$). Всюду через $T_{ij}(*,\cdot)$ обозначается буква со вторым аргументом $\cdot\equiv\circ$. Если $p\notin I(F_i)$, то этот факт записываем как $F_i(\ne p)$. Аналогичный смысл придается и записи $F_i(\ne p,q)$. Далее для простоты на протяжении всего параграфа $\tilde{\to}$ будет означать отношение $\overset{i}{\tilde{\to}}$. Пусть $f_i=F_i\circ\eta_{is}$. Доказательство является комбинаторным и различает следующие случаи.

$$x=T_{pq}(\alpha,\beta),\quad \beta\ne 0\ \ (p\ge i).$$

I. $s=i$, т. е. $v=F_i\circ T_{pq}(\alpha,\beta)=\prod\limits_{i<k}T_{ik}(*,*)\circ T_{pq}(\alpha,\beta)$.

A. Пусть сначала $p=i$. Применяя лемму, рассматриваемое слово представим в виде $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q)\circ[T_{iq}(*,*)\circ T_{iq}(\alpha,\beta)]$, которое дальнейшим применением (к выделенному отрезку) соотношений $3_{\mathrm{a})}$ приводится к одному из видов

$$v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q)\circ T_{iq}(*,*),\quad v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q)\circ T_{iq}(*,\cdot)\circ\eta_{iq}.$$

Эти слова с помощью леммы преобразуются к требуемым формам $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i$ и $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i\circ\eta_{iq}$ соответственно.

B. Пусть $p>i$. Используя в этом случае лемму, будем иметь $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,q)\circ[T_{ip}(*,*)\circ T_{iq}(*,*)\circ T_{pq}(\alpha,\beta)]$. Полученное слово применением соотношений $6_{\mathrm{a})}$, 4, $2_{\mathrm{a})}$, $2_{\mathrm{b})}$, $2_{\mathrm{c})}$ принимает форму $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,q)\circ T_{ip}(*,*)\circ T_{iq}(*,*)$, т. е. приводимость $v\overset{\sim}{\rightarrow}\widetilde{f}_i$ в рассматриваемом случае сводится к повторному применению разобранного п. A.

II. $s>i$, т. е. $v=F_i\circ\eta_{is}\circ T_{pq}(\alpha,\beta)$.

C. Рассмотрим случай $p=i$. Пусть сначала $q<s$. Используя лемму и соотношения $5_{\mathrm{a})}$, $6_{\mathrm{a})}$, $3_{\mathrm{a})}$, 4, $2_{\mathrm{a})}$, $2_{\mathrm{b})}$, $2_{\mathrm{c})}$, имеем

$$\begin{aligned}v&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q,s)\circ[T_{iq}(*,*)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ T_{qs}(*,*)]\circ T_{iq}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q,s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ[T_{iq}(*,*)\circ T_{iq}(*,\cdot)]\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q,s)\circ T_{iq}(*,*)\circ[T_{is}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)]\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq s)\circ T_{is}(*,*_s)\circ\eta_{is}.\end{aligned}$$

Поскольку здесь $*_s\equiv 0$, последнее применением леммы даст $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i\circ\eta_{is}=\widetilde{f}_i$.

Пусть теперь $q=s$. Применяя лемму и соотношения $3_{\mathrm{b})}$, имеем $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q)\circ[T_{iq}(*,*_q)\circ T_{iq}(\alpha,\beta)]\circ\eta_{iq}$, которое дальнейшим применением $3_{\mathrm{a})}$ (при $*_q\neq 0$) даст либо $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq q)\circ T_{iq}(*,*)\circ\eta_{iq}$, либо $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i\circ[\eta_{iq}\circ\eta_{iq}]$. Первый случай уже знакомыми рассуждениями даст $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i\circ\eta_{iq}=\widetilde{f}_i$. Во втором случае, применяя $3_{\mathrm{a})}$, приходим к виду $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i\circ T_{iq}(*,\cdot)$, рассмотренному в п. A.

Приводимость $v\overset{\sim}{\rightarrow}\widetilde{f}_i$ при $q>s$ показывается аналогично случаю $q<s$ при помощи соотношений $5_{\mathrm{b})}$.

D. Пусть теперь $p>i$. Разберем сначала случай $q=s$. Используя лемму и соотношения $5_{\mathrm{d})}$, $6_{\mathrm{a})}$, 4, $3_{\mathrm{a})}$, $2_{\mathrm{a})}$, $2_{\mathrm{b})}$, $2_{\mathrm{c})}$, имеем

$$\begin{aligned}v&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ[T_{ip}(*,*)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ T_{ps}(*,*)]\circ T_{ip}(*,*)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ[T_{ip}(*,*)\circ T_{ip}(*,*)]\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\begin{bmatrix}T_{ip}(*,*)\vee\\T_{ip}(*,\cdot)\circ\eta_{ip}\end{bmatrix}\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{is}.\end{aligned}$$

В первом случае, продолжая преобразования, приходим к слову знакомого вида $v\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{is}$. Во втором случае, применяя лемму и соотношения $5_{\mathrm{b})}$, $6_{\mathrm{a})}$, $3_{\mathrm{a})}$, 4, получим

$$\begin{aligned}v&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ[\eta_{ip}\circ T_{is}(*,\cdot)]\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ[T_{is}(*,\cdot)\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{ps}(*,*)]\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{ip}\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ[T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{ip}(*,\cdot)]\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{ip}\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}\\&\overset{\sim}{\rightarrow}F_i(\neq p,s)\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ[T_{is}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)]\circ\eta_{ip}\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\rightarrow}F_i\circ\eta_{ip}\circ\eta_{is}.\end{aligned}$$

Применяя к полученному выражению лемму и соотношения $5_{\text{a})}$, 4, $6_{\text{a})}$, будем иметь

$$\begin{aligned} v &\overset{\sim}{\to} F_i(\neq p,s)\circ[T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ T_{ps}(*,\cdot)]\circ T_{ps}(*,*)\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{ip}\overset{\sim}{\to}\\ &\overset{\sim}{\to} F_i(\neq p,s)\circ[T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ T_{ps}(*,*)]\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{ip}\overset{\sim}{\to}\\ &\overset{\sim}{\to} F_i(\neq p,s)\circ T_{is}(*,\cdot)\circ[T_{ip}(*,\cdot)\circ T_{ip}(*,\cdot)]\circ T_{is}(*,\cdot)\circ\eta_{ip}\overset{\sim}{\to}\\ &\overset{\sim}{\to} F_i(\neq p,s)\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ[T_{is}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)]\circ\eta_{ip}\overset{\sim}{\to}\\ &\overset{\sim}{\to} F_i(\neq p)\circ T_{ip}(*,\cdot)\circ\eta_{ip},\end{aligned}$$

т. е. получаем слово из п. С.

Приводимость $v \overset{\sim}{\to} \widetilde{f}_i$ при $p = s$ при помощи соотношений $5_{\text{c})}$ аналогичным образом сводится к приводимости слова $v \overset{\sim}{\to} F_i\circ\eta_{iq}\circ\eta_{is}$ $(q>s)$, которое с помощью соотношений $5_{\text{a})}$ (как и при $q<s$) преобразуется к знакомому из п. С виду $v\overset{\sim}{\to} F_i\circ\eta_{iq}$.

В случаях, когда $s\neq p,q$, используя соотношения 4, $6_{\text{a})}$ и лемму, имеем

$$\begin{gathered} v \overset{\sim}{\to} F_i(\neq p,q)\circ[T_{ip}(*,*)\circ T_{iq}(*,*)\circ T_{pq}(\alpha,\beta)]\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\to}\\ \overset{\sim}{\to} F_i(\neq p,q)\circ T_{ip}(*,*)\circ T_{iq}(*,*)\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\to} F_i\circ\eta_{is}=\widetilde{f}_i.\\ x=d_k(\varepsilon).\end{gathered}$$

Если здесь $i=s$ или $s>i$, $k\notin\{i,s\}$, то с помощью соотношений $2_{\text{a})}$, $2_{\text{b})}$ сразу будем иметь требуемый вид $v\overset{\sim}{\to}\widetilde{f}_i$. Если $s>i$ и $k\in\{i,s\}$, то, применяя лемму и соотношения $2_{\text{d})}$, $3_{\text{a})}$, $2_{\text{a})}$, $2_{\text{b})}$, нужную форму получаем так:

$$v=F_i\circ[\eta_{is}\circ d_k(\varepsilon)]\overset{\sim}{\to} F_i(\neq s)\circ[T_{is}(*,\cdot)\circ T_{is}(*,\cdot)]\circ\eta_{is}\overset{\sim}{\to} F_i\circ\eta_{is}=\widetilde{f}_i.$$

Что касается приводимости $v\overset{\sim}{\to}\widetilde{f}_i$ для слова $v=f_i\circ T_{pq}(\alpha,0)$, то она ввиду соотношений $2_{\text{c})}$ очевидным образом сводится к только что разобранному пункту $x=d_k(\varepsilon)$.

Итак, слово $v=f_i\circ x$ во всех имеющихся случаях соотношениями 1–6 приводится к виду $v\overset{i}{\overset{\sim}{\to}}\widetilde{f}_i$. □

5. Задание группы $O^\circ(n,R)$

Целью этого пункта является доказательство полноты системы соотношений 1–6 для группы $O^\circ(n,R)$, $n\geq 2$, в образующих (1). Полнота будет доказана, если любое слово w алфавита (1) будет приводимо к какому-либо (любому!) из стандартных представлений $s(w)$ этого слова при помощи соотношений 1–6. Действительно, пусть соотношение $w=s(w)$ выводимо из 1–6 для любого слова w. Пусть далее $v=0$ — произвольное соотношение группы $O^\circ(n,R)$ в образующих (1). Согласно второй половине теоремы 1 оно преобразуется к виду $s(v)=d_1(\varepsilon_1)\circ\cdots\circ d_n(\varepsilon_n)=0$. Отсюда имеем $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=0$, т. е. соотношение $v=0$ действительно является следствием из 1–6.

Основным результатом относительно группы $O^\circ(n,R)$ является

Теорема 3. *Обобщенная ортогональная группа $O^\circ(n,R)$, $n\geq 2$, над коммутативным локальным кольцом R с условиями $(\subseteq)$ и $(=)$ в образующих (1) задается соотношениями 1–6.*

Доказательство. Пусть w — произвольное слово алфавита (1). Согласно сделанному выше замечанию теорема будет доказана, если покажем выводимость соотношения $w=s(w)$ из системы 1–6, где $s(w)$ означает одну из стандартных форм слова w. Не теряя общности, слово w можно считать представленным в виде

$$w\overset{1}{\overset{\sim}{\to}} f_1\circ Y, \tag{2}$$

где f_1 — некоторая форма ступени 1 и Y – соответствующее ей дополнение. Ввиду соотношений $d_i(\varepsilon) \circ d_i(\varepsilon') = 0$ ($\Leftarrow 1_{\mathrm{a})}$), $T'_{ij}(\alpha,\beta) = T_{ij}(\alpha,-\beta)$ ($\Leftarrow 3_{\mathrm{a})}$) дополнение Y можно считать составленным только из натуральных степеней своих букв. Пусть $Y = x \circ \widetilde{Y}$, т. е. x — первая буква слова Y. Применяя к стыку $v = f_1 \circ x$ теорему 2 о трансформации, для w получаем то же самое представление вида (2), но уже с укороченной длиной слова Y. Выполняя это сокращение несколько раз, приходим к записи вида $w \overset{1}{\tilde{\to}} f_1$, т. е. $w = X^{(1)} \circ f_1$, где слово $X^{(1)}$ не содержит (по определению $\overset{1}{\tilde{\to}}$) буквы вида $T_{1j}(\alpha,\beta)$, $\beta \neq 0$. Аналогичным образом, вытягивая теперь из $X^{(1)}$ форму f_2 ступени 2, будем иметь $w = X^{(2)} \circ f_2 \circ f_1$. Продолжая этот процесс отщепления форм, на $(n-1)$-м шаге приходим к разложению $w = X^{(n-1)} \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$. Поскольку здесь $X^{(n-1)}$ содержит только диагональные матрицы, оно соотношениями $1_{\mathrm{a})}$, $1_{\mathrm{b})}$ легко приводится к виду $X^{(n-1)} = d_1(\varepsilon_1) \circ \cdots \circ d_n(\varepsilon_n)$. Таким образом, слово w преобразовано к стандартному виду $s(w)$. $\square$

6. Определяющие соотношения специальной ортогональной группы

Для аналогичного описания над кольцом R специальной обобщенной ортогональной группы $SO^\circ(n,R)$, $n \geq 2$, введем над произвольным (ассоциативно-)коммутативным кольцом Λ (где существование 1 не предполагается) понятие соответствующего определителя. Пусть $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ — совокупность индексов. Для подстановки π из симметрической группы S_n через $I(\pi) = \{i \in I_n : \pi(i) = i\}$ обозначим ее неподвижное подмножество. Далее "знак" подстановки π определим как

$$\operatorname{sgn}\pi = \begin{cases} +, & \text{если } \pi \text{ четная;} \\ - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем обозначение $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_m = \overset{\circ}{\prod\limits_{k=1,\ldots,m}} x_k$. Пусть $\sigma_k^\circ(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \overset{\circ}{\prod\limits_{t=i_1,\ldots,i_k}} x_t$ означает основной квазисимметрический многочлен степени k от переменных $x_1,\ldots,x_n$. Для матрицы $a = (a_{ij})$ из $M(n,\Lambda)$ и подстановки $\pi \in S_n$ принимаем обозначение $(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)})^\circ = \Big(\overset{\circ}{\prod\limits_{\pi(k)=k}} a_{kk}\Big) \circ \prod\limits_{\pi(k)\neq k} a_{k\pi(k)}$, где при $I(\pi) = \varnothing$ первый, а при $I(\pi) = I_n$ второй сомножители считаются равными нулю. *Квазиопределителем* над кольцом Λ порядка n назовем отображение $\det^\circ : M(n,\Lambda) \to \Lambda$, заданное правилом

$$\det{}^\circ a = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi (a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)})^\circ + \sum_{1\le k\le n-2} (-1)^{n-k}(n-k-1)\sigma_k^\circ(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}),$$

где при $n \leq 2$ вторая (вычитающаяся) сумма считается равной нулю. Согласно этому определению

$$\det{}^\circ(\alpha) = \alpha, \quad \det{}^\circ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha \circ \delta - \beta\gamma;$$

$$\det{}^\circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{pmatrix} = a \circ \beta \circ z + b\gamma x + c\alpha y - \beta \circ (cx) - (\alpha b) \circ z - a \circ (\gamma y) + a + \beta + z.$$

Введенный определитель обладает свойством полной мультипликативности, т. е.

$$\det{}^\circ(a \circ b) = \det{}^\circ a \circ \det{}^\circ b \qquad (\det{}^\circ)$$

для любых матриц $a, b \in M(n,\Lambda)$. Установить это равенство, непосредственно ссылаясь на определение $\det^\circ$, технически очень сложно. Докажем его, прибегая к локальному приему (т. е. предварительно вкладывая Λ в некоторое коммутативное расширение K с 1). Таким расширением

K/Λ будет, например, кольцо $K = \mathbb{Z} \times \Lambda$ с покоординатным сложением и умножением, заданным как $\langle \alpha, x\rangle\langle \beta, y\rangle = \langle \alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy\rangle$ (где единицей будет пара $\langle 1, 0\rangle$). Равенство ($\det^\circ$) легко следует из соотношения

$$\det(E + a) = 1 + \det{}^\circ a, \tag{3}$$

имеющего место в расширении K для любой матрицы $a \in M(n, \Lambda)$, где E — единичная матрица порядка n. Действительно, для любых матриц a, b из кольца $M(n, \Lambda)$ имеем

$$\begin{aligned} 1 + \det{}^\circ(a \circ b) &= \det(E + a \circ b) = \det[(E + a)(E + b)] = \\ &= \det(E + a)\det(E + b) = (1 + \det{}^\circ a)(1 + \det{}^\circ b) = 1 + \det{}^\circ a \circ \det{}^\circ b, \end{aligned}$$

что сразу же дает равенство ($\det^\circ$).

Докажем теперь соотношение (3). Введем сначала для $k \geq 2$ функцию $\delta(k) = \sum_{\pi \in S_k,\ I(\pi)=\varnothing} \operatorname{sgn} \pi$ (т. е. $\delta(k)$ — сумма знаков всех полных подстановок из S_k). Эта функция допускает явную формулу

$$\delta(k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k-1}(k-1) \tag{δ}$$

(здесь определитель имеет порядок k). Для матрицы a из (3), введя обозначение $E + a = (\widetilde{a}_{ij})$ и пользуясь формулой для обычного определителя ([6], с. 371), имеем

$$\begin{aligned} \det(E + a) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \widetilde{a}_{1\pi(1)} \cdots \widetilde{a}_{n\pi(n)} = \\ &= (1 + a_{11}) \cdots (1 + a_{nn}) + \sum_{\mathrm{id} \neq \pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{\pi(k)=k} (1 + a_{kk}) \prod_{\pi(k) \neq k} a_{k\pi(k)} = \\ &= 1 + a_{11} \circ \dots \circ a_{nn} + \sum_{\mathrm{id} \neq \pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \Big(1 + \overset{\circ}{\prod_{\pi(k)=k}} a_{kk}\Big) \prod_{\pi(k) \neq k} a_{k\pi(k)} = \\ &= 1 + \Big[a_{11} \circ \dots \circ a_{nn} + \sum_{id \neq \pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \Big\{ \overset{\circ}{\prod_{\pi(k)=k}} a_{kk} \circ \prod_{\pi(k) \neq k} a_{k\pi(k)} \Big\}\Big] - \sum_{\mathrm{id} \neq \pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \overset{\circ}{\prod_{\pi(k)=k}} a_{kk} = \\ &= 1 + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi (a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)})^\circ - \sum_{\mathrm{id} \neq \pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \overset{\circ}{\prod_{\pi(k)=k}} a_{kk}, \end{aligned}$$

где id — тождественная подстановка.

Пусть теперь $I(k)$ означает k-элементное подмножество множества I_n. Перегруппировывая члены вычитающейся суммы в последнем выражении и учитывая (δ), получим

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n-2} \sum_{I(k) \subset I_n} \Big(\sum_{I(\pi)=I(k)} \operatorname{sgn} \pi \Big) \overset{\circ}{\prod_{r \in I(k)}} a_{rr} &= \sum_{1 \leq k \leq n-2} \delta(n-k) \sum_{I(k) \subset I_n} \overset{\circ}{\prod_{r \in I(k)}} a_{rr} = \\ = \sum_{1 \leq k \leq n-2} \delta(n-k) \sigma_k^\circ(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) &= - \sum_{1 \leq k \leq n-2} (-1)^{n-k}(n-k-1)\sigma_k^\circ(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (3) справедливо.

Обозначим через $SO^\circ(n, \Lambda)$ ядро гомоморфизма $\det^\circ : O^\circ(n, \Lambda) \to \Lambda^\circ$ и назовем его обобщенной специальной ортогональной группой степени n над кольцом Λ. Переходим к описанию группы $SO^\circ(n, R)$, $n \geq 2$, в терминах образующих и соотношений. Для этой цели используем порождающую систему

$$T_{ij}(x, y), \langle x, y\rangle \in E(R \times R) \quad (1 \leq i < j \leq n). \tag{4}$$

В этом алфавите имеют место следующие соотношения группы $SO^\circ(n,R)$:

1. a) $h_{ik}(\varepsilon)\circ h_{kn}(\varepsilon)=h_{in}(\varepsilon)$, $i<k<n$,

b) $h_{in}(\varepsilon)\circ h_{in}(\sigma)=h_{in}(\varepsilon\circ\sigma)$,

c) $h_{in}(\varepsilon)\circ h_{kn}(\sigma)=h_{kn}(\sigma)\circ h_{in}(\varepsilon)$, $i<k<n$;

2. a) $T_{ij}(x,y)\circ h_{kn}(\varepsilon)=h_{kn}(\varepsilon)\circ T_{ij}(x,y)$, $\{i,j\}\cap\{k,n\}=\varnothing$,

b) $T_{ij}(x,y)\circ h_{kn}(\varepsilon)=h_{kn}(\varepsilon)\circ T_{ij}(x,y+\varepsilon y)$, $|\{i,j\}\cup\{k,n\}|=3$,

c) $T_{in}(x,y)\circ h_{in}(\varepsilon)=h_{in}(\varepsilon)\circ T_{in}(x,y)$,

d) $\eta_{ij}\circ h_{kn}(\varepsilon)=h_{kn}(\varepsilon)\circ T_{ij}(\varepsilon\mu^2,\mu\varepsilon-e\mu\varepsilon)\circ\eta_{ij}$, $|\{i,j\}\cup\{k,n\}|=3$.

Если стандартные формы матриц из $SO^\circ(n,R)$ определить как $h_{1n}(\varepsilon_1)\circ\cdots\circ h_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1})\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1$ (формы f_i такие же, как в § 2), то почти дословное повторение рассуждений, проведенных для группы $O^\circ(n,R)$, дает следующий результат.

Теорема 4. *Обобщенная специальная ортогональная группа $SO^\circ(n,R)$, $n\geq 2$, над коммутативным локальным кольцом R с условиями* ($\subseteq$), ($=$) *в образующих* (4) *задается соотношениями* **1**, **2** *и* 3–6.

В заключение отметим, что при $n=3$ соотношения 4, а при $n=2$ соотношения 4–6 теряют смысл (т. е. они неадекватны). Поэтому в формулировках теорем 3 и 4 для степеней $n\leq 3$ названные соотношения из списка 1–6 следует считать опущенными.

Литература

1. Сатаров Ж.С. *Определяющие соотношения классических ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 66–74.
2. Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа.* – М.: Наука, 1973. – 144 с.
3. Сатаров Ж.С. *Определяющие соотношения ортогональной группы над упорядоченным евклидовым полем* // Сиб. матем. журн. – 1986. – Т. 27. – № 2. – С. 171–175.
4. Херстейн И. *Некоммутативные кольца.* – М.: Мир, 1972. – 191 с.
5. Сатаров Ж.С. *Образующие и определяющие соотношения в специальной мультипликативной группе слабосовершенного кольца* // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – № 3. – С. 167–175.
6. Ленг С. *Алгебра.* – М.: Мир, 1968. – 564 с.

Ошский технологический университет
(*Кыргызстан*)

Поступила
27.01.1997