ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 512.5

Ю.А. НАЗЫРОВА

О СЛОЙНО ПРОЕКТИВНЫХ РЕШЕТКАХ МАЛОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Конечная модулярная решетка $\mathcal{L}$ называется примарной [1], если

1) каждый элемент из $\mathcal{L}$ совпадает с суммой циклов, в нем содержащихся, и с произведением коциклов, его содержащих;

2) любой интервал из $\mathcal{L}$, не являющийся циклом, содержит не менее трех атомов.

Любой элемент примарной решетки $\mathcal{L}$ можно представить в виде суммы независимых циклов. Если $L = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ — представление ее единицы в таком виде, то число n называют размерностью решетки $\mathcal{L}$. Если при этом d — наибольшее число со свойством $l(A_1) = l(A_2) = \cdots = l(A_d)$, то d называют геометрической размерностью примарной решетки $\mathcal{L}$. Если X — элемент из $\mathcal{L}$, а X^* — сумма всех элементов, покрывающих X, то интервал $[X, X^*]$ является решеткой с дополнениями. Такой интервал будем называть слоем решетки $\mathcal{L}$. Слойно проективной решеткой назовем примарную решетку, у которой каждый слой является дезарговой проективной геометрией над одним и тем же полем $GF(p^k)$.

В [2] в определении слойно проективной решетки требовалось существование инволютивного антиавтоморфизма этой решетки. На самом деле все полученные результаты не нуждаются в таком сильном ограничении. Поэтому в данной работе определение слойно проективной решетки несколько ослаблено.

Так как проективная геометрия размерности не менее трех дезаргова, то любая примарная решетка размерности не менее четырех является слойно проективной.

Пусть $\mathcal{L}$ — слойно проективная решетка, $L = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ — представление ее единицы в виде суммы независимых циклов, $l(A_i) = m_i$ и $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$. Предположим, что каждый слой решетки $\mathcal{L}$ является дезарговой проективной геометрией над полем $GF(p^k)$. Тогда набор $(m_1, m_2, \ldots, m_n, p^k)$ назовем типом решетки $\mathcal{L}$.

В данной работе продолжается начатое в [2] исследование проблемы изоморфизма слойно проективных решеток одинакового типа. Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — две слойно проективные решетки одинакового типа, d — геометрическая размерность этих решеток. Известны следующие результаты.

1) Если $d \geq 3$ и решетки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ арговы, то $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.

Доказательство следует из основного результата работы [1].

2) Если $d \geq 4$, то решетки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ арговы ([3]) и, следовательно, $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.

Таким образом, для решения проблемы изоморфизма слойно проективных решеток одинакового типа достаточно ограничиться случаем решеток малой геометрической размерности. Для таких решеток известно, что

3) если $n = 2$, то $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ (доказано в [4] для случая $k = 1$, но доказательство остается верным и для $k > 1$);

4) если $m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 1$, то $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ ([2]).

В общем случае проблема изоморфизма слойно проективных решеток одинакового типа не имеет положительного решения. Так, в работе [3] построен пример, показывающий, что существуют неизоморфные слойно проективные решетки одинакового типа $(2, 2, 1, p^k)$.

Целью данной статьи является выяснение условий изоморфности решеток типа $(2, 2, 1, \ldots, 1, p^k)$. Пусть $\mathcal{L}$ — слойно проективная решетка типа $(m_1, m_2, \ldots, m_n, p^k)$. Следуя [5], назовем скелетом решетки $\mathcal{L}$ множество $S(\mathcal{L})$ таких элементов $X \in \mathcal{L}$, для которых интервал $[X, X^*]$ имеет размерность n, т. е. является максимальным атомичным интервалом. В [5] показано, что $\mathcal{L}$ является $S(\mathcal{L})$-склеенной суммой всех своих максимальных атомичных интервалов.

Лемма 1. *Цикл $X \in \mathcal{L}$ тогда и только тогда является максимальным циклом, когда $\Big(X + \sum\limits_{j\neq i} A_j\Big)A_i = A_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $l(L)$. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Поэтому считаем $n > 1$. Пусть A — такой атом из $\mathcal{L}$, что $AX = 0$. В силу предположения индукции

$$\Big(X + A + \sum_{j\neq i}(A_j + A)\Big)(A + A_i) = A + A_i$$

для некоторого номера i. Раскрывая скобки, получим

$$\Big(X + A + \sum_{j\neq i} A_j\Big)(A + A_i) = A + A_i.$$

В силу модулярности

$$\Big(A + (X + \sum_{j\neq i} A_j)\Big)(A + A_i) = A + A_i.$$

Если $A \leq \Big(X + \sum\limits_{j\neq i} A_j\Big)$, то, снова используя модулярность, получаем $A + \Big(X + \sum\limits_{j\neq i} A_j\Big)A_i = A + A_i$, т. е. $\Big(X + \sum\limits_{j\neq i} A_j\Big)A_i = A_i$. Если же $A + \Big(X + \sum\limits_{j\neq i} A_j\Big) = 0$, то $X + \sum\limits_{j\neq i} A_j = \sum\limits_{j\neq i} A_j$. В силу предположения индукции $X + \sum\limits_{j\neq i,\text{к}} A_k = A_k$ для некоторого $k \neq i$. Но тогда $\Big(X + \sum\limits_{j\neq \text{к}} A_j\Big)A_k = A_k$. $\square$

Следствие. $S(\mathcal{L}) = [0, A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2]$, где A_i^2 — элемент, покрываемый циклом A_i.

Доказательство. Заметим, что цикл X тогда и только тогда лежит в $S(\mathcal{L})$, когда X не является максимальным циклом. По лемме 1 это равносильно тому, что $X \leq A_1^2 + \cdots + A_n^2$. Остается заметить, что $S(\mathcal{L})$ замкнут относительно сложения ([5], теорема 6.2(d)), а каждый элемент из $\mathcal{L}$ представим в виде суммы циклов. $\square$

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — независимые циклы, то средним для $A_1, A_2, \ldots, A_n$ назовем такой цикл C, что $C + \sum\limits_{j\neq i} A_j = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — дезарговы проективные геометрии размерности $n - 1$ над полем $GF(p^k)$, $n \geq 3$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — независимые точки в $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно, элемент C средний для $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а D средний для $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда, как известно, существует, и притом единственный с точностью до автоморфизма поля изоморфизм $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ такой, что $\varphi(A_i) = B_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\varphi(C) = D$.

Лемма 2. *Если в обозначениях предыдущего абзаца $n > 3$, а*

$$\varphi_l : \Big[0, \sum_{j\neq l} A_j\Big] \to \Big[0, \sum_{j\neq l} B_j\Big],$$

$l = 1, 2,$ — такие изоморфизмы, что $\varphi_l(A_i) = B_i$ для всех $j \neq l$ и $\varphi_1(X) = \varphi_2(X)$ для любого $X \leq \sum\limits_{i>3} A_i$, то существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, продолжающий как φ_1, так и φ_2.

Доказательство. Пусть C — произвольный средний элемент для $A_1, A_2, \dots, A_n$. Положим $C_1 = (C + A_1) \sum\limits_{j\neq 1} A_j$ и $C_2 = (C + A_2) \sum\limits_{j\neq 2} A_j$. Тогда C_1 и C_2 — средние элементы для $A_2, \dots, A_n$ и $A_1, A_3, \dots, A_n$ соответственно. Кроме того,

$$(C_1 + A_1)(C_2 + A_2) = C.$$

Положим

$$D = (\varphi_1(C_1) + B_1)\,(\varphi_2(C_2) + B_2)\,.$$

И пусть φ — изоморфизм $\mathcal{L}_1$ на $\mathcal{L}_2$ такой, что $\varphi(A_i) = B_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, и $\varphi(C) = D$. Отметим, что

$$\varphi(C_1) = \varphi\Big((C + A_1)\sum_{j\neq 1} A_j\Big) = (D + B_1)\sum_{j\neq 1} B_j = (\varphi_1(C_1) + B_1)\sum_{j\neq 1} B_j = \varphi_1(C_1).$$

Аналогично $\varphi(C_2) = \varphi_2(C_2)$. Это означает, что $\varphi|_{[0,\sum\limits_{j\neq l} A_j]} = \varphi_l\alpha_l$, где α_l — автоморфизм поля $GF(p^k)$. Так как $n > 3$, то из условия $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для любого $x \in \sum\limits_{i>3} A_i$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon$, т. е. φ продолжает как φ_1, так и φ_2. Отметим, что в случае $k = 1$ условие $n > 3$ излишне. $\square$

Пусть $\mathcal{L}$ — слойно проективная решетка типа $(2, 2, 1, \dots, 1, p^k)$, и $L = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ есть соответствующее представление единицы решетки $\mathcal{L}$ в виде суммы независимых циклов. Рассмотрим следующее

Условие $(*)$: существует такой изоморфизм

$$\varphi : [0, A_1^2 + A_2^2 + A_3 + \dots + A_n] \to [A_1^2 + A_2^2, L],$$

что $\varphi(X) = A_1^2 + A_2^2 + X$ для всех атомов $X \le A_3 + \dots + A_n$, а для любого атома $X \le A_1^2 + A_2^2$ выполняется равенство $\varphi(X) = Y + (A_1^2 + A_2^2)$, где Y — цикл высоты 2 из $A_1 + A_2$, покрывающий X.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — слойно проективные решетки одинакового типа* $(2, 2, 1, \dots, 1, p^k)$. *Если размерность $\mathcal{L}_i$ больше трех, а решетки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ удовлетворяют условию* $(*)$, *то* $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.

Доказательство. Предположим, что решетки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ удовлетворяют условию теоремы, $L_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ и $L_2 = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ суть представления единиц этих решеток в виде суммы независимых циклов. В силу следствия из леммы 1 имеем равенство $S(\mathcal{L}_1) = [0, A_1^2 + A_2^2]$.

Для каждого элемента $X \in S(\mathcal{L}_1)$ построим изоморфизм φ_x интервала $[X, X^*]$ на интервал $[0, A_1^2 + A_2^2 + A_3 + \dots + A_n]$ следующим образом. Если $X = 0$, то $\varphi_0 = \varepsilon$ — тождественный автоморфизм интервала $[0, A_1^2 + A_2^2 + A_3 + \dots + A_n]$. Если же $X = A_1^2 + A_2^2$, то $\varphi_s = \varphi^{-1}$, где φ — изоморфизм, определенный условием $(*)$. Пусть теперь X — атом из $A_1^2 + A_2^2$. Тогда $X^* = Y + A_l^2 + A_3 + \dots + A_n$, где Y — цикл из $A_1 + A_2$, покрывающий X; $A_l = A_1$, если $X = A_2^2$ и $A_l = A_2$ в остальных случаях. Изоморфизм φ_s индуцирует изоморфизм φ_1 интервала $[X, Y + {} + A_3 + \dots + A_n]$ на интервал $[0, X + A_3 + \dots + A_n]$. Через φ_2 обозначим такой изоморфизм интервала $[X, X + A_l^2 + A_3 + \dots + A_n]$ на интервал $[0, A_l^2 + A_3 + \dots + A_n]$, что $\varphi_2(X + T) = T$ для любого

$$T \le A_l^2 + A_3 + \dots + A_n.$$

По лемме 2 существует изоморфизм $\varphi_x : [X, X^*] \to [0, A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n]$, продолжающий φ_1 и φ_2.

Из построения изоморфизмов φ_x следует, что если X и Y — два элемента из $S(\mathcal{L})$ и Y покрывает X, то $\varphi_x|_{[Y,X^*]} = \varphi_y|_{[Y,X^*]}$.

Аналогично в решетке $\mathcal{L}_2$ строим систему изоморфизмов φ'_x для всех $X \in S(\mathcal{L}_2)$. Пусть χ — изоморфизм $S(\mathcal{L}_1)$ на $S(\mathcal{L}_2)$. Положим для $X \in S(\mathcal{L}_1)$

$$\psi_x = \varphi_x\chi(\varphi'_\chi(X))^{-1}.$$

Тогда ψ_x является изоморфизмом интервала $[X, X^*]$ на интервал

$$[\chi(X), (\chi(X))^*],$$

и если Y покрывает X, то $\varphi_x|_{[Y,X^*]} = \varphi_y|_{[Y,X^*]}$. По теореме 5.1 из [5] отображение $\bigcup\limits_{X \in S(\mathcal{L}_1)} \psi_x$ является изоморфизмом $\mathcal{L}_1$ на $\mathcal{L}_2$. $\square$

Замечание. Теорема 1 остается справедливой и в случае $n = 3$, если в условии $(*)$ потребовать, чтобы изоморфизм φ был линейным, т. е. индуцировался изоморфизмом соответствующих линейных пространств.

В работе [6] было введено понятие C-решетки. Не вдаваясь в строгое определение C-решеток, отметим, что слойно проективная решетка $\mathcal{L}$ является C-решеткой в том и только том случае, когда она обладает таким инволютивным антиавтоморфизмом φ, что $A \le \varphi(A)$ для любого цикла $A \in \mathcal{L}$ ([2], теорема 1). При этом ее единицу можно представить в виде суммы независимых циклов так, что $L = A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \dots + A_n + B_n$, где A_i и B_i — циклы одинаковой высоты и

$$\varphi(A_i + B_i) = \sum_{j \ne i} (A_j + B_j)$$

для всех $i = 1, \dots, n$ ([6], теорема 4).

Теорема 2. *Слойно проективная* C*-решетка типа* $(2, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, p^k)$ *удовлетворяет условию* $(*)$.

Доказательство. Пусть $L = A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \dots + A_n + B_n$ и

$$\varphi(A_i + B_i) = \sum_{j \ne i} (A_j + B_j).$$

Зададим на проективной геометрии $[0, A_1^2 + B_1^2 + A_2 + B_2 + \dots + A_n + B_n]$ однородные координаты следующим образом. Положим $A_1^2 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $B_1^2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, B_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Элементы $C_i = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{i}, 0, \dots, 0)$ для $i > 1$ построим индукцией.

Через C_2 обозначим произвольный средний для элементов A_1^2 и B_1^2, C_3 средний для C_2 и A_2, C_4 средний для C_3 и B_2. Для $k > 1$ полагаем C_{2k+1} — средний для C_{2k} и A_{k+1}, а $C_{2k+2} = (C_{2k+1} + B_{k+1})\varphi(U_{k+1})$, где U_{k+1} — точка из $[0, A_1^2 + B_1^2 + A_2 + B_2 + \dots + A_{k+1}]$, имеющая в базисе $A_1^2, B_1^2, \dots, A_{k+1}$, C_{2k+1} однородные координаты $(0, 0, 1, 0, \dots, 0, -1)$.

Элементы $A_1^2, B_1^2, \dots, A_n, B_n, C_{2n}$ образуют базис проективного пространства $[0, A_1^2 + B_1^2 + \dots + A_n + B_n]$. Из построения элементов C_i и условия $\varphi(A_i + B_i) = \sum\limits_{j \ne i} (A_j + B_j)$ следует

$$\varphi(C_{2n}) = \sum_{i=2}^{n-1} U_{i+1} + T + \sum_{i=1}^{n} C_{2n} + A_1^2,$$

где T — цикл из $A_1 + B_1$, покрывающий атом C_2.

Введем на интервале $[0, A_1^2 + B_1^2 + \dots + A_n + B_n]$ отношение $\perp$ следующим образом. Если X и Y — точки, имеющие в построенном базисе однородные координаты $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$ и $(\gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n)$, то

$$X \perp Y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i) = 0.$$

Для произвольных $A, B \le A_1^2 + B_1^2 + \dots + A_n + B_n$ полагаем $A \perp B \Leftrightarrow X \perp Y$ для любых точек X и Y из $[0, A]$ и $[0, B]$ соответственно. Отношение $\perp$ индуцирует на интервале $[0, A_1^2 + B_1^2 + \dots + A_n + B_n]$ инволютивный антиавтоморфизм χ. При этом для любого атома X выполняется неравенство $X \le \chi(X)$.

Положим $\psi(X) = \varphi\chi(X)$ для любого $X \leq A_1^2 + \cdots + B_n$ и покажем, что ψ — изоморфизм, удовлетворяющий условию $(*)$. Действительно, ψ является изоморфизмом как произведение двух антиизоморфизмов. Если X — точка из $A_1^2 + B_1^2$, то $\chi(X) = X + \sum\limits_{i\neq 1}(A_i + B_i)$ и $\varphi(\chi(X)) = \varphi(X)(A_1 + B_1) = Y + A_1^2 + B_1^2$, где Y — цикл высоты 2, покрывающий X. Положим $C'_{2i} = (C_{2i} + A_1 + B_1)\sum\limits_{j\neq 1}(A_j + B_j)$. Заметим, что $\varphi\chi(X) = X + A_1^2 + B_1^2$ для $X \in \{A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n, C'_{2n}\}$. Это очевидно для элементов A_i и B_i. Для C'_{2n} имеем $\chi(C'_{2n}) = A_1^2 + B_1^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} C'_{2i} + \sum\limits_{i=2}^{n-1} U_{i+1}$. Так как $\varphi(C'_{2n}) \geq \chi(C'_{2n})$, то $C'_{2n} \leq \varphi\chi(C'_{2n})$. Кроме того, $\varphi\chi(C'_{2n}) \geq A_1^2 + B_1^2$. Из $l(\chi(C'_{2n})) = 2n - 1$ следует, что $l(\varphi\chi(C'_{2n})) = (2n + 2) - (2n - 1) = 3$, т. е. $\varphi\chi(C'_{2n}) = A_1^2 + B_1^2 + C'_{2n}$. Это означает, что $\varphi\chi$ индуцирует полевой автоморфизм интервала $[A_1^2 + B_1^2, A_1^2 + B_1^2 + A_2 + \cdots + B_n]$. Пусть a — произвольный элемент поля $GF(p^k)$ и X — атом, имеющий в построенном выше базисе однородные координаты $(0, 0, a, 1, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$\varphi(X) = X + A_1 + B_1 + \sum_{i>2}(A_i + B_i)$$

и

$$\chi(X) = X + A_1^2 + B_1^2 + \sum_{i>2}(A_i + B_i).$$

Поэтому $\varphi\chi(X) = \varphi(X)\Big(A_1^2 + B_1^2 + \sum\limits_{i>2}(A_i + B_i)\Big)(A_1 + B_1 + A_2 + B_2) = X + A_1^2 + B_1^2$ и, следовательно, $\varphi\chi$ индуцирует тождественный автоморфизм интервала $[A_1^2 + B_1^2, A_1^2 + B_1^2 + A_2 + \cdots + B_n]$. $\square$

Следствие. Слойно проективные C-решетки одинакового типа $(2, 2, 1, \ldots, 1, p^k)$ изоморфны.

Последнее утверждение в [2] было доказано другим способом.

Литература

1. Jonsson B., Monk G.S. *Representations of primary Arguesian lattices* // Pacific. J. Math. – 1969. – V. 30. – № 1. – P. 95–139.
2. Антонов В.А., Назырова Ю.А. *Слойно проективные решетки.* 1 // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63. – Вып. 2. – С. 170–182.
3. Monk G.S. *Desargues law and the representation of primary lattices* // Pacific. J. Math. – 1969. – V. 30. – № 1. – P. 175–186.
4. Анищенко С.А. *О представлении некоторых модулярных структур структурами подгрупп* // Матем. зап. Красноярск. гос. пед. ин-та. – Красноярск, 1965. – Вып. 1. – С. 1–21.
5. Herrmann Ch. *S-verklebte Summen von Verbanden* // Math. Z. – 1973. – V. 130. – P. 255–274.
6. Антонов В.А. *Об одном классе модулярных решеток конечной длины* // Алгебра и логика. – 1991. – Т. 30. – № 1. – С. 3–14.

Южно-Уральский государственный университет

Поступила
24.01.2000