ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 512.7

П.Н. ИВАНЬШИН

СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ НА ГРУППОИДЕ МНОГООБРАЗИЯ СО СЛОЕНИЕМ, ПОРОЖДЕННЫМ ДЕЙСТВИЕМ КОММУТАТИВНОЙ ГРУППЫ

В данной работе изучаются многообразия со слоениями, порожденными действием коммутативной группы Ли и допускающими инвариантную связность Эресмана. Показано, что такое многообразие имеет структуру, почти совпадающую со структурой произведения многообразий (подобные вопросы рассматривались в [1]–[3]). Построено вложение алгебры $C_c^\infty(G)$ [4] в произведение алгебр непрерывных функций на трансверсали, некотором слое слоения и универсальной накрывающей группы, порождающей слоение.

1. Структура многообразия

Рассмотрим многообразие M со слоением F [5], образованным орбитами локально свободного действия коммутативной группы Ли H, допускающим связность Эресмана [6], [7], инвариантную относительно действия H.

Действие H индуцирует локально свободное действие универсальной накрывающей $\widetilde{H}$, $\widetilde{g}p = \rho(\widetilde{g})p$, $\widetilde{g} \in \widetilde{H}$, $p \in M$, где $\rho : \widetilde{H} \to H$ — универсальное накрытие, причем орбиты этих действий совпадают. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что H односвязна. Более того, в этом случае $H \cong \mathbb{R}^p$, $p = \dim H$.

Пусть P — множество точек, которые могут быть соединены с выделенной точкой $x_0 \in M$ горизонтальной кривой. Предположим, что

1) P — вложенное подмногообразие M, замкнутое в M;

2) $\dim P = n - p$ – коразмерности слоения;

3) существует такой слой S, что мощность множества $P \bigcap S$ равна единице.

Теорема 1. 1) $S = H/\operatorname{span}(\bigcup\limits_{y\in M} H_y)$, *где* H_y — *группа изотропии слоя* L_y.

2) *Пусть* S' — *такое связное подмножество в* H, *что универсальное накрытие* $p : H \to S$, *где* $p(e) = x_0$, *отображает* S' *биективно на* S *и является гомеоморфизмом в ограничении на внутренность* S' *и* $P\cdot\partial S'$ *нигде не плотно. Тогда существует биекция* $\phi : M \to P\times S'$, *которая почти всюду непрерывна.*

Доказательство. Возьмем $x_0 \in S$. Обозначим через H_y группу изотропии слоя, проходящего через точку $y \in M$. Покажем, что $H_y \subset H_{x_0}$. Пусть $h \in H_y$. Поскольку $S \cap P = \{x_0\}$ и h переводит горизонтальные кривые в горизонтальные кривые, то h переводит горизонтальную кривую, соединяющую y и x_0, в горизонтальную кривую, соединяющую y с hx_0, но тогда hx_0 лежит в P. Поэтому $hx_0 = x_0$, и h лежит в группе изотропии слоя S.

Определим проекции $\pi_P : M \to P$, $\pi_S : M \to S$ следующим образом. Для любого $x \in M$ рассмотрим кривую, соединяющую x_0 и x. Она определяет прямоугольник, нижняя сторона которого есть кривая на P с конечной точкой y, а левая сторона есть кривая на S [7]. Зафиксируем гомеоморфизм между пространством гомотопических классов путей в S, начинающихся в точке $x_0 \in S$, который является универсальной накрывающей S [8], и группой H. Левая сторона данного прямоугольника определяет точку $s \in H$, и существует единственная $s' \in S : s = s'h_0$, где $h_0 \in H_{x_0}$.

Положим $\pi_P(x) = h_0^{-1}y$, $\pi_S(x) = s'$. Покажем, что эти отображения определены корректно. Прежде всего заметим, что h_0 переводит P в P, т.к. S неподвижно при действии $h_0 \in H_{x_0}$ и в силу инвариантности связности Эресмана P переходит при действии h_0 в интегральное подмногообразие P'. Но тогда P' проходит через x_0, значит, $P' = P$. Далее покажем, что точки $h_0^{-1}y$, s' не зависят от выбора кривой γ.

Пусть даны две кривые: γ_1, γ_2 : $[0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = x$. Они определяют прямоугольники с нижними $g_1^P(t)$ и $g_2^P(t)$ и левыми $g_1^S(t)x_0$ и $g_2^S(t)x_0$ сторонами, где g_1^S, g_2^S : $[0,1] \to H$, причем $g_1^P(0) = g_2^P(0) = x_0$, $g_1^S(0) = g_2^S(0) = e$, где e — единица H, $g_1^P(1) = y_1$, $g_2^P(1) = y_2$. В силу единственности прямоугольника с начальными вертикальной и горизонтальной сторонами верхние стороны прямоугольников суть $g_1' = g_1^P g_1^S(1)$ и $g_2' = g_2^P g_2^S(1)$ соответственно, и имеем $g_1'(1) = g_2'(1) = x$. Получаем горизонтальную кривую с началом в $g_1'(0)$ и концом в $g_2'(0)$, лежащими в S. Применив $(g_1^S(1))^{-1}$, получим горизонтальную кривую, начинающуюся в точке x_0 и заканчивающуюся в некоторой точке $x_1 \in S$. В силу 3) $x_1 = x_0$, следовательно, $g_1'(0) = g_2'(0)$. Поэтому $g_1^S(1)x_0 = g_1^S(1)g_1^P(0) = g_1'(0) = g_2'(0) = g_2^S(1)g_2^P(0) = g_2^S(1)x_0$, но тогда $g_1^S(1)^{-1}g_2^S(1)$ — элемент H_{x_0}. Следовательно, $y_1 = g_1^P(1) = g_1'(1)g_1^S(1)^{-1} = xg_1^S(1)^{-1} = g_2'(1)g_1^S(1)^{-1} = g_2^P(1)g_2^S(1)g_1^S(1)^{-1} = y_2 g_2^S(1)g_1^S(1)^{-1}$, т.е. $y_1 g_1^S(1) = y_2 g_2^S(1)$. Таким образом, π_P и π_S не зависят от выбора кривой γ, и мы можем определить отображение $\phi : M \to P \times S'$, $\phi(x) = (\pi_P(x), \pi_S(x))$.

Докажем, что ϕ — биекция. Для любой $(y,s) \in P \times S$ возьмем кривую $\gamma : [0,1] \to P$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y$, и $\delta : [0,1] \to H$, $\delta(0) = e$, $\delta(1) = s$. Определен прямоугольник $(u,v) \to \gamma(u)\delta(v)$, и пусть $x = \gamma(1)\delta(1)$. Тогда $\phi(x) = (y,s)$. Доказательство инъективности аналогично доказательству независимости проекций π_P, π_S от выбора кривой γ.

Докажем, что отображение ϕ непрерывно почти всюду. Рассмотрим $W = M \setminus \overline{\partial S' P}$ с естественной структурой многообразия со слоением и проекции $\pi_P|_W$, $\pi_S|_W$. По построению π_P и π_S для любого $U = \mathring{U} \subset P$ множество $\pi_P^{-1}(U) = \mathring{S}'U = \mathrm{sat}_F(U)$ открыто. Обозначим через F' слоение, определенное распределением, касательным к sP, $s \in \mathring{S}$. Тогда для любого $V = \mathring{V} \subset \mathring{S}'$ $\pi_S^{-1}(V) = VP = \mathrm{sat}_{F'}(V)$ также открыто.

Непрерывности нет только на множестве $\partial S' \subset \overline{S' \times P}$ — границе S', поскольку при $x \to hx_0$ $h \in H_y$, где $\phi(x_0) = (p_0, s_0)$, имеем $\phi(x) = (p,s) \to (hp_0, hs_0) \neq (p_0, s_0)$. $\square$

Рассмотрим теперь несколько более общую ситуацию: подмногообразие P не удовлетворяет свойству 3).

Следствие. Пусть M — многообразие со слоением, порожденным действием коммутативной группы H. Пусть P — множество точек, которые могут быть соединены с выделенной точкой $x_0 \in L_0 \subset M$ горизонтальной кривой, такое, что

1) P — подмногообразие,

2) $\dim P = n - p$ — коразмерности слоения.

Тогда существует сюръекция $P \times L_0 \to M$, которая почти всюду является непрерывной, причем $\pi^{-1}(x)$ биективно на L_0/S, $S = H/H_P$, где H_P — группа изотропии слоя P.

Доказательство. Очевидно, L_0 накрывает S, причем группа накрытия есть H_P/H_0. Тогда существует множество точек с мощностью $|L_0/S|$ из $P \times L_0$, определяющих одну и ту же точку на M, как описано в начале доказательства теоремы 1, поскольку пары $(hs, h^{-1}p)$, $s \in S$, $p \in P$, $h \in L_0/S$ представляют разные точки из $P \times L_0$, но определяют одну и ту же кривую на M. $\square$

Пример 1. Рассмотрим многообразие Зейферта M с группой $\mathbb{S}^1$, получающееся из $[0,1] \times \mathbb{C}$ склейкой точек $(0,x)$ с $(1, e^{i2\pi/k}x)$ [9]. Биекция ϕ из теоремы 1 отображает M на $\mathbb{C} \times [0,1)$.

Пример 2. $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ со слоением, заданным векторным полем $v_{(x,y)} = (a,b)$, $a/b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (иррациональная обмотка тора) и связностью, заданной параллелями ($w_{(x,y)} = (0,1)$). Тогда ϕ есть накрытие $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$.

Пример 3. Рассмотрим спирали и окружность на $\mathbb{R}^2 \setminus 0 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, которые являются интегральными кривыми векторного поля $v_{(\rho,\alpha)} = (\rho - 1, 1)$ в полярной системе координат. Связность Эресмана задается распределением, натянутым на $w_{(\rho,\alpha)} = (1,0)$. Если точка x лежит на окружности, то биекция ϕ отображает $\mathbb{R}\times[0,1)$ в $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$, а если x лежит на спирали, то ϕ есть накрытие $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

2. Структура алгебры $C_c^\infty(G)$

Пусть G — группоид с проекциями s, r. Положим $G^x = \{\gamma \in G | r(\gamma) = x\}$. Для любого $\gamma \in G$ определена биекция $L_\gamma : G^{s(\gamma)} \to G^{r(\gamma)}$, $L_\gamma\mu = \gamma\mu$.

Определение ([4], [10]). Пусть G — локально компактный группоид с проекциями $s, r : G \to L$. Левая система Хаара есть система мер $(\lambda^x)_{x\in L}$ на G такая, что

1) носитель для λ^x есть G^x,
2) $L_\gamma^* \lambda^{r(\gamma)} = \lambda^{s(\gamma)}$ для любой $\gamma \in G$, т. е. система $\{\lambda^x\}$ является G-инвариантной,
3) для любой комплекснозначной функции ϕ с компактным носителем отображение

$$x \mapsto \lambda(\phi)(x) = \int \phi d\lambda^x$$

есть непрерывная функция на G^x.

Пусть теперь G — группоид Ли с левоинвариантной системой мер Хаара $\{\lambda^x\}_{x\in L}$, $C_c^\infty(G)$ — алгебра гладких функций на G со значениями в $\mathbb{C}$ и компактными носителями.

Операции умножения и инволюции зададим следующим образом:

$$f * g(\gamma) = \int_{G^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma_1) g(\gamma_1^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma_1),$$
$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

Обозначим через π_x гомоморфизм из $C_c^\infty(G)$ в алгебру ограниченных операторов ([11], с. 373) на гильбертовом пространстве $L_2(G^{s(\gamma)}, \lambda^{s(\gamma)})$, $(\pi_x(f)\phi)(\gamma) = \int f(\gamma^{-1}\eta)\phi(\eta) d\lambda^{s(\gamma)}(\eta)$. Определим $\|f\|_x = \|\pi_x(f)\|_{L_2(G^{s(\gamma)})}$ и $\|f\| = \sup\limits_{x\in M} \|f\|_x$. Замыкание $C_c^\infty(G)$ по этой норме обозначается $C_r^*(G)$.

Каждому слою L слоения F соответствует группоид гомотопических классов путей в L с фиксированными началом и концом. Обозначим тотальное пространство этого группоида $G(L)$. Проекции на начало и конец пути обозначаются s и $r : G(L) \to L$ [10], [4].

Для слоения (M, F) определен группоид G, состоящий из гомотопических классов путей с фиксированными началом и концом, целиком лежащих в одном слое G. Из [12] следует, что в данном случае пространство G есть тотальное пространство расслоения с базой M и проекциями r или s, т. е. G — группоид Ли.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и* S *компактно. Тогда существует вложение алгебры* $C_c^\infty(G)$ *в* $C(S')\otimes C(P)\otimes C(H)$, *где через* $C(X)$ *обозначена алгебра непрерывных функций на пространстве* X.

Доказательство. Для любой точки $x \in M$ отображение $\alpha_x : H \to L_x$, $h \to hx$ есть накрытие. Построим отображение $\widetilde{\phi} : G \to P \times S' \times H$, $\widetilde{\phi}([\gamma(t)]) = (\phi(s(\gamma)), h)$, где h — конец лифта γ в H относительно накрытия α_x. Топология на тотальном пространстве группоида G, рассматриваемого как главное расслоение над M со слоем H, слабее инициальной топологии на G, построенной с помощью отображения $\widetilde{\phi}$.

Далее по предположению $C_c(G)|_{S'} \subset C_c(\overline{S'})$, здесь замыкание $\overline{S'}$ рассматривается в пространстве H. Алгебра $C_c(G)|_P$ вложена в $C_c(P)$, поскольку P — подмногообразие, $C_c(G)|_{G^x \cong H} \subset C_c(H)$ по той же причине, т. к. $G^x \cong H$ есть слой расслоения, определенного группоидом [12]. Это значит, что $\widetilde{f} \in C(P \times S \times H)$, $\widetilde{f}(\widetilde{\phi}(\gamma)) \equiv f(\gamma)$ есть функция с компактным носителем.

Доказательство проведем по следующей схеме ([13], с. 26, теорема). Сначала для заданной равномерно непрерывной функции ϕ рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\partial^{np}\phi}{\prod\limits_{i=1}^{n} \partial x_i^p}$, $x = (y, z, w)$, и разбиение единицы ϕ_i, построенное по областям, в которых колебание заданной функции ϕ меньше произвольного $\eta > 0$. Далее рассмотрим функцию $P(x) = \sum\limits_i f(c_i)\phi_i(x)$. Вводится функция $Q(x)$ такая, что $Q(0) = 0$, $\frac{\partial^{np}Q(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \partial x_i^p} = P(x)$. Наконец, искомая функция есть $\sigma_\eta(x) = L(x)Q(x)$, где $L = L_1(y)L_2(z)L_3(w)$, $0 \geq L_1, L_2, L_3 \leq 1$. Для любого $y \in A$ $\;L_1(y) = 1$, любого $z \in B$ $\;L_2(z) = 1$, любого $w \in C$ $L_3(w) = 1$, где $\operatorname{supp} \phi \subset A \times B \times C$. При этом для каждого $x \in U \times V \times W$ и дифференциала D порядка p имеем $|D\sigma(x) - D\phi(x)| \leq 2^{np}M\eta$, где $M = \sup|DL(x)|$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Литература

1. Шапиро Я.Л. *О двулистной структуре на приводимом римановом многообразии* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 102–110.
2. Шапиро Я.Л., Жукова Н.И. *О глобальной структуре приводимых многообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 10. – С. 60–62.
3. Шапиро Я.Л., Жукова Н.И., Игошин В.А. *Слоения на некоторых классах римановых многообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 7. – С. 93–96.
4. Moore C.C., Schochet C. *Global analysis on foliated spaces.* – Springer-Verlag, 1988. – 337 p.
5. Molino P. *Riemannian foliations.* – Birkhauser: Boston, 1988. – 344 p.
6. Ehresmann C. *Les connexions infinitesimals dans un espace fibre differentiable* // Centre Belge Rech. Math. Colloq. Topologie Bruxelles. – 1950. – P. 29–55.
7. Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations* // Quart. J. Math. Oxford. – 1984. – № 35. – P. 383–392.
8. Фоменко А.Т., Фукс Д.С. *Курс гомотопической топологии.* – М.: Наука, 1989. – 528 с.
9. Арнольд В. И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Ижевск: Регул. хаотич. динам., 2000. – 400 с.
10. Landsman N.P., Ramazan B. *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids* // preprint: Arxiv.org/math-ph/0001005. – 1999. – 33 p.
11. Шерстнев А.Н. *Конспект лекций по математическому анализу.* – Казань: УНИПРЕСС, 1998. – 488 с.
12. Малахальцев М.А. *(X, G)-слоения* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 7. – С. 55–65.
13. Ж. де Рам. *Дифференцируемые многообразия.* – М.: Ин. лит., 1956. – 250 с.

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева при Казанском государственном университете

Поступили
первый вариант 09.09.2002
окончательный вариант 11.05.2004