ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.518

А.Д. НАХМАН

О ЧАСТНЫХ СУММАХ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ

В работе получена аппроксимация частных сумм (по прямоугольникам с "соизмеримыми" сторонами) кратного ряда Фурье–Якоби последовательностью операторов типа свертки с тригонометрическим ядром (теорема 1). Установлено однако (теорема 2), что классическая равносходимость отсутствует уже в двумерном случае.

1°. *Обозначения.* Пусть $G_n = [-1,1]^n$; $G_n^\delta = [\delta - 1, 1 - \delta]^n$, где натуральное n и $\delta \in (0,1)$ произвольны и фиксированы; $\varepsilon = \arccos(1-\delta)$, $Q_n = [0,\pi]^n$, $Q_n^\varepsilon = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]^n$. Предположим, что $\overline{x}$, $\overline{t}$ ($\overline{x} \in G_n$, $\overline{t} \in G_n$), $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}, \dots$ — n-мерные векторы с компонентами x_j, t_j, α_j, $\beta_j, \dots$ соответственно; $\alpha_j \ge -\frac{1}{2}$, $\beta_j \ge -\frac{1}{2}$, $\varphi_j = \arccos x_j$, $\theta_j = \arccos t_j$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим

$$\rho(\overline{x}) = \prod_{j=1}^n \rho^{\alpha_j\beta_j}(x_j), \quad \vartheta(\overline{x}) = \prod_{j=1}^n \vartheta^{\alpha_j\beta_j}(x_j), \quad H(\overline{x}) = h(\overline{\varphi}) = \prod_{j=1}^n h^{\alpha_j\beta_j}(\varphi_j);$$

здесь

$$h^{\alpha\beta}(\varphi) = (\sin\tfrac{\varphi}{2})^{-\alpha-1/2}(\cos\tfrac{\varphi}{2})^{-\beta-1/2}, \ \ \rho^{\alpha\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \ \ \vartheta^{\alpha\beta}(x) = (1-x)^{\alpha/2-1/4}(1+x)^{\beta/2-1/4};$$

индекс j у символов α, β, x, φ в последних формулах опущен.

Рассмотрим произвольную суммируемую на G_n с весом $\rho(\overline{x})$ функцию $f(\overline{x})$, пусть $f^\vee(\overline{\theta}) = f(\cos\theta_1 \dots \cos\theta_n)$. Очевидно, при фиксированных $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$

$$\int_{G_n} f(\overline{x})\vartheta(\overline{x})d\overline{x} = \text{const}\int_{Q_n} \frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}d\overline{\theta}$$

и

$$\int_{G_n} f(\overline{x})\vartheta(\overline{x})\Big(\sum_{j=1}^n (1-x_j^2)^{-1/2}\Big)d\overline{x} = \text{const}\int_{Q_n} \frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\Big(\sum_{j=1}^n \sin^{-1}\theta_j\Big)d\overline{\theta}.$$

Пусть $\{p_k^{(\alpha\beta)}(x)\}$, $k = 0, 1, \dots,$ — система ортонормированных на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho^{\alpha\beta}(x)$ многочленов Якоби с положительным старшим коэффициентом. Сопоставим функции f ее кратный ряд Фурье–Якоби

$$f(\overline{x}) \sim \sum_{k_1=0}^\infty \cdots \sum_{k_n=0}^\infty c_{k_1\dots k_n}(f)\prod_{j=1}^n p_{k_j}^{(\alpha_j\beta_j)}(x_j), \tag{1}$$

где

$$c_{k_1\dots k_n}(f) = \int_{G_n} f(\overline{t})\Big(\prod_{j=1}^n p_{k_j}^{(\alpha_j\beta_j)}(t_j)\Big)\rho(\overline{t})d\overline{t}. \tag{2}$$

Учитывая формулы (2) для коэффициентов Фурье, прямоугольные частные суммы ряда (1) запишем в виде

$$S_{\overline{m}}(f;\overline{x}) = S_{m_1\dots m_n}(f; x_1 \dots x_n) = \int_{-1}^1 dt_1 \cdots \int_{-1}^1 f(t_1\dots t_n)\Big(\prod_{j=1}^n D_{m_j}(x_jt_j)\rho^{\alpha_j\beta_j}(t_j)\Big)dt_n, \tag{3}$$

где (индекс j временно опускаем)

$$D_m(x,t) = D_m^{(\alpha,\beta)}(x,t) = \sum_{k=0}^{m} p_k^{(\alpha\beta)}(x) \cdot p_k^{(\alpha\beta)}(t) \tag{4}$$

— ядро Дирихле, которое согласно формуле Кристоффеля–Дарбу ([1], с. 275) имеет вид

$$D_m(x,t) = \Lambda_m \frac{p_{m+1}^{(\alpha\beta)}(x) \cdot p_m^{(\alpha\beta)}(t) - p_m^{(\alpha\beta)}(x) \cdot P_{m+1}^{(\alpha\beta)}(t)}{x-t}, \tag{5}$$

здесь $\Lambda_m = 1/2 + O(1/m)$.

Пусть $M = m + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$, $\sigma = -(\alpha + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$,

$$d_m(\varphi,\theta) = d_m^{(\alpha\beta)}(\varphi,\theta) = \frac{1}{\pi}\Bigg(\frac{\sin[(M+\frac{1}{2})(\varphi+\theta) + 2\sigma]}{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}} + \frac{\sin(M+\frac{1}{2})(\varphi-\theta)}{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\Bigg), \tag{6}$$

$\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, причем для $\varphi = \theta$ последнее слагаемое есть по определению $M + \frac{1}{2}$ и

$$U_{\overline{m}}(f;\overline{x}) = U_{m_1\dots m_n}(f;x_1\dots x_n) = \int_{Q_n} \frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\Bigg(\prod_{j=1}^{n} d_{m_j}(\varphi_j,\theta_j)\Bigg) d\overline{\theta} \tag{7}$$

— последовательность операторов типа свертки $f^\vee/h$ с ядром тригонометрического типа. Здесь и далее будем предполагать: существует такая постоянная $\omega \ge 1$, что

$$\omega^{-1} \le \frac{m_i}{m_j} \le \omega \tag{8}$$

для всех m_i, $m_j = 1,2,\dots$ $(i,j = 1,\dots,n,\ i \ne j)$; пусть $\mu = \max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} m_j$; χ_μ — характеристическая функция отрезка $[1/\mu, \pi - 1/\mu]$, $\widetilde{\chi}_\mu(\theta) = 1 - \chi_\mu(\theta)$. Через C обозначим положительные (различные, вообще говоря, в различных формулах) постоянные, зависящие, может быть, лишь от параметров n, δ, α_j, β_j, а также вводимых ниже параметров γ, l, q, r (для нас важно только, что эти постоянные не зависят от функции f, аргументов θ_j, φ_j и m_j, где $j = 1,2,\dots,n$).

Рассмотрим, наконец, максимальную функцию Харди–Литтлвуда–Марцинкевича–Зигмунда ([2], с. 467–468),

$$\Phi_\gamma^*(\overline{x}) = \sup_{i_1\dots i_n} 2^{-\gamma(i_1+\dots+i_n)} \sup_{\eta>0} \frac{1}{\operatorname{mes} E(\overline{\varphi},\overline{i},\eta)} \int\limits_{E(\overline{\varphi},\overline{i},\eta)} \left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \sin^{-1}\theta_j\Bigg)\right| d\overline{\theta};$$

пусть $f_\gamma^*(\overline{x})$ — функция того же вида, но с подинтегральным выражением $\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right| d\overline{\theta}$; здесь $\gamma \in (0,1)$ произвольно и все параллелепипеды

$$E(\overline{\varphi},\overline{i},\eta) = [\varphi_1 - 2^{i_1}\eta, \varphi_1 + 2^{i_1}\eta] \times \dots \times [\varphi_n - 2^{i_n}\eta, \varphi_n + 2^{i_n}\eta], \quad \overline{i} \in Z_+^n,$$

имеют столь малые размеры, что содержатся в некотором кубе $[\varphi_1 - \nu\pi, \varphi_1 + \nu\pi] \times \dots \times [\varphi_n - \nu\pi, \varphi_n + \nu\pi]$, ν — натуральное фиксированное число. Обозначим

$$\mathcal{F}_\gamma^*(\overline{x}) = f_\gamma^*(\overline{x}) + \sum_{\overline{y}\in\Pi\overline{x}} f_\gamma^*(\overline{y}); \tag{9}$$

здесь $\Pi_{\overline{x}}$ — множество всех вершин куба G_n и всех проекций выбранного $\overline{x}$ ($\overline{x} \in G_n^\delta$) на его грани, т. е. совокупность всевозможных точек $\overline{y} = (y_1\dots y_n)$, отличающихся от данного $\overline{x}$ тем, что произвольный набор компонент x_j заменен на соответствующий набор чисел вида ±1; так, например, слагаемое $f_\gamma^*(1\dots1)$ соответствует интегрированию по $[-2^{i_1}\eta, 2^{i_1}\eta] \times \dots \times [-2^{i_n}\eta, 2^{i_n}\eta]$ и т. д.

2°. *Оценка уклонения.*

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (8). *Тогда при всех* $\overline{x} \in G_n^\delta$, $\gamma \in (0,1)$ *имеют место оценки*

$$|S_{\overline{m}}(f,\overline{x}) - H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})| \leq \begin{cases} C\mu^{\gamma n(n+1)-1}\mathcal{F}_\gamma^*(\overline{x}), \\ C\mu^{\gamma n(n+1)-1}\Phi_\gamma^*(\overline{x}). \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство разобьем на несколько этапов: рассмотрим тригонометрическое представление ядра Дирихле, мажорантные (для левой части (10)) интегралы, оценки разности ядер и, наконец, оценки мажорантных интегралов в терминах $\mathcal{F}_\gamma^*(\overline{x})$, $\Phi_\gamma^*(\overline{x})$.

3°. *Тригонометрическое представление ядра Дирихле.* Пусть $x \in [\delta-1, 1-\delta]$, тогда (см. 1°) $\varphi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Можно считать здесь и в дальнейшем μ достаточно большим, именно $\mu > 2/\varepsilon$; случай $1 \leq \mu \leq 2/\varepsilon$ см. в конце п. 8°. В следующем утверждении индекс j ($j \in \{1,\dots,n\}$ произволен) у параметров m, θ, φ, α, β опущен.

Лемма 1. *Для всех* $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, $\theta \neq \varphi$ *ядро (5) имеет представление*

$$D_m^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi,\cos\theta)\rho^{\alpha\beta}(\cos\theta)\sin\theta = \frac{h^{\alpha\beta}(\varphi)}{h^{\alpha\beta}(\theta)}\Big\{d_m^{(\alpha\beta)}(\varphi,\theta)\chi_\mu(\theta) + \frac{O(1)\chi_\mu(\theta)}{\mu\sin\theta\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} + O(1)\widetilde{\chi}_\mu(\theta)\Big\}, \tag{11}$$

причем постоянные в оценках сверху для $|O(1)|$ *не зависят от* θ, φ, m.

Замечание. Формула (11) дополняет результат (асимптотику), приведенный в ([3], с. 262). Если фиксировать $\varphi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, то соотношение (11) на любом замкнутом интервале, внутреннем к $(0,\varphi)$ или (φ,π) имеет место равномерно по θ.

Установим (11). Воспользуемся весовыми оценками ([1], с. 299)

$$|p_k^{(\alpha\beta)}(\cos\theta)| \leq Ch^{\alpha\beta}(\theta), \quad 0<\theta<\pi; \quad k=1,2,\dots; \quad \alpha,\beta \geq -1/2 \tag{12}$$

для ортонормированных многочленов Якоби и асимптотической формулой ([3], с. 205; [1], с. 297)

$$p_k^{(\alpha\beta)}(\cos\theta) = (\pi 2^{\alpha+\beta})^{-1/2}h^{\alpha\beta}(\theta)\Big\{\cos\Big(\frac{2k+\alpha+\beta+1}{2}\theta+\sigma\Big) + \frac{O(1)}{k\sin\theta}\Big\}, \tag{13}$$

($\theta \in [c_0/k, \pi - c_0/k]$ любое; постоянная $c_0 \in (0,\pi)$ произвольна и фиксирована; постоянная же в оценке сверху для $|O(1)|$ в остаточном члене (13) не зависит от θ и k). Ввиду "соизмеримости" μ со всеми m_j согласно (12) и (13) имеем

$$p_m^{(\alpha\beta)}(\cos\theta) = (\pi 2^{\alpha+\beta})^{-1/2}h^{\alpha\beta}(\theta)\Big\{\chi_\mu(\theta)\cos\Big(\frac{2m+\alpha+\beta+1}{2}\theta+\sigma\Big) + \frac{\sigma(1)}{\mu\sin\theta}\chi_\mu(\theta)\Big\} + \\ + O(h^{\alpha\beta}(\theta))\widetilde{\chi}_\mu(\theta). \tag{14}$$

В случае же $\varphi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ (при этом $\sin\varphi \geq c > 0$) носитель $\widetilde{\chi}_\mu(\varphi)$ пуст ($\mu > \frac{2}{\varepsilon}$), следовательно, (14) принимает вид

$$p_m^{(\alpha\beta)}(\cos\varphi) = (\pi 2^{\alpha+\beta})^{-1/2}h^{\alpha\beta}(\varphi)\Big\{\cos\Big(\frac{2m+\alpha+\beta+1}{2}\varphi+\sigma\Big) + \frac{O(1)}{\mu}\Big\}. \tag{15}$$

Согласно (14), (15) и формуле (5) для $x = \cos\varphi$, $t = \cos\theta$ получаем

$$\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\sin\frac{\varphi+\theta}{2}D_m^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi,\cos\theta) = -\left(\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)\frac{h^{\alpha\beta}(\varphi)h^{\alpha\beta}(\theta)}{\pi 2^{\alpha+\beta+1}}\cdot$$
$$\cdot\left[\cos\left(\frac{2m+\alpha+\beta+3}{2}\varphi+\sigma\right)\cos\left(\frac{2m+\alpha+\beta+1}{2}\theta+\sigma\right)-\cos\left(\frac{2m+\alpha+\beta+1}{2}\varphi+\sigma\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\cos\left(\frac{2m+\alpha+\beta+3}{2}\theta+\sigma\right)\right]\chi_\mu(\theta)+\left(\frac{\chi_\mu(\theta)}{\mu\sin\theta}+\widetilde{\chi}_\mu(\theta)\right)O(h^{\alpha\beta}(\theta))h^{\alpha\beta}(\varphi),\quad \varphi\neq 0. \quad (16)$$

Здесь $\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\geq\frac{2}{\pi}\frac{\varphi+\theta}{2}\geq\frac{\varepsilon}{\pi}$ и кроме того, для $\theta\in\operatorname{supp}\widetilde{\chi}_\mu(\theta)$ (при $1/\mu<\varepsilon/2$) имеем $\frac{\varepsilon}{4}<\frac{1}{2}(\varepsilon-\frac{1}{\mu})\leq\frac{|\varphi-\theta|}{2}<\frac{\pi-\varepsilon+\pi}{2}<\pi-\frac{\varepsilon}{4}$, а поэтому $|\sin\frac{\varphi-\theta}{2}|>\sin\frac{\varepsilon}{4}>0$. Теперь после несложных преобразований (см., напр., [3], с. 262) тригонометрических функций в правой части соотношения (16) получим представление (11).

4°. *Мажорантные интегралы.* Если под знаком интеграла (3) сделать замену переменных $t_j=\cos\theta_j$ $(j=1,\ldots,n)$, то согласно формуле (11) и определению (7) имеем

$$|S_{\overline{m}}(f,\overline{x})-H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})|\leq Ch(\overline{\varphi})\int_{Q_n}\left|\frac{f^{\vee}(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right||\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})|d\overline{\theta}; \quad (17)$$

здесь

$$\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})=\prod_{j=1}^{n}\partial_{m_j}(\varphi_j,\theta_j)-\prod_{j=1}^{n}d_{m_j}(\varphi_j,\theta_j), \quad (18)$$

при этом

$$\partial_m(\varphi,\theta)=\partial_m^{(\alpha,\beta)}(\varphi,\theta)=d_m^{(\alpha\beta)}(\varphi,\theta)\chi_\mu(\theta)+\frac{O(1)}{\mu\sin\theta\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\chi_\mu(\theta)+O(1)\widetilde{\chi}_\mu(\theta) \quad (19)$$

— выражение в правой части (11); индекс j у соответствующих параметров опущен. Далее заметим, что $0<h(\overline{\varphi})=H(\overline{x})<C$ при $\overline{x}\in G_n^\delta$, выберем $\lambda\geq\mu\geq 1$ (так что $1/\lambda\leq 1/\mu<\varepsilon/2$) и каждый интеграл по $[0,\pi]$ представим в виде суммы $\int\limits_0^\pi=\int\limits_0^\varphi+\int\limits_\varphi^\pi=\int\limits_0^{1/\lambda}+\int\limits_{1/\lambda}^{\varepsilon/2}+\int\limits_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}+\int\limits_{\varphi-1/\lambda}^{\varphi}+\int\limits_\varphi^\pi$, при этом можно ограничиться рассмотрением $\int\limits_0^\varphi$, т. к. интеграл $\int\limits_\varphi^\pi$ ему аналогичен. Пусть l, q, r — натуральные числа $(l-1\leq n,\ q-l\leq n)$ и $T_l=[0,1/\lambda]^{l-1}$, $Y_{l,q}=[1/\lambda,\varepsilon/2]^{q-l}$ — прямоугольники, в которых содержатся точки $(\theta_1\ldots\theta_{l-1})$ и $(\theta_l\ldots\theta_{q-1})$ соответственно,

$$V_{q,r}=[\varepsilon/2,\varphi_q-1/\lambda]\times\cdots\times[\varepsilon/2,\varphi_{r-1}-1/\lambda],\quad W_{r,n}=[\varphi_r-1/\lambda,\varphi_r]\times\cdots\times[\varphi_n-1/\lambda,\varphi_n]$$

— соответствующие разбиению интеграла $\int\limits_0^\varphi$ прямоугольники; возможны случаи, когда они пусты; например, T_l или $Y_{l,q}$ пусты при $l=1$ или $1\leq q\leq l$ соответственно и т. п. для $V_{q,r}$, $W_{r,n}$.

Достаточно вместо (17) рассмотреть кратный интеграл

$$I_m(f,\overline{x})=\int_{T_l}d\theta_1\ldots d\theta_{l-1}\int_{Y_{l,q}}d\theta_l\ldots d\theta_{q-1}\int_{V_{q,r}}d\theta_q\ldots d\theta_{r-1}\int_{W_{r,n}}\left|\frac{f^{\vee}(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\Delta^*_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})d\theta_r\ldots d\theta_n, \quad (20)$$

где $\Delta^*_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})$ — любая мажоранта для $|\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})|$. Может случиться, что один или несколько типов прямоугольников T, Y, V, W не содержатся в прямом произведении $T\times Y\times V\times W$, образующем область интегрирования в (20). При этом особо выделим случаи, когда $r=n+1$,

$$I'_{\overline{m}}(f,\overline{x})=\int_{T_l}d\theta_1\ldots d\theta_{l-1}\int_{Y_{l,q}}d\theta_l\ldots d\theta_{q-1}\int_{V_{q,n+1}}\left|\frac{f^{\vee}(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\Delta^*_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})d\theta_q\ldots d\theta_n \quad (21)$$

и кроме того, $l=1$

$$I''_{\overline{m}}(f,\overline{x}) = \int_{Y_{1,q}} d\theta_1 \dots d\theta_{q-1} \int_{V_{q,n+1}} \left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right| \Delta^*_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta}) d\theta_q \dots d\theta_n. \tag{22}$$

Итак, для доказательства теоремы 1 достаточно оценить сверху интегралы: (20) — при $r \le n$; (21) — при $l \ge 2$; (22).

5°. *Оценка* $|\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})|$. а) Установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Для всех* $\overline{\varphi} \in Q_n^\varepsilon$ *и* $\varkappa \in \{1,\dots,n\}$ *имеет место оценка*

$$|\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})| \le C\Big(\prod_{j=1}^{\varkappa} \frac{1}{|\varphi_j-\theta_j|}\Big)\mu^{n-\varkappa}, \quad \theta_{\varkappa+1},\dots,\theta_n \in [\varepsilon/2, \pi-\varepsilon/2]; \tag{23}$$

при $\varkappa = 0$ *правая часть* (23) *есть* $C\mu^n$.

Доказательство. Из определения (6) для всех $\varphi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, $\theta \in [0,\pi]$ получаем

$$|d_m(\varphi,\theta)| \le C_\mu, \tag{24}$$

$$|d_m(\varphi,\theta)| \le C/|\varphi-\theta|. \tag{25}$$

Далее, выражение (19) при $\theta \in \operatorname{supp}\chi_\mu(\theta)$ (так что $\mu\sin\theta \ge C$) тогда также обладает оценкой типа (25); кроме того, из представления ([3], с. 262, (9.3.5)) вытекает

$$|\partial_m(\varphi,\theta)| \le |d_m(\varphi,\theta)| + C, \quad \varepsilon/2 \le \theta \le \pi - \varepsilon/2,$$

т. е. при указанных θ $|\partial_m(\varphi,\theta)|$ обладает и оценкой типа (24). Утверждение (23) вытекает теперь из приведенных одномерных оценок и определения (18). □

б) Поскольку (см. (18))

$$|\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})| \le \left|\prod_{j=1}^n \partial_{m_j}(\varphi_j,\theta_j) - \prod_{j=1}^n d_{m_j}(\varphi_j,\theta_j)\right|, \quad \overline{\theta} \in [1/\mu, \pi-1/\mu]^n,$$

то $|\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})|$ мажорируется конечным числом слагаемых, каждое из которых есть произведение n множителей, причем количество множителей вида $d_{m_j}(\varphi_j,\theta_j)$ не более $n-1$. Таким образом, произвольное мажорантное для $|\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})|$ слагаемое имеет вид

$$\Delta^*_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta}) = O(1)\Big(\prod_j |d_{m_j}(\varphi_j,\theta_j)|\Big)\Big(\prod_i \frac{\chi_\mu(\theta_i)}{\mu\sin\theta_i|\varphi_i-\theta_i|}\Big)\Big(\prod_l \widetilde{\chi}_\mu(\theta_l)\Big). \tag{26}$$

Среди этих произведений могут быть "пустые" (равные единице).

6°. *Оценки одномерных интегралов.* Согласно представлению (26) под знаком каждого "одномерного" интеграла может оказаться любой из множителей трех типов. Меняя надлежащим образом порядок интегрирования, сведем (см. п. 7°) рассмотрение (20) к последовательным оценкам одномерных интегралов

$$J_1 = \int_{\varphi-1/\lambda}^{\varphi} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| d\theta; \quad J_2 = \int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| |d_m(\varphi,\theta)| d\theta; \quad J_3 = \int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| \frac{\chi_\mu(\theta)d\theta}{\mu\sin\theta|\theta-\varphi|};$$

$$J_4 = \int_{1/\lambda}^{\varepsilon/2} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| |d_m(\varphi,\theta)| d\theta; \quad J_5 = \int_{1/\lambda}^{\varepsilon/2} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| \frac{\chi_\mu(\theta)d\theta}{\mu\sin\theta|\theta-\varphi|}; \quad J_6 = \int_0^{1/\lambda} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| d\theta; \quad J_7 = \int_0^{1/\mu} \left|\frac{f^\vee}{h}\right| d\theta;$$

индекс j у параметров θ, φ, m временно опускаем.

Натуральные числа $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ выберем из условия

$$\frac{2^{\mathcal{P}-1}}{\lambda} < \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{2^{\mathcal{P}}}{\lambda}, \quad \frac{2^{\mathcal{L}-1}}{\lambda} < \pi \le \frac{2^{\mathcal{L}}}{\lambda}, \quad \frac{2^{\mathcal{R}-1}}{\mu} < \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{2^{\mathcal{R}}}{\mu}, \quad \frac{2^{\mathcal{T}-1}}{\lambda} < \frac{1}{\mu} \le \frac{2^{\mathcal{T}}}{\lambda}.$$

Очевидно,

$$J_1 \le \frac{C}{\lambda}\left(2^{-\gamma\cdot 0}\frac{\lambda}{2^0}\int_{\varphi-2^0/\lambda}^{\varphi+2^0/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right). \tag{27}$$

Далее, в силу неравенства (25)

$$J_2 \le C\sum_{\tau=1}^{\mathcal{P}}\int_{\varphi-2^\tau/\lambda}^{\varphi-2^{\tau-1}/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|\frac{d\theta}{|\theta-\varphi|} \le C\sum_{\tau=1}^{\mathcal{P}}2^{\gamma\tau}\left(2^{-\gamma\tau}\frac{\lambda}{2^\tau}\int_{\varphi-2^\tau/\lambda}^{\varphi+2^\tau/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right), \tag{28}$$

аналогично

$$J_3 \le \frac{C}{\mu}\sum_{\tau=1}^{\mathcal{P}}2^{\gamma\tau}\left(2^{-\gamma\tau}\frac{\lambda}{2^\tau}\int_{\varphi-2^\tau/\lambda}^{\varphi+2^\tau/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right). \tag{29}$$

Поскольку $|d_m(\varphi,\theta)| \le C$ при $0 \le \theta \le \varepsilon/2$ (см. (25)), то

$$J_4 \le C\int_0^\pi\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta. \tag{30}$$

При оценке J_5 следует интегрировать по $\theta \in [1/\mu, \varphi - 1/\lambda]$, где $\mu\sin\theta \ge C$, следовательно,

$$J_5 \le C\int_0^\pi\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta; \quad \int_0^\pi\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta = \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta \le C\cdot 2^{\gamma\mathcal{L}}\left(2^{-\gamma\mathcal{L}}\frac{\lambda}{2^{\mathcal{L}}}\int_{\varphi-2^{\mathcal{L}}/\lambda}^{\varphi+2^{\mathcal{L}}/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right). \tag{31}$$

В последнем соотношении использована 2π-периодичность $|f^\vee/h|$ по каждому θ_j. Кроме того,

$$J_5 \le \frac{C}{\mu}\sum_{i=1}^{\mathcal{R}}\int_{2^{i-1}/\mu}^{2^i/\mu}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|\frac{d\theta}{\theta} \le \frac{C}{\mu}\sum_{i=1}^{\mathcal{R}}2^{\gamma(i+\mathcal{T})}\left[2^{-\gamma(i+\mathcal{T})}\frac{\lambda}{2^{i+\mathcal{T}}}\int_0^{(2^{i+\mathcal{T}})/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right]. \tag{32}$$

Наконец,

$$J_6 \le \frac{C}{\lambda}\left(2^{-\gamma\cdot 0}\frac{\lambda}{2^0}\int_{0-2^0/\lambda}^{0+2^0/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right), \tag{33}$$

$$J_7 \le C\frac{2^{\gamma\mathcal{T}}}{\mu}\left(2^{-\gamma\mathcal{T}}\frac{\lambda}{2^{\mathcal{T}}}\int_0^{2^{\mathcal{T}}/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right) \le C\frac{\lambda^\gamma}{\mu^{1+\gamma}}\left(2^{-\gamma\mathcal{T}}\frac{\lambda}{2^{\mathcal{T}}}\int_0^{2^{\mathcal{T}}/\lambda}\left|\frac{f^\vee}{h}\right|d\theta\right). \tag{34}$$

7°. *Оценки мажорантных интегралов в терминах $\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$.*

Лемма 3. *При всех $\lambda \ge \mu > 2/\varepsilon$, $\gamma \in (0,1)$ имеют место оценки*

а) $I_{\overline{m}}(f,\overline{x}) \le C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}f^*_\gamma(\overline{x})$, (35)

б) $I'_{\overline{m}}(f,\overline{x}) \le C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$, (36)

в) $I''_{\overline{m}}(f,\overline{x}) \le C\mu^{-1}\lambda^{\gamma n}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$. (37)

Доказательство. а) Оценка (20) основана на "малости" меры $W_{r,n}$, $r \le n$. Используем неравенство (23) с $\varkappa = q-1$ (при рассмотрении T_l или $Y_{l,q}$ имеем $|\theta_j - \varphi_j| > \varepsilon/2$ для $j \le q-1$). Последовательно применяем (27) для одномерных интегралов в блоке $\int\limits_{W_{r,n}}$. В блоках же $\int\limits_{V_{q,r}}$, $\int\limits_{Y_{l,q}}$, $\int\limits_{T_l}$ каждый одномерный интеграл увеличим до $\int\limits_0^\pi$ и далее используем (31). Осталось перейти в правой части установленной оценки (суперпозиции выражений вида (27), (31)) к соответствующим супремумам для получения $f^*_\gamma(\overline{x})$; в результате имеем для $\lambda \ge \mu \ge 1$, $q \ge 1$

$$I_{\overline{m}}(f,\overline{x}) \le C\mu^{n-q+1}\frac{1}{\lambda^{n-r+1}}(2^{\gamma\mathcal{L}})^{r-1}f^*_\gamma(\overline{x}) \le C\mu^{n-q+1}\frac{1}{\lambda^{n-r}}\lambda^{-1}\lambda^{\gamma(r-1)}f^*_\gamma(\overline{x}) \le$$
$$\le C\mu^n\frac{1}{\mu^{q-1}\mu^{n-r}\lambda^\gamma}\lambda^{\gamma r-1}f^*_\gamma(\overline{x}) \le C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}f^*_\gamma(\overline{x}).$$

б) При отсутствии блока $\int\limits_{W_{r,n}}$ оценка для (21) основана на "малости" меры T_l, $l \geq 2$. Используем неравенство (23) с $\varkappa = q-1$ (по-прежнему $|\theta_j - \varphi_j| > \varepsilon/2$, $j = 1, \dots, q-1$), соотношение (33) для одномерных интегралов в блоке $\int\limits_{T_l}$, тогда как остальные одномерные интегралы увеличим до $\int\limits_0^\pi$ и применим к каждому последовательно соотношение (31). Получаемая суперпозиция правых частей (33), (31) не будет превосходить $\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$ с соответствующим коэффициентом. Следовательно, при $l \geq 2$

$$I'_{\overline{m}}(f,\overline{x}) \leq C\mu^n \frac{1}{\lambda^{l-1}}(2^{\gamma\mathcal{L}})^{n-l+1}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x}) \leq C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}\lambda^{-(l-2+\gamma(l-1))}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x}) \leq C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x}).$$

в) Блок (22) при $l=1$ содержит хотя бы один из интегралов J_3, J_5, J_7 (см. (26), в котором количество членов d_{m_j} не более $n-1$ при всех $\theta_j \geq 1/\mu$, иначе $\omega_j \in \operatorname{supp}\widetilde{\chi}_\mu$ для некоторых j); при этом интегралы типа J_7 порождены множителями $\widetilde{\chi}_\mu(\theta_l)$.

Если в (22) содержится J_3 (напр., это интеграл по $d\theta_q$), то $I''_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ не превосходит (см. (25))

$$C\int_{1/\lambda}^{\varepsilon/2}\frac{d\theta_1}{|\theta_1-\varphi_1|}\cdots\int_{1/\lambda}^{\varepsilon/2}\frac{d\theta_{q-1}}{|\theta_{q-1}-\varphi_{q-1}|}\int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}\frac{d\theta_q}{\mu\sin\theta_q|\theta_q-\varphi_q|}\cdots\int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\frac{d\theta_n}{|\theta_n-\varphi_n|}.$$

Заменим при всех $j = 1, \dots, q-1$ значения $|\theta_j - \varphi_j|$ на меньшее (или равное) $\varepsilon/2$, а отрезки интегрирования по соответствующим $d\theta_j$ увеличим до $[0,\pi]$. Затем последовательное применение оценок типа (28), (29), (31) приводит к мажоранте вида

$$\frac{C}{\mu}f^*_\gamma(\overline{x})\left(\sum_{\tau=1}^{\mathcal{P}}2^{\gamma\tau}\right)^{n-q+1}(2^{\gamma\mathcal{L}})^{q-1}.$$

Наличие J_5 (например, по $d\theta_1$) в составе $I''_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ означает для последнего оценку (сверху) через

$$C\int_{1/\lambda}^{\varepsilon/2}\frac{\chi_\mu(\theta_1)d\theta_1}{\mu\sin\theta_1|\theta_1-\varphi_1|}\cdots\int_{1/\lambda}^{\varepsilon/2}\frac{d\theta_{q-1}}{|\theta_{q-1}-\varphi_{q-1}|}\int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}\frac{d\theta_q}{|\theta_q-\varphi_q|}\cdots\int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\frac{d\theta_n}{|\theta_n-\varphi_n|}.$$

Рассуждая, как и выше, будем иметь суперпозицию (28), (31), (32) и затем мажоранту вида

$$\frac{C}{\mu}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})\left(\sum_{\tau=1}^{\mathcal{P}}2^{\gamma\tau}\right)^{n-q+1}(2^{\gamma\mathcal{L}})^{q-2}\sum_{i=1}^{\mathcal{P}}2^{\gamma(i+\mathcal{T})}.$$

Если в составе $I''_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ присутствует J_7, например, по $d\theta_{q-1}$, то получим оценку сверху через

$$C\int_0^\pi d\theta_1\cdots\int_{1/\lambda}^{1/\mu}d\theta_{q-1}\int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}\frac{d\theta_q}{|\theta_q-\varphi_q|}\cdots\int_{\varepsilon/2}^{\varphi-1/\lambda}\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\frac{d\theta_n}{|\theta_n-\varphi_n|};$$

последовательное использование соотношений (28), (34), (31) приводит к мажоранте

$$C\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})\left(\sum_{\tau=1}^{\mathcal{P}}2^{\gamma\tau}\right)^{n-q+1}(2^{\gamma\mathcal{L}})^{q-2}\frac{\lambda^\gamma}{\mu^{1+\gamma}}.$$

Во всех трех случаях можно считать $2 \leq q \leq n$ (иначе выкладки упрощаются). Тогда $I''_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ не превосходит суммы трех указанных мажорант. Принимая во внимание определения $\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$ (так что $f^*_\gamma(x) \leq \mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$) и чисел $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$, имеем

$$I''_{\overline{m}}(f,\overline{x}) \leq C\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})\left\{\frac{1}{\mu}(\lambda^\gamma)^{n-q+1}(\lambda^\gamma)^{q-1} + \frac{1}{\mu}(\lambda^\gamma)^{n-q+1}(\lambda^\gamma)^{q-2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\gamma\mu^\gamma + (\lambda^\gamma)^{n-q+1}(\lambda^\gamma)^{q-2}\frac{\lambda^\gamma}{\mu^{1+\gamma}}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\mu}\mathcal{F}^*_\gamma(x)\left\{\lambda^{\gamma n} + \frac{\lambda^{\gamma n}}{\mu^\gamma}\right\} \leq \frac{C}{\mu}\lambda^{\gamma n}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x});$$

полученная оценка (37) тем более сохраняется, если интегралы присутствуют в количестве, большем одного (степень знаменателя μ увеличивается). $\square$

Завершим доказательство первой из оценок (10). Соединяя оценки (35)–(37), получаем, что мажорантный для уклонения (левая часть (10)) интеграл (см. (17)) не больше

$$C\{\mu^n\lambda^{\gamma n-1}+\lambda^{\gamma n}\mu^{-1}\}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x}), \tag{38}$$

а при выборе $\lambda=\mu^{n+1}$ выражение (38) не превосходит $\mu^{\gamma n(n+1)-1}\mathcal{F}^*_\gamma(\overline{x})$.

8°. *Оценки мажорантных интегралов в терминах* $\Phi^*_\gamma(\overline{x})$. Поскольку $f^*_\gamma(\overline{x})\le C\Phi^*_\gamma(\overline{x})$, то из неравенства (35) вытекает соотношение

$$I_{\overline{m}}(f,\overline{x})\le C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}\Phi^*_\gamma(\overline{x}). \tag{39}$$

Теперь рассмотрим интегралы (21) и (22). В случае $I'_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ снова воспользуемся оценкой (23) с $\varkappa=q-1$, заметив, что

$$1\le\frac{\theta_1}{\sin\theta_1}\le\frac{1}{\lambda\sin\theta_1}\le\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\sin^{-1}\theta_j.$$

Интегралы по остальным переменным увеличим до $\int\limits_0^\pi$ и с помощью (31) получим

$$I'_{\overline{m}}(f,\overline{x})\le C\frac{\mu^n}{\lambda}(2^{\gamma\mathcal{L}})^n\Phi^*_\gamma(\overline{x})\le C\mu^n\lambda^{\gamma n-1}\Phi^*_\gamma(\overline{x}). \tag{40}$$

В случае $I''_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ имеем те же три кратных интеграла, что и в п. 7°, в). Первый из них, как и выше, не превосходит $C\lambda^{\gamma n}\mu^{-1}\Phi^*_\gamma(\overline{x})$. Во втором кратном интеграле

$$(\sin\theta_j)^{-1}\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\le\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\sum_{j=1}^{n}\sin^{-1}\theta_j.$$

Применим (31) к первым $q-1$ одномерным интегралам, а соотношение (28) — к остальным. Подобно п. 7°, в) получим мажоранту в виде $C\lambda^{\gamma n}\mu^{-1}\Phi^*(\overline{x})$. Наконец, третий кратный интеграл содержит $\theta_{q-1}\in[1/\lambda,1/\mu]$, при этом

$$\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|=(\sin\theta_{q-1})\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|(\sin\theta_{q-1})^{-1}\le\frac{1}{\mu}\left|\frac{f(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|\sum_{j=1}^{n}\sin^{-1}\theta_j;$$

после такой оценки увеличим отрезок интегрирования до $[0,\pi]$. Теперь суперпозиция соотношений типа (28) и (31) (случаи θ_j, $j=q,\dots,n$ и θ_i, $i=1,\dots,q-1$, соответственно) приводят к мажоранте вида $\lambda^{\gamma n}\mu^{-1}\Phi^*_\gamma(\overline{x})$. Окончательно получим в качестве аналога (37)

$$I''_{\overline{m}}(f,\overline{x})\le C\frac{\lambda^{\gamma n}}{\mu}\Phi^*_\gamma(\overline{x}). \tag{41}$$

Оценки (39)–(41) с $\lambda=\mu^{n+1}$ позволяют утверждать, что уклонение (левая часть (10)) не превосходит $\mu^{\gamma n(n+1)-1}\Phi^*_\gamma(\overline{x})$. Этот факт вместе с результатом п. 7° и доказывает теорему 1 при $\mu>2/\varepsilon$.

Рассмотрим теперь случай $1\le\max\limits_{j=1,\dots,n}m_j=\mu\le2/\varepsilon$. Из определений (3), (4) и весовых оценок (12), очевидно, имеем

$$|S_{\overline{m}}(f,\overline{x})|\le C\mu^n\int_{Q_n}\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right|d\overline{\theta}.$$

Кроме того, в силу соотношений (7) и (6) при $\overline{x}\in G^\delta_n$ получаем то же неравенство и для $H(\overline{x})|U_{\overline{m}}(f,\overline{x})|$. Согласно (31) с $\lambda=\mu^{n+1}$ имеем

$$|S_{\overline{m}}(f,\overline{x})-H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})|\le Cf^*_\gamma(\overline{x}).$$

Отсюда при $1 \le \mu \le \varepsilon/2$ вытекает, очевидно, как первое, так и второе из соотношений (10).

9°. Следствие 1. Имеет место оценка

$$\operatorname{mes}\{\overline{x} \in G_n^\delta : \sup_{\overline{m}} \mu^a |S_{\overline{m}}(f,\overline{x}) - H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})| > \xi > 0\} \le$$
$$\le \frac{C}{\xi}\int_{G_n} |f(\overline{x})|\vartheta(\overline{x})\Big(\sum_{j=1}^n (1-x_j^2)^{-1/2}\Big)d\overline{x} \quad (42)$$

($a \in (0,1)$ произвольно, супремум берется по $\overline{m} = \{m_1 \dots m_n\}$ с компонентами m_j, удовлетворяющими условию (8)). В частности, почти всюду в G_n^δ

$$|S_{\overline{m}}(f,\overline{x}) - H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})| = o(1) \qquad (43)$$

при $\min_j m_j \to \infty$, если функция $f(\overline{x})$ суммируема на G_n с весом

$$\vartheta(\overline{x})\sum_{j=1}^n (1-x_j^2)^{-1/2}.$$

Утверждение (42) вытекает из (10), записанного в виде

$$\sup_{\overline{m}} \mu^{1-\gamma n(n+1)}|S_{\overline{m}}(f,\overline{x}) - H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})| \le C\Phi_\gamma^*(\overline{x})$$

и соответствующего неравенства “слабого типа” для $\Phi_\gamma^*(\overline{x})$ ([3], с. 468); при этом $a = 1-\gamma n(n+1)$ сколь угодно близко к единице, когда $\gamma > 0$ выбрано достаточно малым. Соотношение же (43) стандартным образом ([2], с. 470) вытекает из (42).

10°. Следствие 2. Если выполнены условия (8), то при $\min_j m_j \to \infty$ имеют место следующие утверждения:

1) $$\int_{Q_n} |\Delta_{\overline{m}}(\overline{\varphi},\overline{\theta})|\frac{d\overline{\theta}}{h(\overline{\theta})} \le C\frac{(\ln\mu)^n}{\mu}, \quad \overline{\varphi} \in Q_n^\varepsilon; \qquad (44)$$

2) $S_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ и $H(\overline{x})U_{\overline{m}}(f,\overline{x})$ как последовательности операторов из $\mathbb{C}(G_n)$ в $\mathbb{C}(G_n^\delta)$ равносходятся (здесь $\mathbb{C}$ — пространство непрерывных на соответствующем кубе функций).

Доказательство. Установим, что левая часть (44) не больше

$$C(\ln\lambda)^n\{\lambda^{-1}\mu^n + \mu^{-1}\}. \qquad (45)$$

Действительно, мажорантный интеграл (17) с $f \equiv 1$, $(h(\overline{\theta}))^{-1} \le 1$ оценивается с помощью (27)–(34), где вычисления производятся непосредственно и выбирается $\gamma = 0$. Возникавшие в (28) и (29) суммы теперь не более $C\ln\lambda$, а в (32) не более $C\ln\mu \le C\ln\lambda$. Тогда в неравенствах (35)–(37) множитель $\lambda^{\gamma n}$ заменяется на $(\ln\lambda)^n$, и эти оценки трансформируются в (45). Остается выбрать $\lambda = \mu^{n+1}$.

Утверждение п. 2 вытекает из (17) и (44), поскольку

$$\left|\frac{f^\vee(\overline{\theta})}{h(\overline{\theta})}\right| \le (\max_{\overline{\theta}\in Q_n}|f(\cos\theta_1 \dots \cos\theta_n)|)\frac{1}{h(\overline{\theta})} \quad \text{и} \quad h(\overline{\varphi}) \le C \quad (\overline{\varphi} \in Q_n^\varepsilon).$$

11°. $n = 2$: *классическая равносходимость не имеет места.* Пусть $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{C}(G_n^\delta)}$ — норма в $\mathbb{C}(G_n^\delta)$,

$$\mathcal{D}_M(\theta) = \frac{\sin(M+1/2)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad B_M(\varphi,\theta) = \frac{1}{\pi}(\mathcal{D}_M(\theta-\varphi) + \mathcal{D}_M(\theta+\varphi)),$$
$$\check{S}_{MM}(f,x_1,x_2) = \int_0^\pi d\theta\int_0^\pi \frac{f(\cos\theta,\cos\tau)}{h(\theta,\tau)}B_M(\varphi,\theta)B_M(\psi,\tau)d\tau$$

($\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, $\beta = \beta_1 = \beta_2$, $x_1 = \cos\varphi$, $x_2 = \cos\psi$). Если M целое ($\mathcal{D}_M(\theta)$ — ядро Дирихле тригонометрической системы), то $\check{S}_{MM}(f, x_1, x_2)$ — частные суммы двойного тригонометрического (по косинусам) ряда Фурье функции $f(\cos\theta, \cos\tau)/h(\theta, \tau)$, или, что то же самое, ряда Фурье по кратной ортонормированной системе многочленов Чебышева первого рода ([1], с. 76). Для $m = m_1 = m_2$, $M = m + (\alpha + \beta + 1)/2$ имеет место (ср. следствие 2)

Теорема 2. *Существуют $\delta \in (0, 1)$, $f \in \mathbb{C}(G_n^\delta)$ и постоянная $C > 0$ такие, что*

$$\|S_{mm}(f, x_1, x_2) - H(x_1, x_2)\check{S}_{MM}(f, x_1, x_2)\|_{\mathbb{C}(G_2^\delta)} \geq C \ln m \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

($\alpha > -1/2$, $\beta \geq -1/2$; $\alpha + 1/2$ *не является четным целым числом*).

Доказательство. 1) Установим сначала при $m \to \infty$ соотношение

$$\|U_{mm}(f, x_1, x_2) - \check{S}_{MM}(f, x_1, x_2)\|_{\mathbb{C}(G_2^\delta)} \geq C \ln m. \tag{46}$$

Поскольку норма интегрального оператора $U_{mm}(f) - \check{S}_{MM}(f)$ (из $\mathbb{C}(G_2)$ в $\mathbb{C}(G_2^\delta)$) есть

$$W_m = \max_{\varphi,\psi \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi |d_m(\varphi, \theta)d_m(\psi, \tau) - B_M(\varphi, \theta)B_M(\psi, \tau)|(h(\theta, \tau))^{-1} d\tau,$$

оценим снизу W_m. Фиксируем достаточно малое ε ($0 < \varepsilon < \pi/6$), точку $(\varphi, \psi) \in (3\varepsilon, \pi - 3\varepsilon)^2$ и положим

$$b_m(\varphi, \theta) = d_m(\varphi, \theta) - B_M(\varphi, \theta) = \sin\sigma \frac{\cos[(M + 1/2)(\varphi + \theta) + \sigma]}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}. \tag{47}$$

При указанных φ и ψ имеем тогда

$$W_m \geq C \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} |b_m(\varphi, \theta)B_M(\psi, \tau) + b_m(\psi, \tau)B_M(\varphi, \theta) + b_m(\varphi, \theta)b_m(\psi, \tau)| d\tau \geq$$
$$\geq C \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int_\psi^{\pi-\varepsilon} |b_m(\varphi, \theta)B_M(\psi, \tau)| d\tau + O(1),$$

поскольку $\frac{\theta\pm\varphi}{2}$ и $\frac{\psi+\tau}{2}$ отграничены от 0 и π; здесь $C > 0$ — нижняя граница на $[\varepsilon, \pi]^2$ для $(h(\theta, \tau))^{-1}$. Согласно соотношению (47) с $\varphi + \theta = \zeta$ получаем

$$W_m \geq c|\sin\sigma| \biggl(\int_{2\varphi+\varepsilon}^{\pi+\varphi-\varepsilon} |\cos[(M + \tfrac{1}{2})\zeta + \sigma]| d\zeta \biggr) \biggl(\int_\psi^{\pi-\varepsilon} |\mathcal{D}_M(\psi - \tau)| d\tau \biggr) + O(1). \tag{48}$$

Рост (при $m \to \infty$) выражения во второй скобке не меньший, чем $C \ln m$ ([2], с. 115), постоянная $C > 0$ зависит лишь от ε. Интеграл в первой скобке в (48) обозначим через $J_{m,\varphi,\varepsilon}$, положим $Z = (M+1/2)\zeta$ (новый промежуток интегрирования имеет длину не менее $(M+1/2)\varepsilon$) и выберем натуральные наибольшее ν_2 и наименьшее ν_1 такие, что

$$(M + \tfrac{1}{2})(2\varphi + \varepsilon) \leq \nu_1\pi < \nu_2\pi \leq (M + \tfrac{1}{2})(\pi + \varphi - \varepsilon);$$

очевидно, отношение $\frac{\nu_2-\nu_1}{M+1}$ заключено между двумя (зависящими от ε) положительными постоянными. Теперь (т. к. $|\cos(Z + \sigma)|$ имеет период π)

$$J_{m,\varphi,\varepsilon} \geq \frac{1}{M+1} \int_{\nu_1\pi}^{\nu_2\pi} |\cos(Z + \sigma)| dZ = \frac{1}{M+1} \int_0^{(\nu_2-\nu_1)\pi} |\cos(Z + \sigma)| dZ =$$
$$= \frac{1}{M+1} \sum_{l=0}^{\nu_2-\nu_1-1} \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} |\cos(Z + \sigma)| dZ = \frac{1}{M+1} \sum_{l=0}^{\nu_2-\nu_1-1} \int_0^\pi |\cos(Z + \sigma)| dZ = 2\frac{\nu_2 - \nu_1}{M+1}.$$

Поэтому согласно оценке (48), в которой $\sin\sigma \neq 0$ ($\alpha + 1/2$ не является четным; $m \to \infty$), получаем $W_m \geq C \ln m$, а значит, соотношение (46) доказано.

2) Далее,

$$\|U_{mm}(f;x_1,x_2) - \check{S}_{MM}(f;x_1,x_2)\| = \Big\|(S_{mm}(f;x_1,x_2) - H(x_1,x_2)U_{mm}(f;x_1,x_2) +$$

$$+ H(x_1,x_2)\check{S}_{MM}(f;x_1,x_2) - S_{mm}(f;x_1,x_2))\frac{1}{H(x_1,x_2)}\Big\| \le$$

$$\le C\{\|S_{mm}(f;x_1,x_2) - H(x_1,x_2)U_{mm}(f;x_1,x_2)\| + \|S_{mm}(f;x_1,x_2) - H(x_1,x_2)\check{S}_{MM}(f;x_1,x_2)\|\}.$$

Первое слагаемое (см. 10°, следствие 2, 2)) в фигурных скобках есть $o(1)$, а тогда второе слагаемое обязано расти (см. (46)) не медленнее $C\ln m$, чем и завершается доказательство теоремы 2. □

Из утверждения теоремы 2 в случае $\alpha > -1/2$, $\beta \ge -1/2$, $\alpha+\beta+1 = 2k$, где k — любое фиксированное натуральное число (так что $M = m+k$), вытекает оценка

$$\|S_{mm}(f;x_1,x_2) - H(x_1,x_2)\check{S}_{m+k,m+k}(f;x_1,x_2)\|_{\mathbb{C}(G_2^\delta)} \ge C\ln m.$$

В одномерном же случае при $m \to \infty$

$$\|S_m(f;x) - H(x)\check{S}_{m+1}(f;x)\|_{\mathbb{C}(G_1^\delta)} = o(1) \tag{49}$$

(разность равномерно по x мала даже при условии лишь суммируемости f с весом $\rho(x)+\vartheta(x)$). Это установлено в ([4], с. 254) для $\check{S}_m(f,x)$ вместо $\check{S}_{m+1}(f,x)$, но и (49) имеет место, поскольку $\check{S}_{m+1}(f,x) - \check{S}_m(f,x) = a_{m+1}\cos(m+1)\varphi$ (a_{m+1} есть косинус-коэффициент функции f/h), а значит,

$$\|H(x)(\check{S}_m(f,x) - \check{S}_{m+1}(f,x))\|_{\mathbb{C}(G_1^\delta)} = o(1), \quad m \to \infty.$$

Итак, аналог "классической" равномерной равносходимости при $n = 2$ не сохраняется, вообще говоря, даже в случае непрерывных на G_2^δ функций.

12°. *Приложение.* Оценка (10) лежит в основе трансплантации результатов о средних типа Марцинкевича (см., напр., [5]) тригонометрических кратных рядов Фурье на случай разложений Фурье–Якоби. В частности, возможно получение оценок "слабого типа" максимальных операторов, построенных по суммам Валле-Пуссена. Этим вопросам автор надеется посвятить отдельную работу.

Литература

1. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1979. – 415 с.
2. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.
3. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
4. Сеге Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
5. Дьяченко М.И. *О некоторых свойствах кратных рядов и преобразований Фурье* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1989. – Т. 190. – С. 88–101.

Тамбовский государственный технический университет

Поступила 27.01.1997