ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.929

Г.Г. ИСЛАМОВ

О ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. *Постановка проблемы.* Пусть линейный процесс, скорость изменения которого не зависит от предыстории и планируемых нами будущих состояний этого процесса, описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

где $[a, b]$ — компактный интервал числовой прямой, вектор-функции $x, f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $n \times n$-матрица $A(t)$ имеют суммируемые на $[a, b]$ компоненты. Общее абсолютно непрерывное решение $x(t)$ этой системы дается формулой Коши

$$x(t) = X(t)x(a) + \int_a^t C(t, s)\, f(s)\, ds, \tag{2}$$

где $X(t)$ — фундаментальное матричное решение однородной задачи

$$\dot{X}(t) + A(t)X(t) = 0, \quad t \in [a, b], \quad X(a) = E,$$

E — единичная $n \times n$-матрица, $C(t, s) = X(t) \cdot X^{-1}(s)$ — матрица Коши.

Формула (2) определяет все свойства решений системы (1). Для ряда приложений важными оказываются такие свойства, как неотрицательность компонент решения $x(t)$, их монотонность, ограниченность или экспоненциальное убывание на полуоси. Наряду с этим заслуживает изучения и имеет значение для практики следующий способ описания свойств решений дифференциальных уравнений [1], [2]: указываются наблюдаемые на траекториях $x(t)$ системы (1) линейные функционалы $\ell_i(x)$ и пороговые значения β_i, $i = \overline{1, m}$; требуемое свойство решения $x(t)$ задается конечной системой линейных неравенств

$$\ell_i(x) \geq \beta_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

В силу (2) свойство (3) эквивалентно разрешимости относительно $q = x(a)$ системы линейных неравенств

$$b_i q \geq \gamma_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где $b_i = \ell_i(X)$ — n-мерная строка, полученная последовательным применением функционала ℓ_i к каждому столбцу фундаментальной матрицы $X(t), \gamma_i = \beta_i - \ell_i\Big(\int\limits_a^t C(t, s)\, f(s)\, ds\Big)$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть, например,

$$\ell_i(x) = \int_a^b \phi_i(s)\, \dot{x}(s)\, ds + \psi_i\, x(a),$$

где ψ_i — постоянная n-мерная строка, а $\phi_i(s)$ — функциональная n-мерная строка, имеющая измеримые и ограниченные почти всюду на $[a, b]$ компоненты. Покажем, что

$$\ell_i\Big(\int_a^t C(t, s)\, f(s)\, ds\Big) = \int_a^b z_i(s) f(s)\, ds, \tag{5}$$

и

$$b_i = \ell_i(X) = \psi_i - \int_a^b z_i(s)A(s)\,ds, \tag{6}$$

где $z_i(s)$ есть n-мерная функциональная строка, являющаяся единственным решением интегрального уравнения

$$z(s) + \int_s^b z(t)A(t)\,dt = \phi_i(s). \tag{7}$$

Действительно, при почти всех $t \geq a$

$$\frac{d}{dt}\int_a^t C(t,s)f(s)\,ds = \int_a^t \dot{X}(t)\,X^{-1}(s)f(s)\,ds + f(t).$$

Следовательно,

$$\ell_i\Big(\int_a^t C(t,s)\,f(s)\,ds\Big) = \int_a^b u_i(s)f(s)\,ds, \tag{8}$$

где

$$u_i(s) = \phi_i(s) + v_i(s), \quad v_i(s) = \int_s^b \phi_i(t)\dot{X}(t)\,dt\,X^{-1}(s). \tag{9}$$

Далее,

$$b_i = \ell_i(X) = \int_a^b \phi_i(t)\dot{X}(t)\,dt + \psi_i = v_i(a) + \psi_i. \tag{10}$$

Дифференцирование равенства

$$v_i(s)X(s) = \int_s^b \phi_i(t)\dot{X}(t)\,dt,$$

вытекающего из (9), дает $\dot{v}_i(s)X(s) + v_i(s)\dot{X}(s) = -\phi_i(s)\dot{X}(s)$. Учитывая, что $\dot{X}(s) = -A(s)X(s)$ и $\det X(s) \neq 0$, получаем $\dot{v}_i(s) = u_i(s)A(s)$. Интегрирование этого уравнения с начальным условием $v_i(b) = 0$ дает при $s \geq a$

$$v_i(s) = -\int_s^b u_i(t)A(t)\,dt.$$

В силу (9)

$$u_i(s) = \phi_i(s) - \int_s^b u_i(t)A(t)\,dt,$$

т. е. $u_i(s)$ совпадает с единственным решением $z_i(s)$ уравнения (7) и, следовательно, (5) следует из (8). Так как $v_i(a) = -\int_a^b z_i(t)A(t)\,dt$, то из (10) следует (6).

Совместная система (4) определяет выпуклое полиэдральное множество координатного пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому факт существования решения системы (1), удовлетворяющего пороговым ограничениям (3), называем полиэдральной разрешимостью этой системы.

2. *Совместность систем линейных неравенств.* Условия разрешимости системы (4) дает критерий А.Д. Александрова ([3], с. 121): для совместности системы (4) необходимо и достаточно, чтобы для каждого неотрицательного решения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ однородной системы $\sum_{i=1}^m b_i\,\lambda_i = 0$ выполнялось неравенство $\sum_{i=1}^m \gamma_i\,\lambda_i \leq 0$.

Сущность этого критерия раскрывается утверждениями теории двойственности линейного программирования [4] применительно к паре двойственных задач

$$0 \cdot q \to \min, \quad b_i\,q \geq \gamma_i, \ \ i = \overline{1,m}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \lambda_i \to \max, \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Существование допустимого плана в первой задаче влечет разрешимость второй задачи и оценку $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \lambda_i \leq 0$ целевой функции на множестве ее допустимых планов. Если же у первой задачи нет допустимых планов, то целевая функция второй задачи не ограничена сверху.

Обозначим через e строку, состоящую из n единиц, T — символ транспонирования, $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$.

Теорема 1. *Пусть столбцы b_i^T, $i = \overline{1,m}$, образуют матрицу инциденций неориентированного графа G с n вершинами и m ребрами. Расширенная система неравенств*

$$e\,q = 1, \quad q_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad b_i\, q \geq \gamma_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

совместна тогда и только тогда, когда неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Q}} (\gamma_k/2) + \sum_{\ell \in \mathbb{P}} \gamma_\ell \leq 1 \tag{12}$$

имеет место для любых объединений $\mathbb{Q}$ не пересекающихся нечетных циклов графа G и паросочетаний $\mathbb{P}$ в подграфе, порожденном вершинами, не входящими в $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Запишем систему неравенств (11) в виде

$$e\,q \geq 1, \quad (-e)\,q \geq -1, \quad q_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad b_i\, q \geq \gamma_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Согласно критерию А.Д. Александрова следует рассмотреть соответствующую однородную систему уравнений

$$\mu_1\, e - \mu_2\, e + \nu + \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i = 0,$$

где μ_1, μ_2, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — неотрицательные величины. Для каждого решения такой системы должно иметь место неравенство

$$\mu_1 - \mu_2 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \lambda_i \leq 0.$$

Обозначим $\mu = \mu_2 - \mu_1$ и исключим $\nu \geq 0$ из уравнения. Остается проверить, что скалярное неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \lambda_i \leq \mu$ является следствием системы линейных неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \leq \mu \cdot e, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Так как $b_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, то для всякого нетривиального решения этой системы имеем $\mu > 0$. Поэтому, исключив μ, найдем, что для разрешимости системы (11) необходимо и достаточно, чтобы для всякого неотрицательного решения λ_i, $i = \overline{1,m}$, системы линейных неравенств $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \leq e$ выполнялось неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \lambda_i \leq 1$. Последнее неравенство достаточно проверить на вершинах ограниченного выпуклого многогранника, определяемого системой неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \leq e, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{13}$$

В нашем случае, когда b_i^T, $i = \overline{1,m}$, образуют матрицу инциденций неориентированного графа G, структура вершин этого многогранника известна ([5], с. 141) (см. также [6], с. 379). А именно:

пусть $C_1, \dots, C_p$ — не пересекающиеся нечетные циклы графа G и пусть $\mathbb{P}$ — паросочетание в подграфе, порожденном вершинами, не входящими в C_i, $i = \overline{1,p}$. Тогда вектор λ с компонентами

$$\lambda_i = \begin{cases} 1/2, & \text{если ребро } i \in C_1 \cup \dots \cup C_p; \\ 1, & \text{если } i \in \mathbb{P}; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{14}$$

является вершиной многогранника (13), и каждая его вершина имеет вид (14). Напомним, что нечетным называется цикл с нечетным числом ребер, а паросочетание есть такое множество ребер графа, что любая их пара не имеет общей вершины.

Обозначив $\mathbb{Q} = C_1 \cup \dots \cup C_p$ и замечая, что по условию (12) неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \, \lambda_i \le 1$ выполнено в каждой вершине многогранника (13), заключаем, что система неравенств (11) совместна. $\square$

Теорема 2. *Пусть столбцы b_i^T, $i = \overline{1,m}$, образуют усеченную матрицу инциденций* ([7], с. 101) *ориентированного графа G с $n+1$ вершинами и m ребрами. Система неравенств*

$$b_i \, q \ge \gamma_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{15}$$

совместна тогда и только тогда, когда неравенство

$$\sum_{i \in \mathbb{D}} \gamma_i \le 0 \tag{16}$$

имеет место для любого контура $\mathbb{D}$ графа G.

Доказательство. Векторы $p_i = (b_i, -e b_i^T)^T$, $i = \overline{1,m}$, образуют столбцы матрицы инциденций ориентированного графа G. Напомним, что в матрице инциденций ориентированного графа строки соответствуют вершинам графа, а столбцы — дугам, причем -1 в фиксированном столбце отвечает началу соответствующей дуги, а $+1$ — ее концу. По теореме Бержа (см., напр., [8], с. 114) характеристические векторы контуров графа G являются образующими конуса неотрицательных решений системы $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \lambda_i = 0$ и, следовательно, системы $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i \lambda_i = 0$. Теперь остается заметить, что набор $\{\lambda_i\}_1^m$ будет, по определению, характеристическим вектором контура $\mathbb{D}$ графа G в том и только том случае, когда

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } i \in \mathbb{D}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \, \lambda_i \le 0$ для случая характеристического вектора принимает вид (16). Ссылка на теорему А.Д. Александрова завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Важным дополнением к этому утверждению является следующая

Теорема 3. *Полиэдр* (15) *ограничен тогда и только тогда, когда*

а) *каждая вершина графа G принадлежит хотя бы одному контуру этого графа;*

б) *любые два контура имеют общую вершину.*

Доказательство. Ограниченность полиэдра (15) эквивалентна следующему факту (см., напр., [9], с. 31, упр. 2): система неравенств

$$b_i \, z \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{17}$$

имеет только тривиальное решение.

Необходимость. Допустим, что условие а) не выполнено. Обозначим через s вершину, которая не принадлежит ни одному контуру графа G. Положим $z_j = 1$ во всех вершинах j путей, выходящих из s, но не проходящих через вершину $n+1$, и $z_j = -1$ во всех вершинах j путей, приходящих в s и не проходящих через вершину $n+1$. Во всех остальных вершинах k (включая s и $n+1$) положим $z_k = 0$. Полученный набор $z = (z_1, \dots, z_n)$ дает нетривиальное решение системы неравенств (17). Если существует путь, выходящий из вершины s и проходящий через вершину $n+1$, то он не может быть контуром. Полагая $z_s = -1$ и $z_k = 0$ во всех остальных вершинах, получим нетривиальное решение системы (17). Аналогично, если существует путь, приходящий в вершину s и проходящий через вершину $n+1$, то он не может быть контуром. Полагая $z_s = 1$ и $z_k = 0$ во всех остальных вершинах, опять получим нетривиальное решение системы (17). Следовательно, условие а) необходимо.

Условие б) также необходимо. Допустим, что в графе G есть два не пересекающихся контура. Возьмем тот контур, который не содержит вершины $n+1$. Во всех вершинах i этого контура положим $z_i = 1$, а в остальных вершинах j возьмем $z_j = 0$. Получим нетривиальное решение системы неравенств (17).

Достаточность. Пусть условия а) и б) выполнены. Зафиксируем произвольное решение $z = (z_1, \dots, z_n)$ системы (17). Вершине $s = \overline{1,n}$ графа G поставим в соответствие компоненту z_s, а $(n+1)$-ю вершину пометим нулем. Нетрудно заметить, что числа z_i, отвечающие вершинам любого контура, совпадают между собой. Взяв сначала контур, содержащий вершину $n+1$, найдем, что соответствующие z_i равны нулю. Так как любые два контура имеют общую вершину, то, переходя последовательно к смежным контурам, обнаружим, что соответствующие компоненты z_j также обращаются в нуль. Так как каждая вершина графа принадлежит хотя бы одному контуру, то все вершины будут таким образом пройдены. $\square$

3. *Однородный случай.* Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений А.Н. Колмогорова

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}(t)\, x_j(t) - x_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \equiv 1, \quad t \geq a, \tag{18}$$

описывающую марковский случайный процесс с n дискретными состояниями и непрерывным временем, в котором переход из состояния s_i в состояние s_j $(i \neq j)$ происходит под воздействием пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{ij}(t) \geq 0$ $(\lambda_{ii}(t) \equiv 0,\ i = \overline{1,n})$ ([10], с. 12). Здесь $x_i(t)$ — вероятность пребывания случайного процесса в состоянии s_i в момент времени t.

Пусть в фиксированный момент времени t_k случайный процесс в состоянии s_j приносит доход (или убыток в зависимости от знака) c_j^k. Тогда системе неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j(t_k) \geq \beta_k, \quad k = \overline{1,m}, \tag{19}$$

удовлетворяет случайный процесс, средний доход которого в каждый фиксированный момент времени t_k не меньше значения β_k.

Теорема 4. *Пусть для каждого $k = \overline{1,m}$ вектор-строка $y^k(t) = (y_1^k(t), \dots, y_n^k(t))$ обозначает решение сопряженной однородной системы*

$$\dot{y}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t)\, y_j(t) + y_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq a, \tag{20}$$

с начальным условием $y^k(a) = b_k$. Пусть, далее, столбцы $b_k^T, k = \overline{1,m}$, образуют матрицу инциденций неориентированного графа G с n вершинами и m ребрами.

Для того чтобы существовало решение $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ системы (18), удовлетворяющее ограничениям (19) при $c_j^k = y_j^k(t_k)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{k \in \mathbb{Q}} (\beta_k/2) + \sum_{k \in \mathbb{P}} \beta_k \leq 1$$

для любых объединений $\mathbb{Q}$ не пересекающихся нечетных циклов графа G и паросочетаний $\mathbb{P}$ в подграфе, порожденном вершинами, не входящими в $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Система (18) может быть записана в виде (1), где $f(t) \equiv 0$, а матрица $A(t)$ обладает следующими свойствами:

a) $e\,A(t) \equiv 0$, где $e = (1, 1, \ldots, 1)$;

b) $A(t) = A_2(t) - A_1(t)$, причем матрица $A_1(t)$ и диагональная матрица $A_2(t)$ имеют неотрицательные элементы.

Из матричного уравнения $\dot{X}(t) + A_2(t)X(t) = A_1(t)X(t)$, $X(a) = E$, $t \geq a$, находим

$$X(t) = E + \int_a^t \exp\Big\{ - \int_s^t A_2(\tau)\, d\tau \Big\} A_1(s)X(s)\, ds.$$

Отсюда методом последовательных приближений можно построить последовательность матриц с неотрицательными элементами, сходящуюся равномерно к $X(t)$ на любом конечном отрезке $[a, b]$. Поэтому фундаментальная матрица $X(t)$ имеет неотрицательные элементы.

Далее, $e\,\dot{X}(t) = e\,A(t)\,X(t) \equiv 0$. Значит, $e\,X(t) \equiv \mathrm{const}$. Замечая, что $X(a) = E$, найдем, что $e\,X(t) \equiv e$, т.е. $X(t)$ при каждом $t \geq a$ есть стохастическая матрица.

Решение $x(t) = X(t)\,q$ системы (18) будет вероятностным вектором при каждом $t \geq a$, т.е. $e\,x(t) \equiv 1$, $x(t) \geq 0$, тогда и только тогда, когда $e\,q = 1$, $q \geq 0$, т.е. q — вероятностный вектор.

Подстановка $x(t) = X(t)q$, q — вероятностный вектор, в систему неравенств (19) приводит к следующей системе

$$e\,q = 1, \quad q \geq 0, \quad b_k\,q \geq \beta_k, \quad k = \overline{1, m}. \tag{21}$$

Действительно, $y^k(t_k)\,x(t_k) = y^k(t_k)\,X(t_k)\,q = y^k(a)\,q = b_k\,q \geq \beta_k$, $k = \overline{1, m}$. Здесь мы воспользовались представлением $y^k(s) = y^k(t_k)X(t_k)X^{-1}(s)$ решения сопряженной системы (20). Применение к системе (21) теоремы 1 завершает доказательство. □

4. *Неоднородный случай.*

Теорема 5. *Пусть для индексов $k = \overline{1, \nu_l}$; $l = \overline{1, \mu}$ вектор-строка $y_l^k(s)$ обозначает решение начальной задачи*

$$\dot{y}(s) = y(s)A(s), \quad y(a) = b_l^k, \quad s \in [a, t_l].$$

Пусть, далее, столбцы $(b_l^k)^T$, $k = \overline{1, \nu_l}$; $l = \overline{1, \mu}$, образуют усеченную матрицу инциденций некоторого графа G с $n+1$ вершинами и $m = \sum\limits_{l=1}^{\mu} \nu_l$ ребрами.

Для того чтобы существовало решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее системе неравенств

$$y_l^k(t_l)\,x(t_l) \geq \int_a^{t_l} y_l^k(s)\,f(s)\,ds + \gamma_l^k, \quad k = \overline{1, \nu_l}; \quad l = \overline{1, \mu},$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{D}} \gamma_l^k \leq 0 \tag{22}$$

для любого контура $\mathbb{D}$ графа G. Здесь (k, l) обозначает дугу графа G, отвечающую столбцу b_l^k.

Доказательство. Каждой паре (k, l) поставим в соответствие индекс $i = \sum\limits_{j=1}^{l-1} \nu_j + k$ и в системе неравенств (3) выберем

$$\ell_i(x) = y_l^k(t_l)\,x(t_l) \quad \text{и} \quad \beta_i = \int_a^{t_l} y_l^k(s)\,f(s)\,ds + \gamma_l^k.$$

Имеем

$$\gamma_i = \beta_i - \ell_i\left(\int_a^t C(t,s)\, f(s)\, ds\right) = \int_a^{t_l} y_l^k(s)\, f(s)\, ds + \gamma_l^k - \int_a^{t_l} y_l^k(t_l) X(t_l) X^{-1}(s)\, f(s)\, ds = \gamma_l^k.$$

Далее, $b_i = \ell_i(X) = y_l^k(t_l)X(t_l) = y_l^k(a) = b_l^k$. Здесь мы воспользовались представлением $y_l^k(s) = y_l^k(t_l)X(t_l)X^{-1}(s)$. Отождествляя пару (k,l) с i-й дугой ориентированного графа G, получим систему неравенств (15). Так как условие (22) тождественно условию (16), то ссылка на теорему 2 завершает доказательство. □

Литература

1. Исламов Г.Г. *Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами* // Изв. отд. матем. и информатики УдГУ. – Ижевск, 1994. – Вып. 2. – С. 3–24.
2. Максимов В.П., Румянцев А.Н. *Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 56–71.
3. Черников С.Н. *Линейные неравенства.* – М.: Наука, 1968. – 488 с.
4. Ашманов С.А. *Линейное программирование.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
5. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация* (*комбинаторная теория многогранников*). – М.: Наука, 1981. – 341 с.
6. Кристофидес Н. *Теория графов. Алгоритмический подход.* – М.: Мир, 1978. – 432 с.
7. Свами М., Тхуласираман К. *Графы, сети и алгоритмы.* – М.: Мир, 1984. – 455 с.
8. Романовский И.В. *Алгоритмы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1977. – 352 с.
9. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1976. – 191 с.
10. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.* – М.: Наука, 1991. – 384 с.

Удмуртский государственный университет

Поступила 26.11.1996