

УДК 565.13

Дмитриев С.В., доктор технических наук, профессор, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”;

Дмитриева И.С., магистрант, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”;

Сюткина Ю.П., магистрант, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”.

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК НА ОБСЛУЖИВАНИЕ

Аннотация. Рассмотрено взаимодействие потоков заявок и операций обслуживания в системах массового обслуживания. Выявлены закономерности производительности системы обслуживания при изменении относительного быстродействия системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания; интенсивность; поток заявок; поток обслуживания; замедление потоков; производительность системы.

Системы массового обслуживания (СМО) – общее название широко применяемых в различных областях деятельности систем организации движения товаров, информации, технологических машин и других объектов, людей с выполнением по отношению к ним необходимых технологических процедур [1]. Общим их признаком является выполнение определенных действий с каждым объектом, что связано с затратами некоторого времени $\tau_{об}$ – времени обслуживания и наличием потока объектов обслуживания, главной характеристикой которого является интенсивность потока заявок на обслуживание (λ). Во всех системах массового обслуживания стремятся достигнуть такого состояния, когда интенсивность потока заявок на обслуживание и интенсивность потока операций обслуживания ($\mu = 1/\tau_{об}$) позволяют обеспечить заданные характеристики производительности системы при отсутствии очереди на обслуживание и при отсутствии простоя системы в ожидании заявок, что соответствует условию $\mu = \lambda$. При $\lambda > \mu$

образуется очередь на входе в систему обслуживания, при $\lambda < \mu$ система обслуживания бездействует в ожидании поступления заявок на обслуживание.

Отметим, что теоретически предполагается, что система массового обслуживания имеет дело с марковским процессом поступления заявок на обслуживание, т.е. стохастическими потоками заявок без последствия, т.е. независимыми от системы и с неизменной интенсивностью. На практике, конечно, интенсивность потока заявок зависит от СМО и эта зависимость тем более, чем меньше быстродействие системы обслуживания. Для разрешения этого противоречия в производственных системах проектирование технологических процессов строго синхронизируется и организуется регулярный поток изделий на обслуживание системой, имеющей строго установленные характеристики быстродействия.

При необходимости применяют параллельные потоки обслуживания, вводя m независимых систем обслуживания общего потока заявок.

В общем же случае для оценки требуемых характеристик быстродействия проектируемых систем обслуживания необходимо знать не только характеристики ожидаемого потока заявок на обслуживание, но и закономерности взаимодействия системы с обслуживаемым потоком. Очевидно, что наличие любого препятствия, требующего остановки или замедления движения объекта, изменяет интенсивность движения. Так, светофор на дороге останавливает транспортный поток на время запрета движения. Это не очень заметно при малой интенсивности транспортного потока, но на переполненной автомобилями дороге это вызывает остановку большого количества автомобилей и, возможно, будет одной из причин транспортного затора.

Метод динамики средних [2], применяемый для упрощения математического описания стохастических процессов в моделях массового обслуживания не учитывает влияние системы на интенсивность потока заявок на обслуживание, в связи с чем затруднены реальные оценки

характеристик производительности СМО. В связи с этим рассмотрим закономерности и факторы взаимодействия потока заявок на обслуживание λ и системы со средней интенсивностью μ потока обслуживания заявок. Обозначив через $\alpha = \lambda / \mu$ – относительную интенсивность исходного потока заявок по отношению к интенсивности потока обслуживания, рассмотрим эксплуатационные свойства СМО при условии полной безотказности элементов системы.

Интенсивность исходного потока заявок:

$$\lambda_c = \frac{1}{\bar{\tau}_c} \quad (1)$$

где $\bar{\tau}_c$ – среднее время между моментами поступления заявок на обслуживание.

Потенциальная интенсивность потока обслуживания заявок:

$$\mu_{об} = \frac{1}{\bar{\tau}_{об}} \quad (2)$$

где $\bar{\tau}_{об}$ – среднее время обслуживания одной заявки системой обслуживания.

Взаимодействие потока заявок с интенсивностью λ_c и одноканальной системы обслуживания с потенциальной интенсивностью $\mu_{об}$ потока обслуживания заключается в том, что при поступлении каждой заявки на обслуживание через интервал времени $\bar{\tau}_c$ начинается ее обработка в течение времени $\bar{\tau}_{об}$ так что среднее время совместной занятости системы обслуживания потока заявок составит $\bar{\tau}_c + \bar{\tau}_{об}$. Это значит, что в целом СМО работает с интенсивностью $\lambda_{смо} = \frac{1}{\bar{\tau}_c + \bar{\tau}_{об}}$, хотя заявка большую часть времени ($\bar{\tau}_c$) находится “в пути” к системе и при вхождении в систему быстро обслуживается в течение времени ($\bar{\tau}_{об}$). Впрочем, понятия “быстро” и

“медленно” в данном случае относительно и можно представить как процесс работы СМО, когда $\tau_c > \tau_{об}$, так и процесс, в котором $\tau_c < \tau_{об}$. В первом случае неизбежно ожидание обслуживающим устройством заявки, а во втором – образование очереди на обслуживание.

Итак, и интенсивность потока заявок и интенсивность потока обслуживания в СМО замедляются, а интенсивность совместной работы определяется как:

$$\lambda_{смо} = \frac{1}{\bar{\tau}_c + \bar{\tau}_{об}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_c} + \frac{1}{\mu_{об}}} = \frac{\lambda_c \cdot \mu_{об}}{\mu_{об} + \lambda_c}, \quad (3)$$

Возможно ускорение интенсивности $\lambda_{смо}$ различными способами, из которых при заданном уровне технологических возможностей исполнения элементов СМО можно отметить введение многоканальных СМО, когда к одному обслуживаемому устройству подключено m потоков заявок на обслуживание со средней интенсивностью $\bar{\tau}_c$ (общая интенсивность потока заявок становится равной: $\lambda_{смо_m} = m \cdot \lambda_c$, т. е. $\bar{\tau}_{c_m} = \bar{\tau}_c / m$), $\lambda_{об} = 1/\bar{\tau}_{об}$.

$$\lambda_{смо_m} = \frac{1}{\bar{\tau}_{c_m} + \bar{\tau}_{об}} = \frac{1}{\frac{1}{m\lambda_c} + \frac{1}{\mu_{об}}} = \frac{\lambda_{c_m} \cdot \mu_{об}}{\mu_{об} + \lambda_{c_m}} = \frac{m\lambda_c \cdot \mu_{об}}{\mu_{об} + m\lambda_c}, \quad (4)$$

Возможно также подключение нескольких (n) устройств к обслуживанию одного потока заявок на обслуживание. В этом случае уменьшается время обслуживания и увеличивается интенсивность потока обслуживания: $\bar{\tau}_{об_n} = \bar{\tau}_{об} / n$; $\lambda_{c_n} = \lambda_c$; $\mu_{об_n} = n\mu_{об}$.

$$\lambda_{смо_n} = \frac{1}{\bar{\tau}_c + \bar{\tau}_{об_n} / n} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_c} + \frac{1}{n\mu_{об}}} = \frac{\lambda_c \cdot \mu_{об_n}}{\mu_{об_n} + \lambda_c}, \quad (5)$$

В общем случае в СМО с m входными и n выходными каналами:

$$\bar{\tau}_{c_{mn}} = \bar{\tau}_c / m; \lambda_{c_{mn}} = m\lambda_c; \tau_{об_{mn}} = \tau_{об} / n; \mu_{об_{mn}} = n\mu_{об} \text{ и}$$

$$\lambda_{\text{СМО}_{mn}} = \frac{1}{\bar{\tau}_c / m + \bar{\tau}_{об} / n} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_c m} + \frac{1}{\mu_{об} n}} = \frac{\lambda_c \cdot \mu_{об} \cdot m \cdot n}{\mu_{об} \cdot n + \lambda_c \cdot m} \quad (6)$$

Найденные нами оценки изменения интенсивности потоков заявок и их обслуживания в системе позволяют правильно спроектировать СМО, исходя из характеристик быстродействия основных элементов – потока заявок и устройств обслуживания, т.е. определить реальное быстродействие СМО при неизменных характеристиках стохастического потока. При этом нами рассматривались условия “равновесия” интенсивностей потока заявок и их обслуживания при работе без образования очередей на обслуживание.

В реальности фактически изменяется и сам базовый стохастический поток заявок на обслуживание λ_c , за исключением случаев безостановочного и бесконтактного обслуживания, когда требуется только соблюдение условия $\lambda_c \leq \mu_{об}$.

Для оценки замедления базового потока заявок на обслуживание в одноканальной СМО рассмотрим соотношение для его интенсивности:

$$\lambda_1 = 1 / \tau_1 = 1 / [\tau(1 + \alpha_1)] \quad (7)$$

где τ – среднее время формирования заявки на обслуживание “невозмущенного” исходного потока заявок в системе без задержек, что возможно при бесконечно высоком быстродействии устройств обслуживания;

τ_1 – возросшее время выполнения заявки из-за влияния СМО на процесс;

$\alpha_1 = \lambda_1 / \mu_{об}$ - реальное значение относительной интенсивности потока заявок в одноканальной СМО.

С учетом (7) получим:

$$\alpha_1 = \lambda_1 / \mu_{об} = 1 / [\mu_{об} \cdot \tau_c (1 + \alpha_1)] = \alpha / (1 + \alpha_1) \quad (8)$$

где $\alpha = \lambda_c / \mu_{об}$ - относительная интенсивность потока заявок в системе без задержек управления.

Решая это уравнение относительно α_1 , с учетом того, что $\alpha_1 > 0$, получим:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha} \quad (9)$$

При сохранении неизменным быстродействия системы, т.е. при $\mu_{об} = const$:

$$\lambda_1 = \alpha \cdot \mu_{об} = -\frac{\mu_{об}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu_{об}}{2}\right)^2 + \alpha \cdot \mu_{об}^2} \quad (10)$$

Таким образом, реальная пропускная способность СМО N_1 в одноканальной СМО снижается по сравнению с идеальным значением N в связи с увеличением времени обслуживания:

$$N_1 = N / (1 + \alpha_1) \quad (11)$$

Для m -канальной централизованной системе обслуживания соотношение (7) примет вид:

$$\lambda_{1m} = 1 / \tau_1 = 1 / [\tau_c (1 + m\alpha_1)] = \lambda_1 / (1 + m\alpha_1) \quad (12)$$

Решая это уравнение, получим:

$$\alpha_1(m) = \frac{\lambda_1}{\mu_c} = \alpha / (1 + m\alpha_1) \quad (13)$$

$$\lambda_1(m) = \alpha_1(m) \cdot \mu_{об} = -\frac{\mu_{об}}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\mu_{об}}{2m}\right)^2 + \alpha \cdot \mu_{об}^2 / m} \quad (14)$$

$$N_1(m) = N / (1 + m\alpha_1)$$

Приняв производительность СМО при $m=1$ за единицу, определим относительное снижение производительности в зависимости от степени централизации СМО:

$$\overline{N}_1(m) = N_1(m) / N_1(1) = (1 + \alpha_1) / (1 + m\alpha_1) \quad (15)$$

На рис. 1. показаны зависимости $N_1(m)$ для изменения α_1 в диапазоне от $\alpha=0$ до $\alpha=1$.

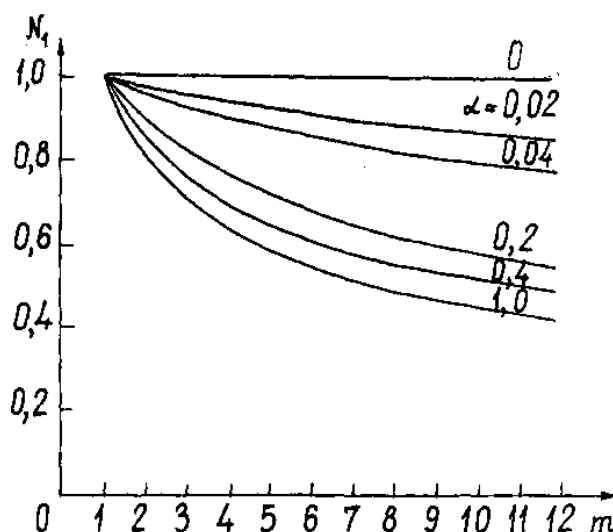


Рис. 1. Зависимость относительной величины $\bar{N}_1(m)$ производительности системы массового обслуживания от степени централизации системы (m) при различных исходных значениях α

Выводы:

1. Стохастические потоки заявок на обслуживание в системах массового обслуживания остаются без изменений только при бесконечной скорости обслуживания.

2. В реальности в большинстве случаев работы СМО имеется замедление потоков заявок на обслуживание из-за наложения времени обслуживания на интервалы поступления заявок в стохастическом потоке и влияния структуры СМО на величины интенсивностей потока заявок на обслуживание и потока обслуживания этих заявок.

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. – 576 с.
 2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. – 551 с.
-

Dmitriev S.V., doctor of technical Sciences, professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University;

Dmitrieva I.S., undergraduate, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University;

Syutkina Y.P., undergraduate, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.

THE PERFORMANCE OF QUEUEING SYSTEMS WITH STOCHASTIC FLOW OF REQUESTS FOR SERVICING

Abstract: the interaction flow of applications and operations of service in queueing systems. The regularities of performance of service when you change the relative performance of the system.

Key words: queueing system; intensity; stream orders; flow; slow flow; the performance of the system.