МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский (приволжский) федеральный университет»
(КФУ)

«УТВЕРЖДАЮ»
Первый проректор
----------Р.Г. Минзарипов
«----------» 2016г

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ПРОФИЛЬНОГО КУРСА:

«Методы математического и дидактического моделирования в физико-математическом образовании и в астрономии»,

в рамках проекта: «Классические и квантовые поля во Вселенной»,

для повышения квалификации зарубежных студентов – магистров

обучающихся по образовательным программам

высшего профессионального образования педагогического (программы физико-математического профиля) и физико-математического направлений подготовки.

Шифры образовательного направления подготовки (по лицензии):
Шифр направления подготовки 44.04.01 педагогическое направление, профиль «Информационные технологии в физико-математическом образовании»
Цель: повышение квалификации зарубежного студента – магистра
Категория слушателей: студенты – магистры
Срок обучения: 72 часа на одного слушателя
Форма обучения: очная

Казань -2016

СОДЕРЖАНИЕ

КОНЦЕПЦИЯ И ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Концепция

Согласно пункту 4 статьи 5 Федерального закона от 22.08.1996 № 125-ФЗ «О высшем и послевузовском профессиональном образовании», федеральные университеты вправе реализовывать образовательные программы ВПО и послевузовского профессионального образования на основе образовательных стандартов и требований, устанавливаемых ими самостоятельно. В том числе в этот пункт можно отнести разработку и реализацию образовательных программ совмещающих международное сотрудничество в области образования.

Создание образовательных программ КФУ охватывающих физика - математические и педагогические направления (физика - математические профили) продиктовано потребностями решения актуальных задач обеспечения развития фундаментальной математики и физики с одной стороны и популяризацией результатов исследований среди широкого круга учащихся с другой стороны.

В Российской Федерации ФГОС содержат новые требования к результатам обучающихся на основе принципов **метапредметности**. С одной стороны метапредметность рассматривается - как условие достижения высокого качества образования. Это связано с тем, что в мировой педагогической практике предметом оценки качества образования выступают преимущественно не однопредметные результаты, а обобщенные результаты, достигаемые в ходе образовательного процесса. Качество образовательного процесса проверяется умением применять полученные знания для решения конкретных задач из различных областей науки и жизнедеятельности человека. Тенденции использования в обучении так называемого «***деятельностного подхода»*** в международном образовательном пространстве растут.

Концепция «проблемно-ориентировочного» подхода в приложении к математическому образованию означает доведение фундаментальных

математических знаний, научных исследований до конкретных математических моделей, представляемых в виде компьютерных моделей, программ, которые могут быть в дальнейшем использованы в разных областях науки, техники и жизнедеятельности людей. При таком подходе к «математическому образованию» становится важным подготовка специалистов, магистров, учителей математики-информатики одновременно владеющих математическими – компьютерными знаниями и знаниями из смежных с математикой областей, в которых использование математического аппарата диктуются современными научными тенденциями. В первую очередь это такие области, как физика, биология, астрономия, робототехника и другие. При подготовке учителей на основе междисциплинарных связей основное внимание необходимо уделять решению задач направленных на построение математических, компьютерных моделей, тем самым возникают обратные связи, стимулирующие изучение, как самого предмета - объекта моделирования, так и математики и информатики, играющих роль инструментов познавательного процесса. Такая методика обучения, основанная на использовании математического, компьютерного и дидактического моделирования (дидактическая инженерия), создает дополнительные стимулы к самостоятельной поисковой, познавательной и учебной деятельности. Это развивает мотивацию, к фундаментальному математическому образованию, в целом.

Начиная с 2012 года, в отделении подготовки учителей математики и информатики КФУ мы начали внедрять инновационную методику подготовки учителей, которую мы назвали «математическим и дидактическим моделированием» (mathematical and didactic modeling - MDM)[2]. Это название происходит от соединения смысла терминов «математическое - компьютерное моделирование» и «дидактическая инженерия» [1],[3]. Эта методика является частным случаем «проблемно-ориентированного обучения» (Problem-Based Learning-PBL) [4] при изучении математики и информатики и дисциплин где математика имеет свою область применения. Математическая модель, доведенная до компьютерной программы, представляет конечный про-

дукт (цель или результат). Таким образом, целью создания «математической модели» является решение заданной проблемы или задачи (из различных областей науки и технологий), которая первоначально была переформулирована на математический язык. При реализации MDM, часть, связанная с «дидактическим моделированием» представляет комплекс дисциплин, образовательных технологий - мероприятий нацеленных на разработку учащимися математической - компьютерной модели. Важно, что MDM представляет цельную взаимосвязанную образовательную технологию, учитывающую междисциплинарные связи и психологические мотивационные факторы. Будущие учителя, на основе метода MDM будут использовать полученный опыт для обучения школьников – это основная цель применения MDM.

Наш предыдущий опыт показал, что подход MDM может быть использован не только для подготовки учителей физико-математического профиля, но и для обучения студентов и магистров по направлениям подготовки имеющих пересечения с математикой.

Предлагаемый курс был успешно апробирован в 2016 году для магистров из республики Казахстан, проходящих научную стажировку в институте математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

Актуальность и цели освоения специализированного курса

Учебные планы и программы магистрантов стажеров приезжающих из других стран, как правило, не согласованы с программами учебного заведения, где они проходят стажировку. Обычно, сроки стажировки занимают две-три недели, что не позволяет чтение достаточного количества лекций и лабораторных работ. Даже если времени было бы больше, проведение занятий по узконаправленной тематике является неэффективным, по причине того что контингент студентов и их научные интересы имеет слишком широкий спектр. Большая их часть приезжает с выбранной темой своей магистерской диссертации. Например, приведем некоторые названия тем магистер-

ских работ, из 15ти магистров Евразийского Национального университета имени Л.Н. Гумилева, приехавших в составе одной группы:

1. Модель темной энергии в F(T) гравитации с членом Янга-Миллса;
2. Исследование движений звезд в модельном потенциале Кузьмина;
3. Применение обобщенных законов термодинамики в F(T) гравитации
4. Исследование ядерных процессов в недрах звезд;
5. Использование теории солитонов для сферически-симметричной Вселенной;
6. Формирование функциональной грамотности учащихся на уроках математики;
7. Компетентностный подход в обучении математике,

и другие.

Как видим тематики разные, однако существует объединяющий фактор. Это научно-исследовательская работа и само математическое и дидактическое моделирование поставленных в магистерских работах задач. Исходя из предыдущего анализа **целями** освоения курса «Методы математического и дидактического моделирования в физико-математическом образовании и в астрономии» являются:

1. формирование у учащихся метапредметного, междисциплинарного подхода к знаниям по математике, физике, астрономии, космологии, информационным технологиям, а также по различным естественнонаучным предметам охватывающих объект исследования на основе методов математического и дидактического моделирования.

2. изучение компьютерных математических пакетов «maple», «математика», «GeoGebra» и издательской системы "Latex", на основе решения примеров и задач магистерских диссертаций.

3. Апробация выступлений учащихся по темам своих магистерских диссертаций, с дальнейшим обсуждением.

Место дисциплины в структуре ООП ВПО

С учетом того факта, что курс рассчитан на студентов магистрантов приезжающих в основном из-за рубежа место дисциплине в структуре ООП не является существенным, а носит рекомендательный характер. Для успешного изучения дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в стандартных курсах высшей математики, программирования и в других физико-математических дисциплинах. Рекомендуем запланировать научную

стажировку, связанную с предлагаемым курсом на третий семестр магистратуры.

Компетенции формируемые в результате освоения дисциплины

«Методы математического и дидактического моделирования в физико-математическом образовании и в астрономии» студент **усовершенствует** следующие специальные профессиональные компетенции (СПК):

Коды компетенций	Наименование компетенций	Краткое содержание, определение и структура компетенции. Характеристика обязательного уровня сформированности компетенции выпускника
СПК-1	владение методами разработки математических и компьютерных моделей объектов естествознания.	умет создавать модели основных объектов изучения естественнонаучных дисциплин и реализовывать их в компьютерных моделях
СПК-2	способность применять методы обучения математическому и алгоритмическому моделированию учебных задач научно-технического характера	применяет методы обучения математическому и алгоритмическому моделированию учебных задач научно-технического, экономического характера в учебном процессе
СПК-3	способность использовать математический аппарат, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации	способен использовать математический аппарат, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации
СПК-4	готовность к обеспечению компьютерной и технологической поддержки деятельности обучающихся в учебно-воспитательном процессе и внеурочной работе	умеет анализировать и проводить квалифицированную экспертную оценку качества электронных образовательных ресурсов и программно-технологического обеспечения для их внедрения в учебно-образовательный процесс

4. Структура и содержание учебной дисциплины

Курс программы рассчитан на 2 зачетные единиц (72часа) из которых 24 час. аудиторных занятий, в т.ч. 20ч. лекционных и лабораторных занятий, 48 ч. - самостоятельной работы студентов.

	Название темы и ее содержание	Количество часов		
		Аудиторные занятия в том числе		Самостоятельная работа
		На учное руков -во	Практические и лекционные занятия	
	Уточнение темы научной работы	-	0	0
	Знакомство с методическими разработками по теме «Информационные технологии в физико-математическом образовании»	-	0	12
	Индивидуальные консультации по теме магистерской работы.	4ч. на слушля	0	0
	Семинар по темам магистерских работ, с выступлениями слушателей - магистров.	-	4	6
	Семинар -лекция по теме: «Современные проблемы космологии и астрономии»	-	4	0
	Лекций и лабораторные по теме «Методы математического и дидактического моделирования в физико-математическом образовании»	-	12	20
	Работа с фондами библиотеки К(П)ФУ	-	0	12
	Подведение итогов стажировки, вручение сертификата	-	0	0
	Итого	4	20	48
	Всего	72		

	Название темы и ее содержание	Количество часов		
	Лекций и лабораторных по теме «Методы математического и дидактического моделирования в физико-математическом образовании»	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
		лекционные занятия	Лабораторные	
	Проблемно ориентированное обу-	2	0	4

	чение и методы МДМ в физико-математическом образовании.			
	Избранные разделы динамической геометрической среды GeoGebra (3D with JOGL2): интерфейс, использование командной строки, элементы программирования, построения графиков и сечений трехмерных фигур. Работа с текстом и со цветом…	2	2	8
	Избранные разделы математического пакета «maple» на основе решения примеров: вычисления, упрощения выражений, преобразования выражений,задание переменных и функций, раскрытие скобобок , приведение нескольких членов выражения к одному, решение дифференциальных уравнений, построение графиков и анимация результатов. Издательская система "Latex".	2	4	8
	Итого	6	6	20
	Всего	32		

5. Образовательные технологии:

Лекционные и лабораторные занятия, интерактивные формы обучения с помощью компьютерной системы Maple, GeoGebra, проектная деятельность.

Методика курса основана на принципах MDM и содержит три взаимодействующих меж собой блока:

1) *Изучение объекта моделирования.* Стажеры - магистранты второго курса уже имеют представления о научной проблеме, поставленной перед ними научным руководителем в своем ВУЗе. Исходя из этого, они должны подготовить научный доклад (на 15-20 минут) посвященный научной проблеме своей магистерской диссертации и о проделанной ими работе. Слушателями этих докладов являются сами стажеры и руководители стажировки, а также магистры института математики и механики КФУ. Происходит обмен опытом, а также докладчики получают советы и рекомендации от руководителя стажировки. Желательно, выделение задачи математического моделирования связанной с научной проблемой и в рассмотрения этом контексте про-

блем возникающих на стадии компьютерного моделирования данной задачи, что в свою очередь является объединяющим слушателей фактором.

2) *Изучение математических компьютерных программ для каждого слушателя должно происходить с опорой на задачу (*компьютерного моделирования*) которую он решает или будет решать.* Таким образом, возникает мотивация к изучению и применению информационных технологий, математических программ. В силу ограниченности времени стажировки (2 недели), в качестве опорных математических пакетов рассматриваем две программы. Это разделы динамической геометрической среды GeoGebra (3D with JOGL2) и избранные разделы математического пакета «maple».

3) *Блок математического и дидактического моделирования.* У учащихся формируются умения и навыки математического и дидактического моделирования объектов исследования. В том числе и методики преподавания математики и информатики как объекта моделирования.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Участие студентов – как критерии эффективности реализации целей курса.

Большинство магистерских работ связаны с использованием математического моделирования в образовательном процессе. Об этом свидетельствуют даже названия работ: Электронно-методические пособия по темам: «Использование компьютерных математической программы GeoGebra при проведении школьных уроков геометрии»; Математическое моделирование движения небесных тел с помощью пакета программ «maple» и «математика»; Методические материалы по тригонометрии (стереометрии и т.д.) с использованием компьютерной математической программы «Geogebra».

Хорошо выполненные студентами математические программы и демонстрационные материалы к урокам будут использованы как образцовые материалы к курсам для магистров и студентов. В процессе научно-исследовательской деятельности магистров, их мнение и полученные ими

результаты (материалы) будут учитываться при составлении программ дисциплин модуля «Формирование междисциплинарных связей на основе математического и дидактического моделирования». Также планируется пробное использование студентами своих материалов во время педагогической практики в школах. По нашей магистерской программе: «математическое образование, информатика и информационные технологии» по направлению (44.04.01) педагогическое образование обучаются студенты по заочной форме, которая постепенно превращается в заочно-дистанционную форму. Многие студенту работают в школах учителями, поэтому апробация результатов проходит на двух уровнях: в магистратуре и в школе.

7. Организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа включает следующие элементы:

1. Работа с литературой по пройденным темам;
2. Работу в компьютерном кабинете над индивидуальными заданиями.
3. Подготовка к докладу по теме магистерской диссертации в компьютерном классе.

В течении стажировки студенты решают индивидуальные задания из методических пособий [6], [7] в соответствии с планом самостоятельной работы и сдают их преподавателю в часы, отведенные для индивидуальных консультаций. Промежуточная аттестация проводится в виде приема индивидуального задания.

8. Апробация. В 2016 году были проведены научные стажировки студентов магистрантов в количестве 15 человек из Евразийского университета имени Л.Н. Гумилева, Казахстан, г. Астана (срок обучения: с 03.03.16 по 14.03.16) и магистрантов из Западно-Казахстанского Государственного университета им. М. Утемисова, в количестве 6 человек (срок обучения: с 23.05.16 по 03.06.16).

Соглашение по взаимному обмену студентами и академической мобильности сотрудников было достигнуто между участниками проекта «Классические и квантовые поля во Вселенной» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского (куратор - доц. Ф.Ш. Зарипов) и кафедрой общей и

теоретической физики Физико-технического факультета Евразийского университета имени Л.Н. Гумилева (куратор - заведующий кафедрой профессор Мырзакулов Ратбай). Также в 2017 году к этому сотрудничеству будут привлечены магистранты и сотрудники кафедры теоретической и ядерной физики Казахстанского Национального университета им. аль-Фараби (зав. каф. проф. Абишев Медеу Ержанович).

Литература:

1. M.A.Tchoshanov. Didactics and Engineering. – M .: Bean. Knowledge Laboratory, 2011. - 248 p.
2. F.Sh. Zaripov, L.L. Salekhova. Mathematical modeling and teaching as the basis for the training of teachers double profile (mathematics and computer science. KFU, 2012. 47str. The electronic version:http: //libweb.ksu.ru/ebooks/publicat/05_A5m-000001.pdf.
3. Ruthven, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. Handbook of international research in mathematics education/ Editor Lyn D. English. – London: LEA, Pp. 581-598.
4. Graaff E., Kolmos A. Characteristics of Problem-Based Learning. //Int .J. Engng Ed. - Vol. 19, - #5. - 2003. – P. 657–662.
5. Farchat Sh. Zaripov. Teachers of Mathematics-computer Science Based on Mathematical and Didactic Modeling Methods, as Well as Interdisciplinary Relations/ Volume XII, Pages 208-215 (July 2016). The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS e-ISSN: 2357-1330. IFTE 2016 - EpSBS Volume: http://dx.doi.org/10.15405/epsbs(2357-1330).2016. Published by the Future Academy.
6. Ф.Ш. Зарипов, А.А. Попов. Индивидуальные задания по математическому пакету «maple» для магистрантов заочников.2016.
7. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ. – 2011. -208с.

Автор-разработчик: доцент кафедры ВМиММ ИМиМ, заведующий отделением педагогического образования ИМиМ ... Зарипов Ф.Ш.

Руководитель проекта ... Попов А.А.

Директор Департамента внешних связей ... Крылов А.А.

Приложения. Материалы к курсу: «методы математического и дидактического моделирования в физико-математическом образовании и в астрономии»

Приложение 1. MDM на примере междисциплинарных связей: астрономии - физики - математики - информатики

П.1.1. Постановка задачи

Выпускнику – магистранту была поставлена следующая тема квалификационной работы. Составить математическую – компьютерную модель движения кометы Галлея, в двух вариантах. В первом варианте он должен представлять себя научным руководителем для ученика старшего класса. Поэтому должен опираться на доступные для этого ученика знания и использовать более простую математическую программу «GeoGebra». Во втором варианте он может использовать все свои знания по высшей математике, а также использовать математический пакет программы «Maple». Заданными величинами для усложненного варианта являлись координаты и вектор скорости наблюдательных данных движения кометы, зафиксированные в 1986 году, в момент пролета кометы Галлея вблизи Земли. Комета названа в честь английского астронома Эдмунда Галлея. Является первой кометой, для которой определили эллиптическую орбиту и установили периодичность возвращений. Отметим, что период движения кометы Галлея составляет примерно 80 - 89 лет. Более точное определение его траектории представляет не до конца решенную научную проблему, что усиливает значимость проблемы в глазах диссертанта.

Цель исследования магистерской диссертации заключался в реализации междисциплинарных связей средствами развития познавательного интереса к астрономии, физике и математике. Объектом исследования, с одной стороны, являлся получение и математическое моделирование уравнений небесной механики, а с другой стороны разработка методики обучения на основе MDM (метод математическое и дидактическое моделирования). Результат исследования состоит в том, что реализация междисциплинарных связей создает психическую настройку (моделирования) (ПНМ), которая является эффективным средством развития познавательного интереса учащихся в процессе обучения. Эта настройка опирается, с одной стороны на проблему связанную с необходимостью выполнения действия по разработке модели – поставленной перед студентом цели. Однако, это только начало.. Как только он начинает изучать задачу, сталкивается историей открытия кометы Галлея и последующими наблюдениями этого небесного тела, а также историей личности немецкого математика, астронома, первооткрывателя законов Солнечной системы Иоган-

на Кеплера. Историческая тема в магистерской диссертации непосредственно не влияет на результат (написанная диссертация и сопровождающие компьютерные программы). При этом историческая тема влияет на содержание и структуру ПНМ, добавляя чувственную составляющую, которая посредством работы мыслительного процесса прибавляет новые краски или расширяет субъективное пространство осознания связанное с ПНМ. На фоновое переживание человека как субъекта накладываются разные пласты восприятия, связанные с процессом деятельности по разработке конкретной модели. Кроме исторической тематики восприятия, которая является вспомогательной, выделим логическую (математическую), физическую или астрономическую (представления о законах движения небесных тел) составляющие ПНМ. Процесс мышления непрерывно сопровождается субъективными чувственными переживаниями человека. Наложение различного «чувственного» может привести к изменению ПНМ как целого и придать толчок (вдохновение) к мыслительной деятельности. При исследовании процесса обучения посредством MDM мы обязаны рассматривать обучаемого и учителя как составляющие части создаваемой модели. Можно сказать, что субъект является составной частью модели.

Вкратце рассмотрим основные компоненты построения модели в нашей магистерской диссертации.

П.1.2.Модель с физико-математической точки зрения включает повторение закона всемирного тяготения Ньютона.

Движение двух точечных тел происходит под действием двух сил, $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, одинаковых по величине, но противоположно направленных. Величина этих сил определяется массами тел m_1 и m_2, длиной вектора $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, соединяющего точки расположения центра масс тел:

$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = \dfrac{G\, m_1 m_2}{r^2}$, где G - гравитационная постоянная. С учетом второго закона Ньютона, переходя в систему координат, начало которого совпадает с центром масс, получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}, \text{ где } M = m_1 + m_2, \quad t \text{ - параметр времени.} \qquad (1)$$

После получения уравнения (1), остаются чисто математические выкладки по решению этого уравнения. Сначала доказывается, что движение, описываемое уравнениями (1) является плоским. Затем переходом в полярную систему координат $\{r, \varphi\}$, уравнения один раз интегрируются и приводятся к виду:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)};$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{(r(\varphi))^2}$; $p = \frac{h^2}{GM}$, где h, e, α – постоянные интегрирования. (2)

Для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(t)$, оставшееся дифференциальное уравнение можно интегрировать численно.

Наш магистрант помнит, что первое из уравнений (2) является уравнением кривой второго порядка,

Переходя к декартовой системе координат получим

$$\begin{cases} x'(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi - x_0 \\ y'(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Уравнение траектории можно записать в явном виде. Доказывается, для случая $(e \le 1)$, если вместо параметров p, e ввести новые параметры a и b $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \pm\sqrt{1 - k_e^{\,2}}$,

где $k_e = \frac{b}{a} \le 1$,

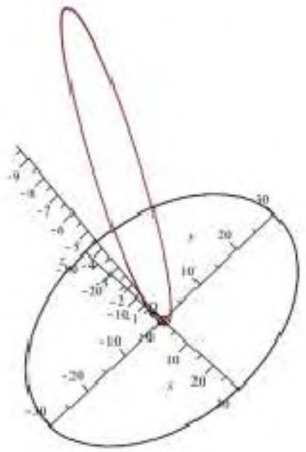
то выполняется уравнение

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, если $x_0 = -a\,e$. Здесь постоянная e - есть эксцентриситет эллипса.

Таким образом, получили каноническое уравнение эллипса.

Целью физико-математической компоненты диссертации является связывание высшей математики с математикой, доступной для понимания школьнику. Например, изучение уравнения эллипса является вполне приемлемой для учеников старших классов. С другой стороны у магистранта (будущего учителя) появляется внутренняя уверенность в более широком понимании сути проблемы, которую он должен изложить школьнику в упрощенном варианте. Потому что он проделал все математические проблемы самостоятельно. Используя полученные формулы, **привел доказательство трех законов Кеплера**.

Fig.3. The trajectory of Halley's comet. Sun has the coordinates (0, 0,0). We present the orbit of Neptune and Earth.



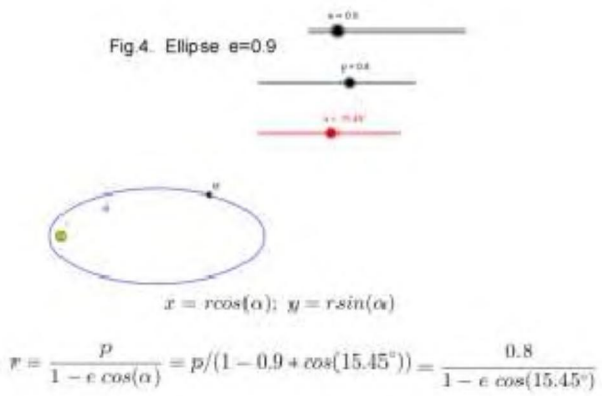
П.1.3.Компьютерная составляющая модели является наиболее сложной. Хотя и студенты изучают компьютерные системы программ во время обучения в бакалавриате, для решения данной задачи требуется повторение и выбор конкретных подпрограмм и команд, связанных с численным решением дифференциального уравнения и построением графики и ани-

мации. В Файлах «движение кометы.mw» и «движения планет.mw» приводятся основы программ по разработке моделей движения небесных тел.

Были выбраны математические программы «maple» и «GeoGebra» (для модели создаваемой школьником).

В процессе разработки компьютерной программы магистрант проделал следующие этапы работ.

1. Разработал программу для демонстрации движения планет солнечной системы, с учетом реальных физических параметров планет (скорости, эксцентриситета, афелийного расстояния и других параметров). Разработан программный модуль Eps:=(a, e, G_M, theta_0, t_0, col_orb, c_pl, r_pl_20, r_sol, c_sol). Надо подставлять необходимые параметры небесных тел: a - афелийное расстояние, e –эксцентриситет, G_M – параметр гравитационной массы солнца, {theta_0, t_0} – начальные условия, цвет изображения орбиты планеты и другие. Этот модуль с большой точностью приводит анимацию движения заданного небесного объекта вокруг центрального тела (Солнца).
2. Разработал программу по моделированию движения кометы Галлея, относительно солнечной системы. Задача затруднялась тем, что это движение происходит не в плоскости эклиптики (плоскость расположения основных планет Солнечной системы), а наклонена к этой плоскости под углом (fig.3.).Дифференциальные уравнения описывающие движение кометы решались численно. В разделе П.1.3.1 приводятся программа на языке maple с комментариями.
3. В целях подготовки материалов для школьников по моделированию в астрономии были разработаны модели движения небесных тел вокруг центрального тела, с использованием программы «GeoGebra» (fig.4.). Анимация происходит за счет изменения третьего ползунка. Важно, что при изменении эксцентриситета, когда e=1 – траектория переходит в параболическую орбиту, когда e>1 – в гиперболическую орбиту. Кроме этого магистрантом были подготовлены материалы по математике и астрономии, доступные для школьников старших классов. Попытка обучить ученика к построению модели с помощью программы «GeoGebra» увенчалось успехом.



Таким образом, наш опыт доказывает: подход MDM является работающим средством повышения качества обучения учащихся.

Приложение 2. Программа в пакете maple с комментариями : «движения планет»

```
> restart:> with(plots):
```

ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Первый закон Кеплера: *под действием силы тяготения одно небесное тело движется относительно другого по одному из конических сечений:*
гиперболе, параболе или эллипсу (в предельном случае — по прямой или окружности).
Утверждение следует из полученного выше общего уравнения
конических сечений в полярных координатах с полюсом в фокусе кривой. Это решение описывает известные в геометрии кривые второго порядка :
эллипс (e<1), гиперболу (e>1), параболу (e=1), окружность (e=0). Величина p называется параметром, а e — эксцентриситетом кривой второго порядка.
Из четности функции косинуса следует, что кривая, изображаемая уравнением (2), симметрична относительно прямых $\varphi = 0$ *и* $\varphi = \pi$ *.*
Поскольку при e < 1 замена e на -e и на не меняет вида кривой, то в этом случае имеется еще одна ось симметрии, параллельная оси y, и, следовательно, второй фокус.
Линия замкнута и образует эллипс. Его уравнение относительно второго фокуса, очевидно, имеет вид

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi - \alpha)}, \; p = \frac{h^2}{GM}.$$

Таким образом, все планеты солнечной системы двигаются по эллиптическим орбитам.
Все параметры орбиты планеты можно определять через два параметра,
например через большую полуось эллипса a и эксцентриситет e. Перигелий (q) — ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты рассчитывается по формуле:

$$r_p = a(1 - e)$$

Другие параметры орбиты:

$$h := \sqrt{GMa\left(-e^2 + 1\right)}, \; b := a\sqrt{-e^2 + 1}; \; p := a\left(-e^2 + 1\right);$$

Можно показать, что полная относительная скорость :

$$V(\varphi) = \sqrt{\frac{GM}{a(-e^2+1)}}\sqrt{e^2 - 2e\cos(\varphi) + 1}.$$

Второй закон Кеплера: *радиус-вектор, характеризующий положение движущегося тела относительно неподвижного центрального тела в задаче двух тел, всегда лежит в неизменной плоскости орбиты и за равные промежутки времени описывает площади равной величины. Это утверждение следует из формулы*
площади заметаемой радиус – вектором за время t - t_0

$$S = \frac{1}{2}\int r^2\dot{\varphi}dt = \frac{1}{2}h(t - t_0)$$

Если радиус-вектор заметает полную площадь эллипса, то $S_{el} = \pi ab = \frac{1}{2}hT$,
T - период движения планеты. С учетом предыдущих формул находим период вращения планеты

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Из последней формулы следует третий закон Кеплера.

Третий закон Кеплера: *отношение куба среднего расстояния между двумя телами к квадрату сидерического периода обращения есть величина постоянная.*

```
> Period:=proc(a,epsilon,G_M) local p,h:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);h:=sqrt(G_M*p);
> 2*Pi*a^2*sqrt(1-epsilon^2)/h;
> end proc;
> evalf(Period(10,0.8,1));
```

Period := **proc**(*a*, epsilon, *G_M*)
  local *p*, *h*;
  p := *a**abs(epsilon^2 − 1); *h* := sqrt(*G_M***p*); 2*Pi**a*^2*sqrt(1 − epsilon^2)/*h*
end proc

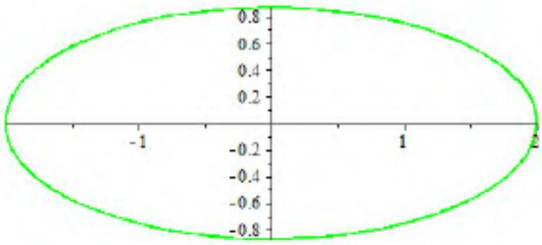
198.6917653

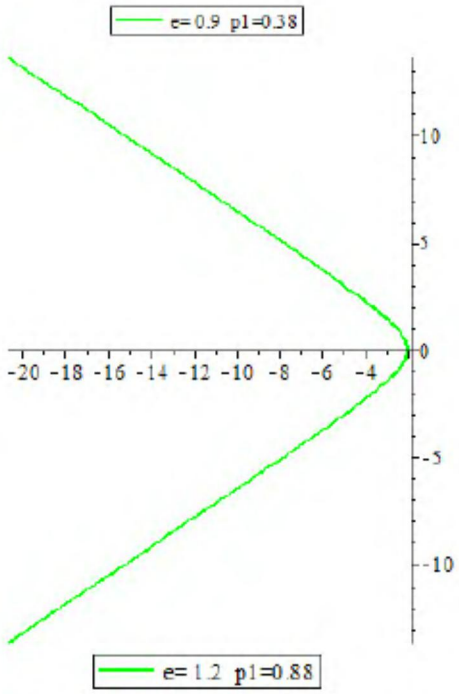
Создадим процедуру по построению траектории движения тела в зависимости от эксцентриситета

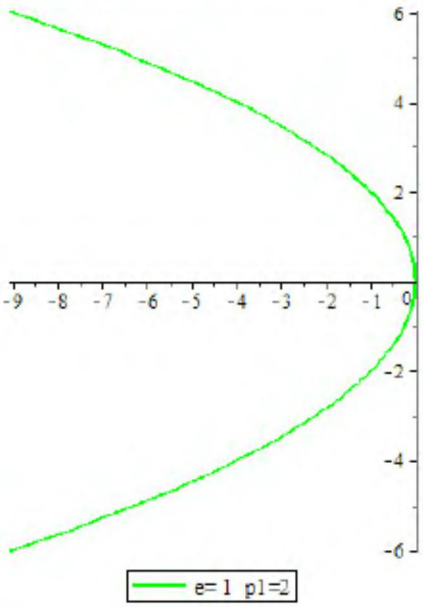
```
> with(plots):
> Digits:=5;орбита_прим:=proc(epsilon,a,c1) local c,p1,t_c:
 if epsilon=1  then  p1:=a; c:=p1/2; t_c:=2.5
> elif(epsilon<1) then p1:=a*(1-epsilon^2):t_c:=2*Pi :
c:=-a*epsilon elif(epsilon>1) then p1:=a*(epsilon^2-1):t_c:=2.5
:c:=a*epsilon end if;
plot([p1*cos(theta)/(1+epsilon*cos(theta))-c,
p1*sin(theta)/(1+epsilon*cos(theta)),theta=-
t_c..t_c],color=c1,frames=20, scaling=constrained,legend =
[typeset("e= ", epsilon,"  " "p1=",p1)]);
end proc;
>орбита_прим(0.9, 2, green);орбита_прим(1.2, 2,
green);орбита_прим(1, 2, green);
```

Digits := 5

орбита_прим := **proc**(epsilon, *a*, *c1*)
  local *c*, *p1*, *t_c*;
  if epsilon = 1 **then**
    p1 := *a*; *c* := 1/2**p1*; *t_c* := 2.5
  elif epsilon < 1 **then**
    p1 := *a**(1 − epsilon^2); *t_c* := 2*Pi; *c* := − *a**epsilon
  elif 1 < epsilon **then**
    p1 := *a**(epsilon^2 − 1); *t_c* := 2.5; *c* := *a**epsilon
  end if;
  plot([*p1**cos(theta)/(1 + epsilon*cos(theta)) − *c*, *p1**sin(theta)/(1 + epsilon
  *cos(theta)), theta = − *t_c*..*t_c*], *color* = *c1*, *frames* = 20, *scaling* = *constrained*, *legend*
  = [*typeset*("e= ", epsilon, " p1=", *p1*)])
end proc


0.8
0.6
0.4
0.2
-1
1
2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8


e= 0.9 p1=0.38
10
5
0
-20 -18 -16 -14 -12 -10 -8 -6 -4
-5
-10
e= 1.2 p1=0.88


6
4
2
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0
-2
-4
-6
e= 1 p1=2

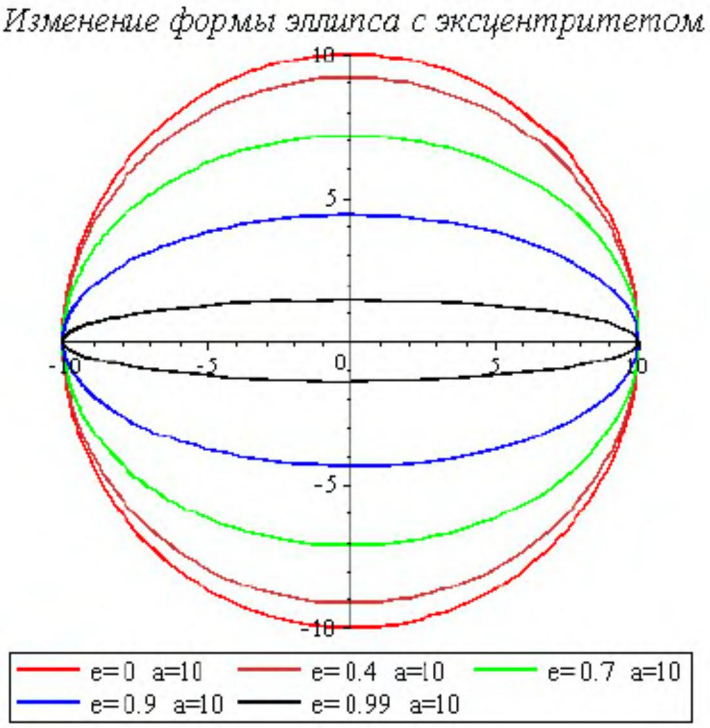
Орбиты планет солнечной системы имеют форму эллипса. Они отличаются своими эксцентриситетами и радиусами (вернее длинами большой или маленькой полуосей). Создадим процедуру, которая будет рисовать эллипс по заданному экцентриситету и длине большой полуоси. Чтобы лучше видеть, как влияет экцентриситет на форму эллипса, возьмем эллипсы, у которых длины больших полуосей равные, но значения эксцентриситета разные.

```
> Ellipse:=proc(epsilon,a,c1)local c:
c:=a*epsilon:
```

По определению e=c/a, c - это положение фокусов относительно центра эллипса. А центр наших эллипсов совпадает с началом координат.

```
plot([a*(1-epsilon^2)*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta))-c,
 a*(1-epsilon^2)*sin(theta)/(1-
epsilon*cos(theta)),theta=0..2*Pi],
color=c1,frames=20, scaling=constrained,
legend = [typeset("e= ", epsilon,"  " "a=",a)]);
end proc:
E1:=Ellipse(0,10,red):E2:=Ellipse(0.4,10,orange):E3:=Ellipse(0.7
,10,green):
E4:=Ellipse(0.9,10,blue):E5:=Ellipse(0.99,10,black):
display([E1,E2,E3,E4,E5],frames=10,scaling=constrained,
title=`Изменение формы эллипса с эксцентрите-
том`,titlefont=["ROMAN", 15]);
```

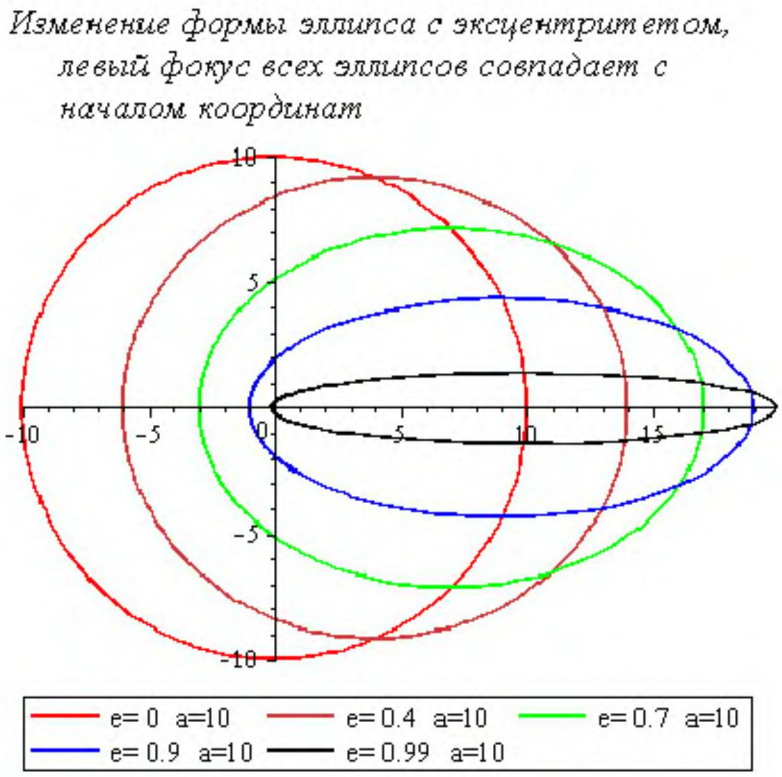
Здесь мы использовали уравнение эллипса в полярных координатах
r=p/(1-e*cos(theta)) где, p=b^2/a, b=a*sqrt(1-e^2), x=r*cos(theta), y=r*sin(theta).



> Как мы видим из рисунка, при e=0, эллипс превращается в окружность. И чем больше экцентриситет эллипса, тем сильнее он отличается от окружности. Теперь повторим такую же процедуру, но поставим начало координат на один из фокусов эллипса

```
> Ellipse1:=proc(epsilon,a,c1)local c:
c:=a*epsilon:
plot([a*(1-epsilon^2)*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta)),
```

```
 a*(1-epsilon^2)*sin(theta)/(1-
epsilon*cos(theta)),theta=0..2*Pi],color=c1,
frames=20,scaling=constrained,legend = [typeset("e= ", epsilon,"
" "a=",a)]);
end proc:
E11:=Ellipse1(0,10,red):E12:=Ellipse1(0.4,10,orange):E13:=Ellips
e1(0.7,10,green):
E14:=Ellipse1(0.9,10,blue):E15:=Ellipse1(0.99,10,black):
display([E11,E12,E13,E14,E15],frames=10,
title=`Изменение формы эллипса с эксцентритетом, левый фокус
всех эллипсов совпадает с началом координат`,titlefont=["ROMAN",
14]);
```



> Теперь нарисуем Солнце и планету, поставив центр Солнца, согласно первому закону Кеплера, на один из фокусов эллипса, по которому двигается планета.

Sun:=proc(a,epsilon,r,c2) local F, SolarDisc:

F:=[a*epsilon,0]: Координаты (x,y) одного из фокусов, в данном случае правого фокуса.

```
SolarDisc:=plottools[disk](F, r, color=c2):
display(SolarDisc,scaling = constrained)
end proc:
```

> Также траекторию движения планеты,

```
Ell:=(a,epsilon,r,c1,c2)-
>plots[display](Ellipse(epsilon,a,c1),Sun(a,epsilon,r,c2)):
> Ell(10,0.8,0.5,green,yellow):
> PT:=(a,epsilon,r3,c3,theta)->plots[display](plottools[disk]
([a*(1-epsilon^2)*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta))-a*epsilon,
a*(1-epsilon^2)*sin(theta)/(1-
epsilon*cos(theta))],r3,color=c3),scaling=CONSTRAINED,title=`Тра
```

```
ектория движения планеты вокруг Солнца`,titlefont=["ROMAN",
14]):
> PT(10,0.8,0.05,red,0):
> Orbit:=(a,epsilon,r,c1,c2,r3,c3,theta)-
>plots[display](PT(a,epsilon,r3,c3,theta),
Ell(a,epsilon,r,c1,c2)):
> Orbit(10,0.8,0.5,green,yellow,0.3,red,Pi/2);
```

> Используя комманду seq(f, i = m..n), создадим анимацию движения планет вокруг Солнца.

```
Anim_Orbit:=proc(a,epsilon,r,c1,c2,r3,c3,T,N) local i,ti,Ori:
ti:=(i)->T/N*i:
Ori:=(i)->Orbit(a,epsilon,r,c1,c2,r3,c3,ti(i)):
plots[display](seq(Ori(i),i=0..N),insequence=true,scaling=CONSTR
AINED):
end proc:

> Anim_Orbit(10,0.8,0.5,green,yellow,0.2,red,6*Pi,100);
```

> Стираем значения эксцентриситета

```
epsilon := 'epsilon';
```

Решение дифференциального уравнения.

В полярной системе координат оставшиеся уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{h}{r^2},\ h=const,\quad r(\varphi)=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\alpha)},\ p=\frac{h^2}{GM}.$$

Переход к прямоугольной декартовой системе осуществляется по формуле

$$\begin{cases} x'(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi-x_0 \\ y'(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}.$$

Ниже приводится решение дифференциального уравнения и построение графика траекторий.

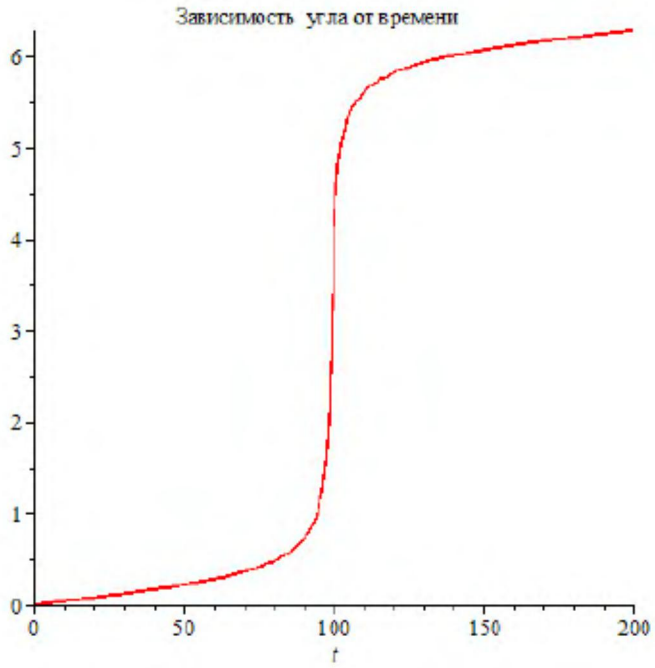
```
> Thetap:=proc(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0)  local
p,h,ur,rur,Theta:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);
> h:=sqrt(G_M*p);
> ur:={diff(theta(t),t)=(h/(p^2))*(1-
epsilon*cos(theta(t)))^2,theta(t_0)=theta_0}:
> rur:=dsolve(ur,numeric,theta(t),output=listprocedure);
> Theta(t):=subs(rur,theta(t)):
```

Theta(t)- зависимость полярного угла от времени.

```
> end proc;
> #Th(t):=Thetap(10,0.8,1,0,0)(t):
> orb:=proc(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0) local p,h,ur,rur,T,Theta:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);
> h:=sqrt(G_M*p):
> T:=2*Pi*a^2*sqrt(abs(1-epsilon^2))/h;
> #T:=Period(a,epsilon,G_M);
> Th(t):=Thetap(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0)(t):
> plot([p*cos(Th(t))/(1-epsilon*cos(Th(t)))-
a*epsilon,p*sin(Th(t))/(1-epsilon*cos(Th(t))),t=0..T], col-
or=red,frames=50, scaling=constrained);
> end proc;
> orb(10,0.9,1,0,0);plot(Th(t),t=0..200,title="Зависимость  угла
от времени  ",color=red);
> T:=evalf(Period(10,0.9,1));
>
>
```

```
Thetap := proc(a, epsilon, G_M, theta_0, t_0)
    local p, h, ur, rur, Theta;
    p := a*abs(epsilon^2 - 1);
    h := sqrt(G_M*p);
    ur := {diff(theta(t), t) = h*(1 - epsilon*cos(theta(t)))^2/p^2, theta(t_0) = theta_0};
    rur := dsolve(ur, numeric, theta(t), output = listprocedure);
    Theta(t) := subs(rur, theta(t))
end proc
```

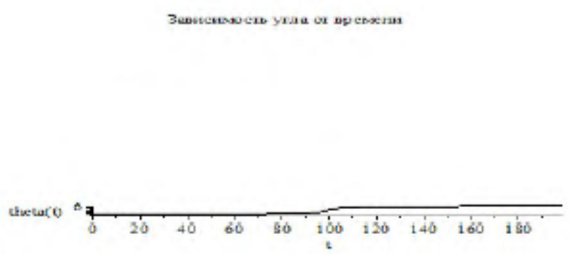
```
orb := proc(a, epsilon, G_M, theta_0, t_0)
    local p, h, ur, rur, T, Theta;
    p := a*abs(epsilon^2 - 1);
    h := sqrt(G_M*p);
    T := 2*Pi*a^2*sqrt(abs(1 - epsilon^2))/h;
    Th(t) := Thetap(a, epsilon, G_M, theta_0, t_0)(t);
    plot([p*cos(Th(t))/(1 - epsilon*cos(Th(t))) - epsilon*a, p*sin(Th(t))/(1 - epsilon
    *cos(Th(t))), t = 0..T], color = red, frames = 50, scaling = constrained)
end proc
```



Анимация построения графика зависимости полярного угла от времени

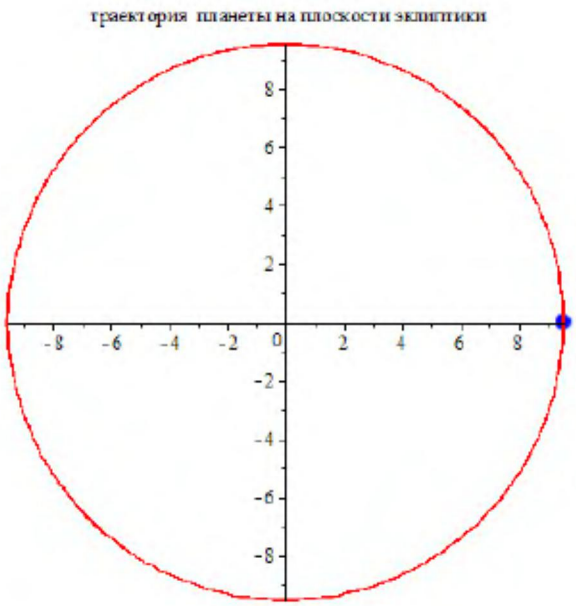
```
> with(plots):
> Thetap_:=proc(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0)  local
p,h,ur,rur,T,Theta:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);
> h:=sqrt(G_M*p);T:=2*Pi*a^2*sqrt(abs(1-epsilon^2))/h;
> ur:={diff(theta(t),t)=(h/(p^2))*(1-
epsilon*cos(theta(t)))^2,theta(t_0)=theta_0}:
> rur:=dsolve(ur,numeric,theta(t),output=listprocedure);
> odeplot(rur,[t, theta(t)],t=0..T,color=black,frames=40, scal-
ing=constrained,view = [0..T,
0..2*Pi],labels=["t","theta(t)"],title="Зависимость угла от вре-
мени");
> end proc;

> with(plots):With(Detools);
> Theta_odez:=proc(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0,col)  local
p,h,urz,rurz,T,Theta:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);
> h:=sqrt(G_M*p);T:=2*Pi*a^2*sqrt(abs(1-epsilon^2))/h;
```

```
> urz:={diff(theta(t),t)=(h/(p^2))*(1-
epsilon*cos(theta(t)))^2,theta(t_0)=theta_0};
> rurz:=dsolve(urz,numeric,theta(t),output=listprocedure);
> Thetaz(t):=subs(rurz,theta(t));
> odeplot(rurz,[p*cos(theta(t))/(1-epsilon*cos(theta(t)))-
a*epsilon, p*sin(theta(t))/(1-
epsilon*cos(theta(t)))],t=0..T,color=col,frames=40, scal-
ing=constrained,labels=["x","y"],title="траектория с демонстра-
цией скорости");
> end proc;
> Theta_odez(10,0.8,1,0,0,red);
```



Анимация движения планеты по орбите

```
> with(plots):With(Detools);
> The-
ta_ode:=proc(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0,col_orb,c_pl,r_pl_20)
local p,h,ur,rur,T,Theta,X,Y,ball,p_1,p_2,ball_:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);
> h:=sqrt(G_M*p);T:=2*Pi*a^2*sqrt(abs(1-epsilon^2))/h;
> ur:={diff(theta(t),t)=(h/(p^2))*(1-
epsilon*cos(theta(t)))^2,theta(t_0)=theta_0};
> rur:=dsolve(ur,numeric,theta(t),output=listprocedure);
> Teh(t):=Thetap(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0)(t);
ball_:=proc(x,y)plots[pointplot]([[x,y]],color=c_pl,symbol=solid
circle,symbolsize=r_pl_20) end proc;
> p_2:=plot([p*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta))-
a*epsilon,p*sin(theta)/(1-
epsilon*cos(theta)),theta=0..2*Pi],color=col_orb):
> p_1:=animate(ball_,[p*cos(Teh(t))/(1-epsilon*cos(Teh(t)))-
a*epsilon,p*sin(Teh(t))/(1-
epsilon*cos(Teh(t)))],t=0..T,frames=trunc(40),background=p_2,
scaling=constrained, title="траектория  планеты на плоскости эк-
липтики");
> end proc;
> Theta_ode(9.5449033,0.05538,39.437,0,0,red,blue,20);
```




```
Theta_ode := proc(a, ε, G_M, theta_0, t_0, col_orb, c_pl, r_pl_20)
    local p, h, ur, rur, T, Θ, X, Y, ball, p_1, p_2, ball_;
    p := a*abs(ε^2 − 1);
    h := sqrt(G_M*p);
    T := 2*π*a^2*sqrt(abs(1 − ε^2)) / h;
    ur := {diff(θ(t), t) = h*(1 − ε*cos(θ(t)))^2/p^2, θ(t_0) = theta_0};
    rur := dsolve(ur, numeric, θ(t), output = listprocedure);
    Teh(t) := Thetap(a, ε, G_M, theta_0, t_0)(t);
    ball_ := proc(x, y)
        plots[plots:-pointplot]([[x, y]], color = c_pl, symbol = solidcircle, symbolsize
        = r_pl_20)
    end proc;
    p_2 := plot([p*cos(θ) / (1 − ε*cos(θ)) − ε*a, p*sin(θ) / (1 − ε*cos(θ)), θ = 0 ..2
    *π], color = col_orb);
    p_1 := plots:-animate(ball_, [p*cos(Teh(t)) / (1 − ε*cos(Teh(t))) − ε*a, p
    *sin(Teh(t)) / (1 − ε*cos(Teh(t)))], t = 0 ..T, frames = trunc(40), background = p_2,
    scaling = constrained, title = "траектория  планеты на плоскости эклиптики")
end proc
```

В правый фокус расположим Солнце

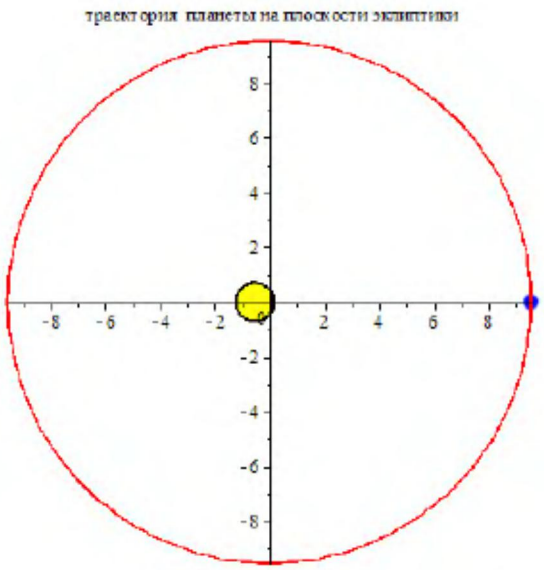
```
>Eps:=(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0,col_orb,c_pl,r_pl_20,r_sol,c_so
l)-
>plots[display](Theta_ode(a,epsilon,G_M,theta_0,t_0,col_orb,c_pl
,r_pl_20),Sun(-a,epsilon,r_sol,c_sol),view = [-a..a, -
a*sqrt(abs(1-epsilon^2))..a*sqrt(abs(1-epsilon^2))]):
```

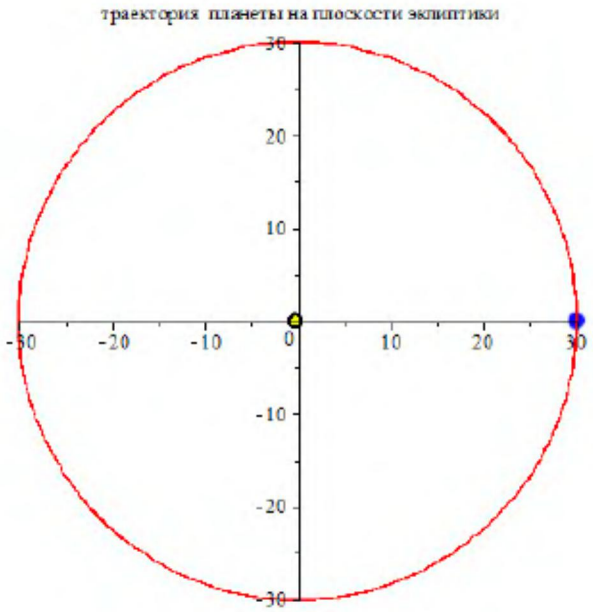
Для Сатурна

```
>Eps(9.5449033,0.05538,39.49391,0,0,red,blue,20,0.7,yellow);
```

Для Нептуна

```
>Eps(30.069206,0.00859,39.49391,0,0,red,blue,20,0.7,yellow);
```





Орбиты планет солнечной системы

Расстояние от планеты до Солнца можно выразить через уравнение эллипса в полярных координатах :

```
> Orbits:=proc(ra,epsilon,n,col) local a,b,p,c,r,fn,orb:
a:=ra/(1+epsilon): c:=a*epsilon: b:=a*sqrt(1-epsilon^2):
p:=b^2/a: r:=p/(1-epsilon*cos(theta)):
```

где "ra" -- афелийное расстояние от Солнца, а " e " -- эксцентриситет орбиты. Первое уравнение можно использовать, когда задана длина большой полуоси орбиты "a".

```
fn:=plots[textplot]([-c,b,'n'],align={below,right}):
orb:=plot([r*cos(theta)+c,
r*sin(theta),theta=0..2*Pi],color=col,frames=20, scal-
ing=constrained, legend = [typeset("e= ", epsilon,"  "
"ra=",ra,"  ",n)]);
plots[display](orb,fn):
end proc:
```

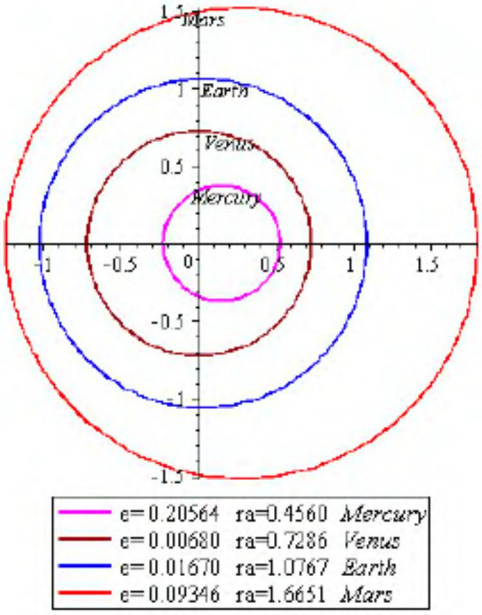
> Вводим данные об эксцентриситетах и аффелийних расстоянии всех планет солнечной системы (данные из www.astronom2000.info, и www.nssdc.gsfc.nasa.gov)

	Мерку-рий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Аффелий-ное рас-стояние (а.е)	0.456	0.7286	1.0767	1.6651	5.4525	10.0735	20.0802	30.3275	49.2981
Эксцен-триситет	0.20564	0.0068	0.01670	0.09346	0.04845	0.05538	0.04756	0.00859	0.248

Венера
Масса Венеры 4.81068 · 10^24 (Килограмм)
Земля
Масса Земли 5.97600 · 10^24 (Килограмм)
Луна
Масса Луны 0.07350 · 10^24 (Килограмм)
Марс
Масса Марса 0.63345 · 10^24 (Килограмм)
Меркурий
Масса Меркурия 0.32868 · 10^24 (Килограмм)
Нептун
Масса Нептуна 101.59200 · 1024 (Килограмм)
Плутон
Масса Плутона 0.01195 · 10^24 (Килограмм)
Сатурн
Масса Сатурна 561.80376 · 10^24 (Килограмм)
Солнце
Масса Солнца 1989000.00000 · 10^24 (Килограмм)
Уран
Масса Урана 86.05440 · 10^24 (Килограмм)
Юпитер
Масса Юпитера 1876.64328 · 10^24 (Килограмм)

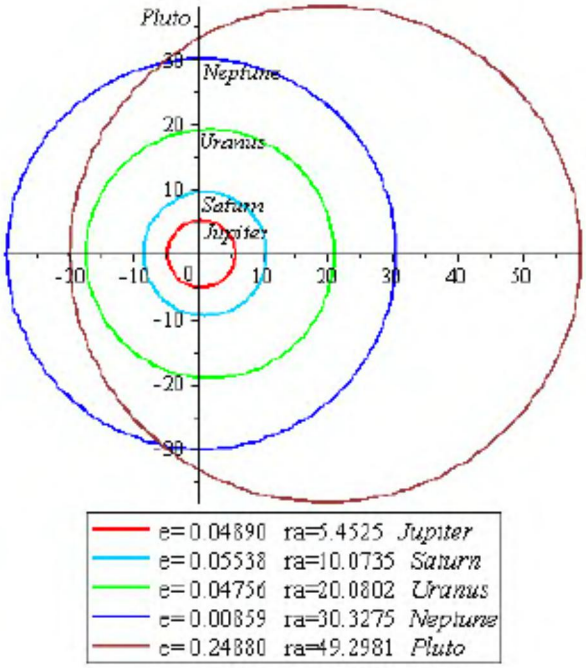
```
>plots[display](Orbits(0.4560,0.20564,Mercury,"Fuchsia"),Orbits(
0.7286,0.00680,Venus,"Maroon"),Orbits(1.0767,0.01670,Earth,blue)
,Orbits(1.6651,0.09346,Mars,red),scaling=CONSTRAINED);
```

Для наглядности сначала посмотрим орбиты планет земной группы (внутренних планет)



а потом и осталных :

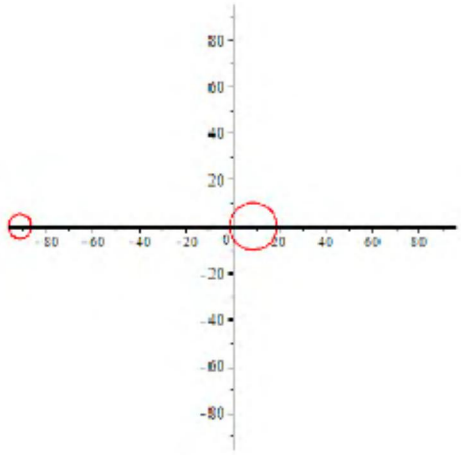
```
> plots[display](Orbits(5.4525,
0.04890,Jupiter,red),Orbits(10.0735,0.05538,Saturn,"DeepSkyBlue"
),Orbits(20.0802,0.04756,Uranus,green),Orbits(30.3275,0.00859,Ne
ptune,blue),Orbits(49.2981,
0.24880,Pluto,brown),scaling=CONSTRAINED);
```



Возьмем две звезды массами "m1" и "m2", которые вращаются вокруг общего центра, расстояние между ними "r".

```
> restart: with(plots):
TwoStars:=proc(m1,m2,r,R1,R2) local r1,r2,x1,x2,y1,y2:
r1:=m2*r/(m1+m2):  r2:=m1*r/(m1+m2):
x1:= -r1*cos(theta): x2 := r2*cos(theta):
y1 := -r1*sin(theta): y2 := r2*sin(theta):
animate({[R1*cos(z) + x1, R1*sin(z) + y1, z=-Pi..Pi],
```

```
[R2*cos(z)+x2, R2*sin(z)+y2, z=-
Pi..Pi]},theta=0..2*Pi,filled=true,
frames=75,scaling=constrained):
end proc:
TwoStars(5,50,100,5,10);
```



Задача Кеплера

Демонстрируем численное решение уравнения Ньютона для задачи Кеплера в декартовой системе. Для начала запишем основные величины которые будум использовать. Возьмем массу Солнца очень большой по сравнению с массой Земли, поэтому будем движение Земли рассматривать как движение тела вокруг неподвижной точки притяжения.

```
> restart;
> G:=6.67*10^(-11);
```
гравитацио́нная постоя́нная,
```
> Ms:=1.99*10^(30);
```
масса Солнца,
```
> Me:=5.97*10^(24);
```
масса Земли,
```
> au:=1.5*10^(11);
```
астрономическая единица,
```
> Fe:=G*Ms*Me/au^2;
```
Сила притяжения между Землей и Солнцем,

$$G := 6.670000000\,10^{-11}$$

$$Ms := 1.990000000\,10^{30}$$

$$Me := 5.970000000\,10^{24}$$

$$au := 1.500000000\,10^{11}$$

$$Fe := 3.521848933\,10^{22}$$

Также найдем центроустремителное ускорение, период обращения вокруг Солнца и линейную скорость Земли:

```
> Acc:=G*Ms/au^2;
Te:=evalf(365.26*24*60*60);
ve:=evalf(2*Pi*au)/Te;
```

$$Acc := 0.005899244444$$

$$Te := 3.155846400\,10^{7}$$

$$ve := 29864.50152$$

Как мы видем ,сила притяжения между Землей и Солнцем велика, ну несмотря на это ускорение Земли в результате небольшое. Скорость движения Земли вокруг Солнца чуть меньше 30 км/ч!

До этого мы работали в системе СИ. Теперь переходим в новую систему отсчета для того, чтобы работать далнейшем была удобнее.
Введем систему единиц, чтобы обезразмерить все величины с которыми будем работать. Для этого выбираем три основные единицы:
Как единицу длины выбираем астрономическую единицу или средное расстояние Земли до Солнца (au);
Как единицу массы выберем массу Солнца (Ms);
Как единицу времени период движения Земли вокруг Солнца (год).
Как мы говорили выше, в этой новой системе, расстояние будет в а.е., время в годах и масса Солнца будет единицой массы. Естественно, остальные производные единицы будем выражать через выбранные нами основных единиц.

```
> unitLength:=au;
```
Единица длины,

```
> unitTime:=Te;
```
Единица времени,

```
unitMass:=Ms;
```
Единица массы,

$$unitLength := 1.500000000\,10^{11}$$

$$unitTime := 3.155846400\,10^{7}$$

$$unitMass := 1.990000000\,10^{30}$$

> Естественно, остальные производные единицы будем выражать через выбранные нами основных единиц:

```
unitVel:=unitLength/unitTime;
>
```

Это у нас будет единица скорости. Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, скорость движения вокруг Солнца будет как множители 2π ;.

```
ve/unitVel;
  unitAcc:=unitVel/unitTime;
> unitForce:=unitMass*unitAcc;


>
```

$$unitVel := 4753.083040$$

$$6.283185307$$

$$unitAcc := 0.0001506119892$$

$$unitForce := 2.997178585\,10^{26}$$

> Посмотрим как выглядит ускорение Земли и сила притяжения со стороны Солнца в этих единицах;

```
> (G*Ms/au^2)/unitAcc;
  (G*Ms*Me/au^2)/unitForce;
```

Можем также определить постоянную всемирного тяготения.

```
> unitG:=unitForce*(unitLength)^2/unitMass^2;
G/unitG;
>
```

$$39.16849167$$

$$0.0001175054750$$

$$unitG := 1.702899375\,10^{-12}$$

$$39.16849168$$

Мы возьмем точку где скорость Земли перпендикулярна к радиус вектору, тогда модуль момента импульса можно записать в виде;

> `L0:=(Me*au*ve);` Переводим в нашу систему отсчета:
> `L0/(unitMass*unitVel*unitLength);` центробежная потенциальная энергия Земли записывается как
`L0^2/(2*m*r^2);`
Дифференцируя потенциальную энергию по " r ", можем найти центробежную силу:
> `subs(r=au,-diff(L0^2/(2*Me*r^2),r));`
> Найденное значение мало отличается от
> `-G*Ms*Me/au^2;`
Разница возникает из-за эксцентричности земной орбиты.
>

$$L0 := 2.674366111\,10^{40}$$

$$0.00001884955591$$

$$\frac{3.576117048\,10^{80}}{m\,r^2}$$

$$3.549716036\,10^{22}$$

$$-3.521848933\,10^{22}$$

Теперь все переводим в нашу систему:
>
`subs(r=au,diff(L0^2/(2*Me*r^2),r))*(unitMass*unitLength^3/(unitMass*unitLength*unitVel)^2);`
> `(-G*Ms*Me/au^2)*(unitLength^2/(unitMass^2*unitG));`

$$-0.0001184352528$$

$$-0.0001175054750$$

Движение Земли

> С системой единиц измерений разобрались. Можем изучить движение Земли или другой планеты Солнечной системы.
`restart;` Записиваем данные в новой системе,
`G:=39.17: M:=1: m:=6*10^(24)/(1.99*10^(30)):` Введем потенциальную энергию и переводим ее в декартову систему
> `U:=-G*M*m/r;`
> `U:=subs(r=sqrt(x^2+y^2),U);`

$$U := -\frac{0.0001181005025}{r}$$

$$U := -\frac{0.0001181005025}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

> продифференцируя потенциалы найдем проекции силы по осям x и y:
> `Fx:=-diff(U,x);`
> `Fy:=-diff(U,y);`
Записиваем проекции силы в виде функции от x и y,
> `FX:=unapply(Fx,x,y);`
`FY:=unapply(Fy,x,y);`

$$Fx := -\frac{0.0001181005025\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$Fy := -\frac{0.0001181005025\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$FX := (x,y) \rightarrow -\frac{0.0001181005025\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$FY := (x, y) \to -\frac{0.0001181005025\,y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

Второй закон Ньютона можем записать:

```
> Eq1:=m*diff(x(t),t$2)=FX(x(t),y(t));
> Eq2:=m*diff(y(t),t$2)=FY(x(t),y(t));
```

Зададим начальные условия сначала Земли, потом и другого обьекта вокру Солнца.

```
> x0:=147.09/150: y0:=0: vx0:=0: vy0:=6.28*30.29/29.86:
```
Это для Земли,

> Решаем уравнения Ньютона с учетом начальных условий

```
> IC:=x(0)=x0,D(x)(0)=vx0,y(0)=y0,D(y)(0)=vy0;
>
sol:=dsolve({Eq1,Eq2,IC},{x(t),y(t)},numeric,output=listprocedur
e):
```

Теперь найдем координаты и проекции скорости по осям x и y.

```
> X:=subs(sol,x(t)): Y:=subs(sol,y(t)):
> VX:=subs(sol,diff(x(t),t)): VY:=subs(sol,diff(y(t),t)):
```
Проверим работу программы:

```
> [X(5),Y(5)]; [VX(5),VY(5)];
```

$$Eq1 := 0.000003015075377\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) = -\frac{0.0001181005025\,x(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)^{3/2}}$$

$$Eq2 := 0.000003015075377\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) = -\frac{0.0001181005025\,y(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)^{3/2}}$$

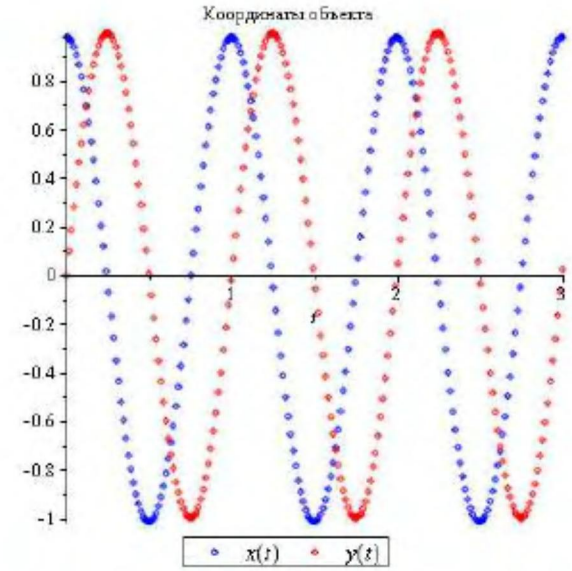
$$IC := x(0) = 0.9806000000, D(x)(0) = 0, y(0) = 0, D(y)(0) = 6.370435365$$

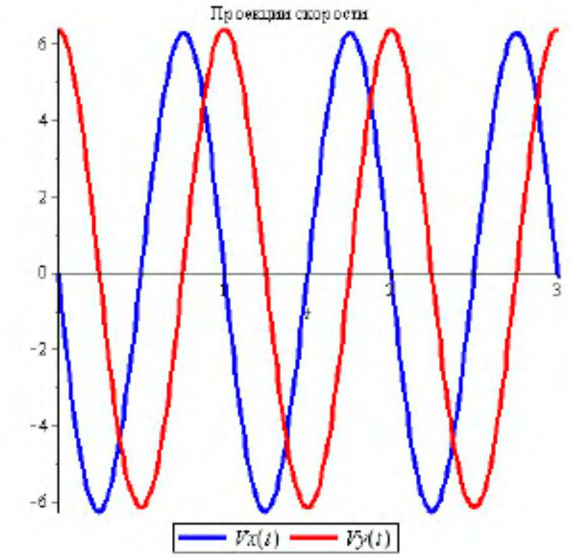
$$[0.979688608663986, 0.0424888904957123]$$

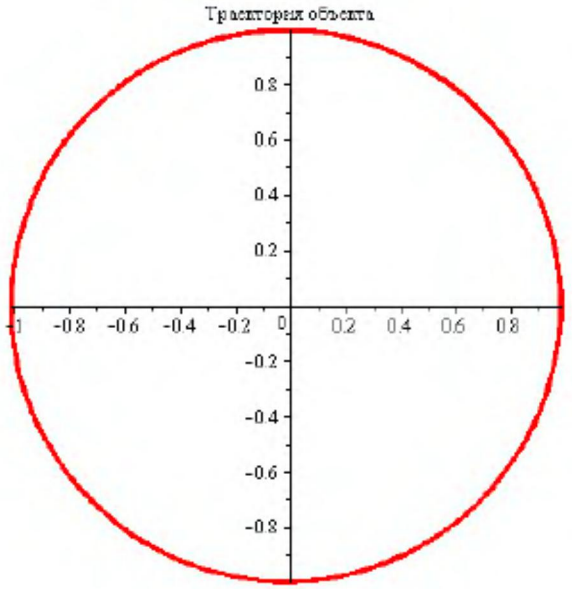
$$[-0.271690713626179, 6.36456322236963]$$

Программа работает, теперь можем получить графики координат, скорости от времени и даже траекторию движения:

```
> plot(['X(t)','Y(t)'],t=0..3,title="Координаты объекта",
legend=[x(t),y(t)],
style=point,color=[blue,red],thickness=3);
> plot(['VX(t)','VY(t)'],t=0..3,title="Проекции
скорости",legend=[Vx(t),Vy(t)],
color=[blue,red],thickness=3);
> plot(['X(t)','Y(t)',t=0..3],title="Траектория
объекта",color=red,
thickness=3,scaling=constrained);
>
>
```



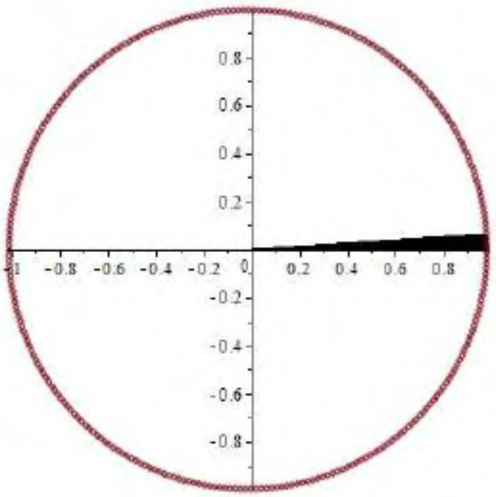





```
> N:=288; T:=1;
> Lr:=[seq([X(T/N*i),Y(T/N*i)],i=0..N)]:
> with(plots):
> TRAJ:=plot(Lr,style=point): #dis-
play(TRAJ,scaling=constrained);
```

```
for i from 0 to N do:
> with(geometry):
> tr[i]:=plots[polygonplot]([[0,0],[X(T/N*i), Y(T/N*i)],
[X(T/N*(i+1)), Y(T/N*(i+1))]],scaling=CONSTRAINED):
TT[i]:=evalf(T/N*i,4):
VV[i]:=evalf(sqrt(VX(T/N*i)^2 +VY(T/N*i)^2),4):
RR[i]:=evalf(sqrt(X(T/N*i)^2 +Y(T/N*i)^2),4):
ARR[i]:=evalf(area(tr[i])+area(tr[i+1]+area(tr[i+2]))):
od:

> for k from 0 to N do:
> CCC[k]:=triangle(ABC, [point(A, 0, 0), point(B, X(T/N*k),
Y(T/N*k)),
point(C, X(T/N*(k+1)),   Y(T/N*(k+1)))]):
DDD[k]:=area(CCC[k]):
> od:
>
> for mm from 0 to N do:
Arr[mm]:=evalf((DDD[mm]+DDD[mm+1]+DDD[mm+2]),6);
od:
>
display(seq(display(TRAJ,tr[i],tr[i+1],tr[i+2],title=[typeset("t
= ", TT[i],
"  " "V=",VV[i]," " "r= ", RR[i]," " "S=",Arr[i]),font =
[TIMES, BOLD, 16]]),
i=0..N-2),insequence=true,scaling=constrained);
```

t= 0. V=6.370 r= 0.9806 S=0.0325329




```
> for k from 0 to N do:
> CCC[k]:=triangle(ABC, [point(A, 0, 0), point(B, X(T/N*k),
Y(T/N*k)), point(C, X(T/N*(k+1)),   Y(T/N*(k+1)))]):
DDD[k]:=area(CCC[k]):
EEE[k]:=evalf((DDD[k]+DDD[k+1]+DDD[k+2]),6);
> od:
> XX:=seq(EEE(k),k=N):
```

Движение Меркурия

```
> restart;
G:=39.17: M:=1: m:=3.3*10^(23)/(1.99*10^(30)):
```

```
> U:=-G*M*m/r;

> U:=subs(r=sqrt(x^2+y^2),U);
> Fx:=-diff(U,x);
> Fy:=-diff(U,y);
```

Записиваем проекции силы в виде функции от x и y,

```
> FX:=unapply(Fx,x,y);
FY:=unapply(Fy,x,y);
> Eq1:=m*diff(x(t),t$2)=FX(x(t),y(t));
> Eq2:=m*diff(y(t),t$2)=FY(x(t),y(t));
> x0:=46.00/150: y0:=0: vx0:=0: vy0:=6.28*58.98/29.86:
```

для Меркурий

```
> IC:=x(0)=x0,D(x)(0)=vx0,y(0)=y0,D(y)(0)=vy0;
>sol:=dsolve({Eq1,Eq2,IC},{x(t),y(t)},numeric,output=listprocedure):sol(2.3);
> X:=subs(sol,x(t)):
Y:=subs(sol,y(t)):
> VX:=subs(sol,diff(x(t),t)): VY:=subs(sol,diff(y(t),t)):
```

$$U := -\frac{0.000006495527637}{r}$$

$$U := -\frac{0.000006495527637}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Fx := -\frac{0.000006495527637\,x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$Fy := -\frac{0.000006495527637\,y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$FX := (x,y) \rightarrow -\frac{0.000006495527637\,x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$FY := (x,y) \rightarrow -\frac{0.000006495527637\,y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$Eq1 := 1.658291457\,10^{-7}\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) = -\frac{0.000006495527637\,x(t)}{\left(x(t)^2+y(t)^2\right)^{3/2}}$$

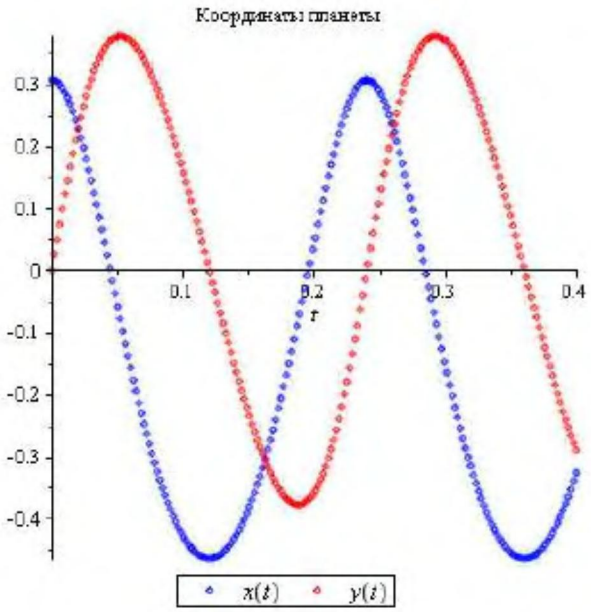
$$Eq2 := 1.658291457\,10^{-7}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) = -\frac{0.000006495527637\,y(t)}{\left(x(t)^2+y(t)^2\right)^{3/2}}$$

$$IC := x(0) = 0.3066666667, \mathrm{D}(x)(0) = 0, y(0) = 0, \mathrm{D}(y)(0) = 12.40436705$$

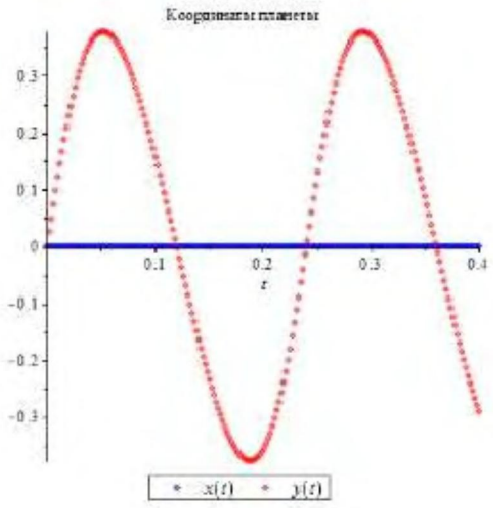
$$\left[t(2.3) = 2.3, x(t)(2.3) = -0.439681874010166, \frac{d}{dt}x(t)(2.3) = 2.98500527200557, y(t)(2.3) = -0.133179251970855, \frac{d}{dt}y(t)(2.3) = -7.74752735456157\right]$$

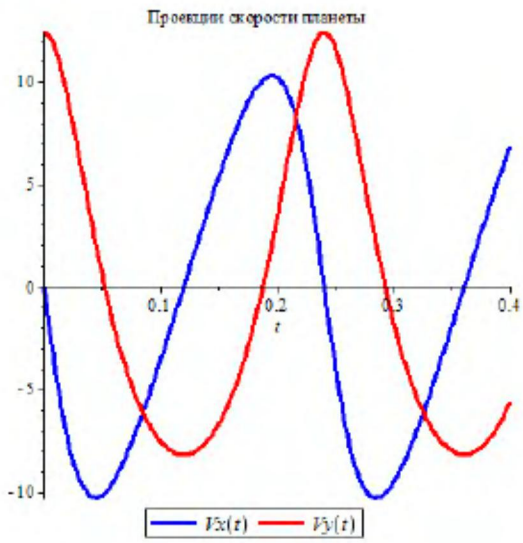
```
> X(3);
plot(['X(t)','Y(t)'],t=0..0.4,title="Координаты планеты",
legend=[x(t),y(t)],
style=point,color=[blue,red],thickness=3);
```

$$-0.462627944123423$$



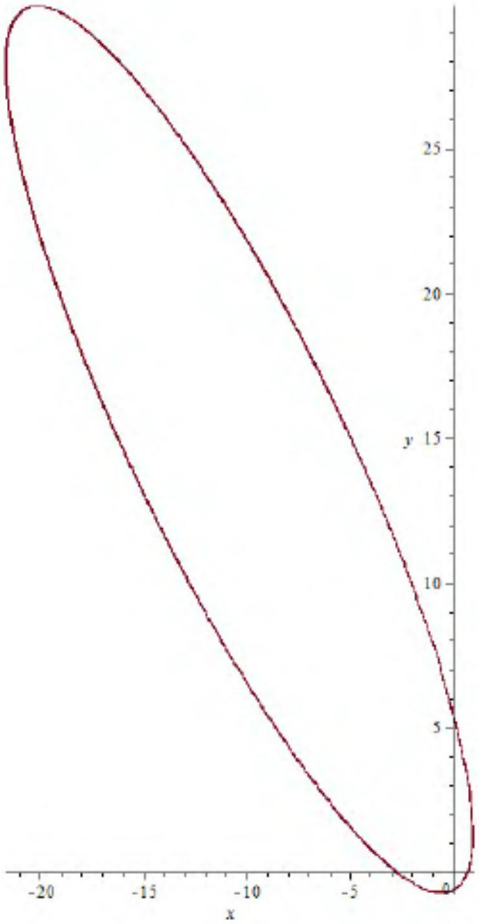

```
> plot(['VX(t)','VY(t)'],t=0..0.4,title="Проекции скорости пла-
неты",legend=[Vx(t),Vy(t)],
color=[blue,red],thickness=3);
> plot(['X(t)','Y(t)',t=0..0.4],title="Траектория движения пла-
неты",color=red,
thickness=3,scaling=constrained);
> N:=576; T:=0.241;
> Lr:=[seq([X(T/N*i),Y(T/N*i)],i=0..N)]:
> with(plots):
> TRAJ:=plot(Lr,style=point):
for i from 0 to N do:
> with(geometry):
> tr[i]:=plots[polygonplot]([[0,0],[X(T/N*i), Y(T/N*i)],
[X(T/N*(i+1)), Y(T/N*(i+1))]],scaling=CONSTRAINED):
TT[i]:=evalf(T/N*i,4):
VV[i]:=evalf(sqrt(VX(T/N*i)^2 +VY(T/N*i)^2),4):
RR[i]:=evalf(sqrt(X(T/N*i)^2 +Y(T/N*i)^2),4):
ARR[i]:=evalf(area(tr[i])+area(tr[i+1]+area(tr[i+2]))):
od:
```





Движение кометы Галлея

В последний раз комета Галлея проходила через свой перигелий (ближайшая к Солнцу точка орбиты) 9 февраля 1986 года
(Само Солнце считается расположенным в начале координат). Координаты и компоненты скорости кометы Галлея в тот момент были равны P0 = (0.325514, - 0.459460, 0.166229) и v0 = (–9.096111, –6.916686, –1.305721) соответственно,
причем расстояние здесь выражено в астрономических единицах длины – а.е.д., или просто а.е.
(астрономическая единица, т. е. длина большой главной полуоси земной орбиты), а время – в годах.




```
> with(plots):
> Neptun:=spacecurve([a_neptun*(1-
e_neptun^2)*cos(theta)/(1-
e_neptun*cos(theta))-c_ne,
 a_neptun*(1-
e_neptun^2)*sin(theta)/(1-
e_neptun*cos(theta)),0], the-
ta=0..2*Pi):
> mu:=-39.4345;
> r:=(x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2)^(3/2);
>my_diff_yravnenie_0:={diff(x(t),t,t)
=mu*x(t)/r,diff(y(t),t,t)=mu*y(t)/r,d
iff(
>z(t),t,t)=mu*z(t)/r,x(0)=0.325514,D(
x)(0)=-9.096111,y(0)=-
> 0.459460,D(y)(0)=-
6.916686,z(0)=0.166229,D(z)(0)=-
1.305721};
>sol:=dsolve(my_diff_yravnenie_0,nume
ric,output=listprocedure):
>
odeplot(sol,[x(t),y(t)],0..84.5,numpo
ints=1525);
>traect:=odeplot(sol,[x(t),y(t),z(t)],0..150,numpoints=1525):
Soln:=pointplot3d({[0, 0, 0]}, axes =normal,color=red);
```

```
>EX:=diff(x(t),t,t)=mu*x(t)/r;EY:=diff(y(t),t,t)=mu*y(t)/r;
> EZ:=diff(z(t),t,t)=mu*z(t)/r;
> display({traect, Soln,Neptun},title=`Рис.3. Траектория движе-
ния кометы Галлея.Солнцне имеет координаты (0,0,0). Приводится
орбита Нептуна.`,titlefont=["ROMAN", 15]);
```

$$\mu := -39.4345$$

$$r := \left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}$$

$$my\_diff\_yravnenie\_0 := \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{39.4345\, x(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}, \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\frac{39.4345\, y(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}, \frac{d^2}{dt^2} z(t) = -\frac{39.4345\, z(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}, x(0) = 0.325514, y(0) = -0.459460, z(0) = 0.166229, D(x)(0) = -9.096111, D(y)(0) = -6.916686, D(z)(0) = -1.305721 \right\}$$

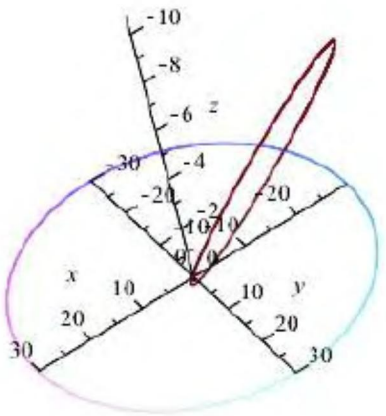
$$Soln := PLOT3D(\ldots)$$

$$EX := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{39.4345\, x(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}$$

$$EY := \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\frac{39.4345\, y(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}$$

$$EZ := \frac{d^2}{dt^2} z(t) = -\frac{39.4345\, z(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}$$

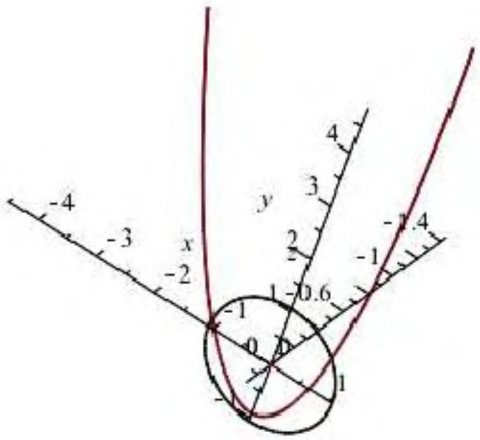
Рис.3. Траектория движения кометы Галлея.Солнцне имеет координаты (0,0,0). Приводится орбита Нептуна.




```
> with(plots):
> Zeml:=spacecurve([a_z*(1-e_z^2)*cos(theta)/(1-e_z*cos(theta))-
c_z,
 a_z*(1-e_z^2)*sin(theta)/(1-e_z*cos(theta)),0], the-
ta=0..2*Pi,color=black):
```

```
> Zem_pl:=plot([a_z*(1-e_z^2)*cos(theta)/(1-e_z*cos(theta))-c_z,
 a_z*(1-e_z^2)*sin(theta)/(1-e_z*cos(theta)),theta=0..2*Pi],
color=black):
>
diff_yravnenie_0:={diff(x(t),t,t)=mu*x(t)/r,diff(y(t),t,t)=mu*y(
t)/r,diff(
> z(t),t,t)=mu*z(t)/r,x(0)=0.325514,D(x)(0)=-9.096111,y(0)=-
> 0.459460,D(y)(0)=-6.916686,z(0)=0.166229,D(z)(0)=-1.305721}:
> cometa:=dsolve(diff_yravnenie_0,numeric,output=listprocedure):
> com1:=odeplot(cometa,[x(t),y(t)],t=0..84.5,numpoints=1525):
> display({com1, Zem_pl},title=`проекция траектории движения ко-
меты Галлея на плоскость орбиты Земли.`,titlefont=["ROMAN",
15]);
> traect:=odeplot(cometa,[x(t),y(t),z(t)],-1..1,numpoints=1525):
Soln:=pointplot3d({[0, 0, 0]}, axes =normal,color=red):
> display({traect, Soln,Zeml},title=`траектория движения кометы
Галлея. Приводится орбита Земли.`,titlefont=["ROMAN", 15]);
```

траектория движения кометы Галлея.
Приводится орбита Земли.



Комета Галлея движется в направлении, противоположном движению планет, и её орбита наклонена к орбите Земли на 180-162,5=17,5°.
В 837 году комета Галлея приблизилась на минимальное за все время наблюдений расстояние к Земле (0,0342 а. е.). Путь и вид кометы детально описан в астрономических главах китайских династических историй «Книга Тан» и «Новая книга Тан». Видимая на небе длина раздвоенного хвоста в максимуме превышала 80°. Комета описана также в японских, арабских и во многих европейских хрониках.
В 2134 году ожидается, что комета Галлея пройдёт на расстоянии 0,09 а. е. (13,6 млн км) от Земли.
Ниже приводятся различные характеристики движения кометы Галлея.

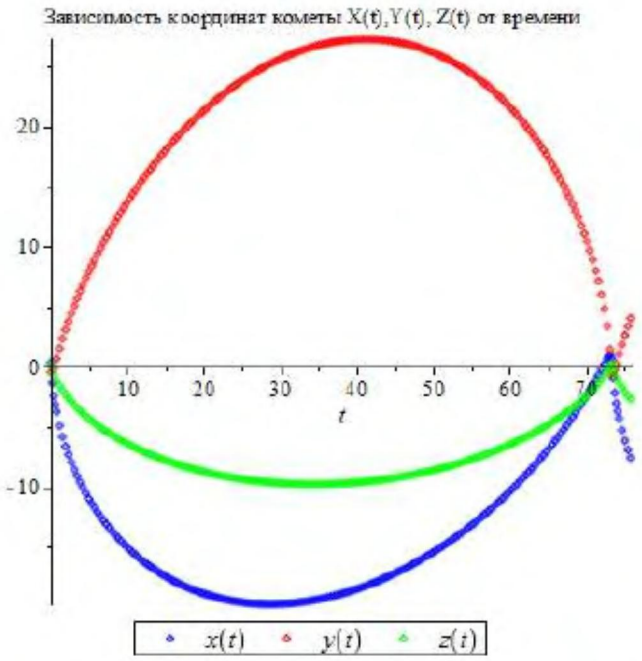
```
> x0:=0.325514: y0:=-0.459460: z0:=0.166229:vx0:=-
9.096111:vz0:=-1.305721 :vy0:=-6.916686:
```
для Кометы Галлея

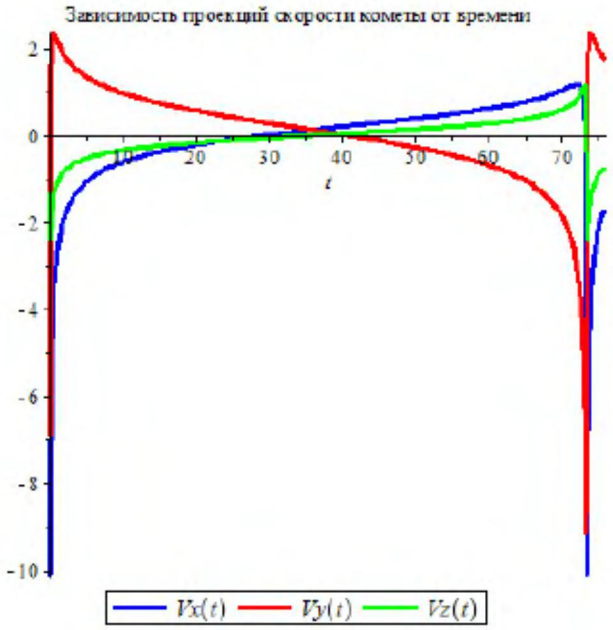
```
>
IC:=x(0)=x0,D(x)(0)=vx0,y(0)=y0,D(y)(0)=vy0,z(0)=z0,D(z)(0)=vz0;
>
sys:=dsolve({EX,EY,EZ,IC},{x(t),y(t),z(t)},numeric,output=listpr
ocedure):
> X:=subs(sys,x(t)): Y:=subs(sys,y(t)):Z:=subs(sys,z(t)):
> VX:=subs(sys,diff(x(t),t)):
VY:=subs(sys,diff(y(t),t)):VZ:=subs(sys,diff(z(t),t)):
>
```

$$IC := x(0) = 0.325514, D(x)(0) = -9.096111, y(0) = -0.459460, D(y)(0) = -6.916686, z(0) = 0.166229, D(z)(0) = -1.305721$$

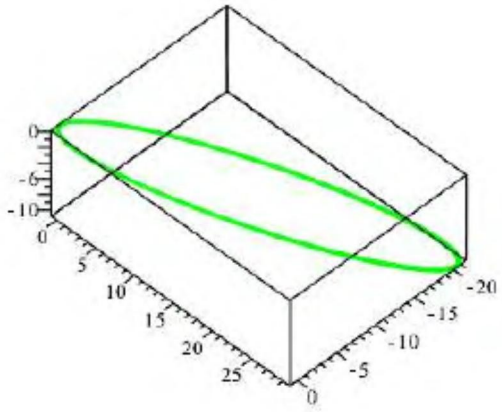
```
> plot(['X(t)','Y(t)','Z(t)'],t=0..75.836717,title="Зависимость
координат кометы X(t),Y(t), Z(t)от времени",
legend=[x(t),y(t),z(t)],
style=point,color=[blue,red,green],thickness=3);
```

```
>
plot(['VX(t)','VY(t)','VZ(t)'],t=0..75.836717,title="Зависимость
проекций скорости кометы от времени",legend=[Vx(t),Vy(t),Vz(t)],
color=[blue,red, green],thickness=3);
> plot(['X(t)','Y(t)',t=0..75.836717],title="Траектория движения
кометы",color=red,
thickness=3,scaling=constrained);
> space-
curve(['X(t)','Y(t)','Z(t)'],t=0..75.836717,numpoints=1525,title
="Фазовая Траектория движения кометы",color=green,
thickness=3,scaling=constrained);
```





Фазовая Траектория движения кометы



Чтобы определить координаты аффелия кометы найдем время соответствующее кратчайщему расстоянию от Солнца до орбиты кометы и максимальному расстоянию

```
> f:=t->sqrt(X(t)^2+Y(t)^2+Z(t)^2);(f(-
0.0000001));(f(0));(f(0.0000001));minimize(f(t),t=-
0.4..1);plot(f(t),t=-
0.5..77);p:=unapply(sqrt(X(t)^2+Y(t)^2+Z(t)^2),t);plot(f(t),t=36
.69905..36.69907);
>  plot(p(t),t=-
0.00000025..0.00000035);f_min:=f(0.0000003);f_max:=f(36.69905);
```

f_min:=f(0.00000035)=0.58710726

;f_max:=f(36.69905)=34.478129

; -есть минимальное и максимальное отдаление кометы от Солнца равные a(1-e) и a(1+e) , где a и e - большая полуось и экцентриситет кометы.

```
> digits:=7;fsolve({a_c*(1-
e_c)=0.58710726,a_c*(1+e_c)=34.478129},{a_c,e_c});
```

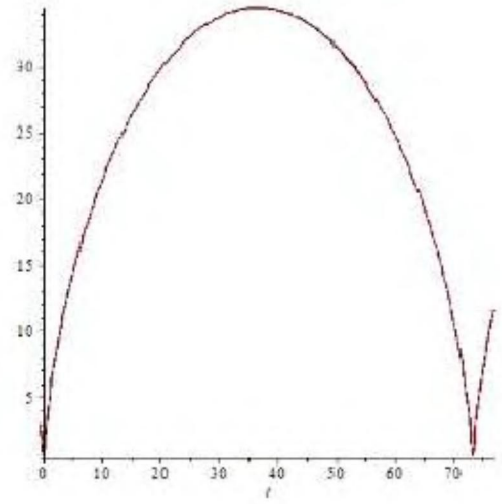
$$f := t \rightarrow \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2 + Z(t)^2}$$

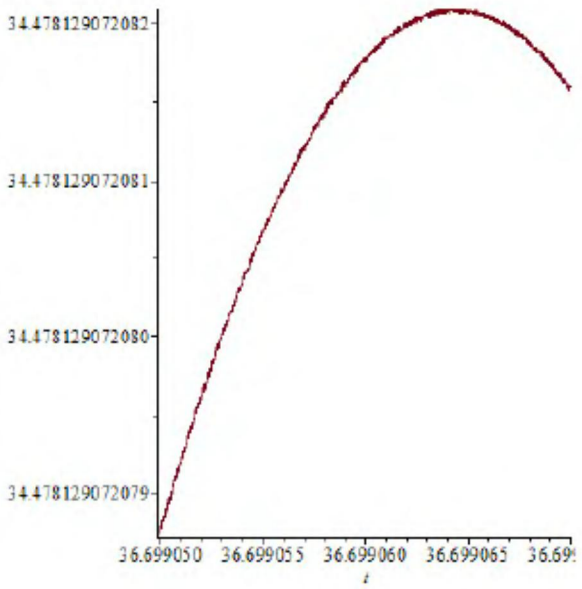
$$0.587107261274782$$

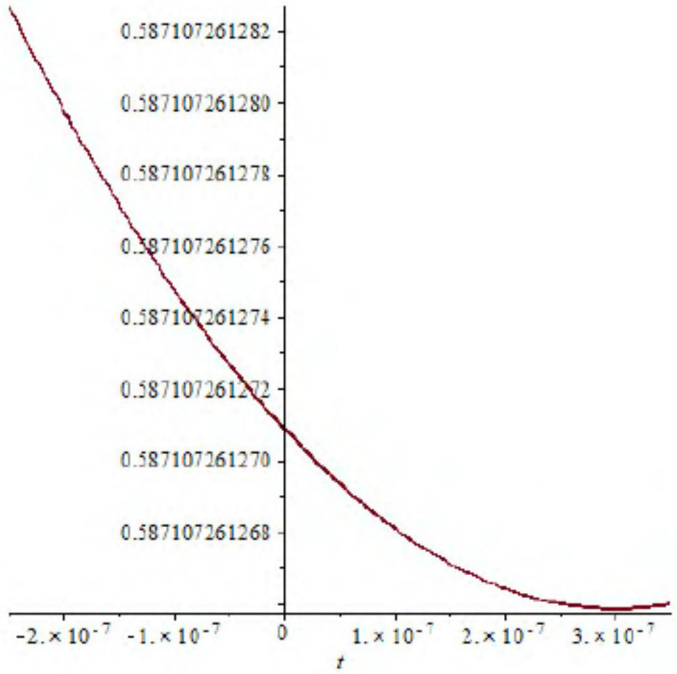
$$0.587107261270886$$

$$0.587107261268097$$

$$minimize\left(\sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2 + Z(t)^2}, t = -0.4..1\right)$$







$f\_min := 0.587107261265842$

$f\_max := 34.4781290720787$

$digits := 7$

$\{a\_c = 17.53261813, e\_c = 0.9665134291\}$

После решения уравнений находим:
$\{a\_c = 17.91665710$ — *большую полуось* , $e\_c = 0.9672312030$ −*экцентриситет кометы*$\}$, а *также найдем период*

```
> Period:=proc(a,epsilon,G_M) local p,h:
> p:=a*abs(epsilon^2-1);h:=sqrt(G_M*p);
> 2*Pi*a^2*sqrt(1-epsilon^2)/h;
> end proc;
> T:=evalf(Period(17.53261813,.9665134291,39.49391));
>
```

```
Period := proc(a, ε, G_M)
    local p, h;
    p := a*abs(ε^2 − 1); h := sqrt(G_M*p); 2*π*a^2*sqrt(1 − ε^2)/h
end proc
```

$$T := 73.39812452$$

П.3. Программа в пакете maple с комментариями: «геодезические в статическом сферически симметричном пространстве-времени. Сравнение ОТО с классической теорией гравитации»

П.3.1. Уравнения геодезической линии в общей теории относительности

В общей теории относительности гравитационное взаимодействие интерпретируется как изменение искривление физического пространство – времени под действием материальных тел или масс. Физическое пространство–времени задается как четырехмерное Риманово многообразие, которое в свою очередь определяется заданием метрических компонент $g_{\mu\nu}, \mu,\nu = 1,..,4$. Одна из координат 4ых мерного пространства –времени рассматривается как временная координата (в нашем случае первая), остальные пространственные координаты. Тогда движение света или пробной частицы (влиянием этого тела на общее гравитационное поле можно пренебречь) происходит по, так называемой геодезической кривой. Если геодезическую кривую определить как $x_\mu = x_\mu(s)$, где s – натуральный параметр кривой, то уравнение кривой запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{\partial x_\nu}{\partial s}\frac{\partial x_\lambda}{\partial s} = 0. \qquad \text{(II.2.1)}$$

Здесь $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{g^{\mu k}}{2}\left(\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{k\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^k}\right)$, так называемые символы Кристоффеля.

Для описания гравитационного поля создаваемого центрально-симметричной точечной массой используются решения уравнений ОТО Эйнштейна, впервые полученные Шварцшильдом в 1916 году (см. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Изд-во: Москва. 1973, стр. 381.) .

В сферической системе координат

$x^1 = t, x^2 = r, x^3 = \theta, x^4 = \phi$,

компоненты метрического тензора для решения Шварцшильда имеют вид:

$$ds^2 = f_0(r)dt^2 - f_1(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),. \qquad \text{(II.2.2)}$$

где $g_{11} = f_0(r) = 1 - \frac{2Gm}{r}, g_{22} = -f_1(r) = -\frac{1}{1 - \frac{2Gm}{r}}, \quad g_{33} = -r^2,$

$g_{44} = -r^2 \sin^2\theta$. Остальные компоненты метрики равны к нулю.

Уравнения (II.2.1) мы упрощали и решали, используя математический пакет «maple». Ниже приводятся формулы из этой программы.

Уравнения свободной пробной частицы в искривленном пространстве-времени имеют вид(II.2..1),где s - параметр траектории.

```
> restart:with(tensor):
```

В качестве искривленного пространства-времени рассмотрим статическое изотропное пространство-время с сферической симметрией.

Такое пространство-время описывается метрическим элементом:

$$ds^2 = f0(r)\, dt^2 - f1(r)\, dr^2 - r^2\, d(\theta)^2 - r^2 \sin(\theta)^2\, d(\phi)^2 \qquad \text{(II.2.3)}$$

$f0(r)$ и $f1(r)$ - функции радиальной координаты r.

```
>coord := [t, r, theta, phi];
```

$$coord := [t, r, \theta, \phi]$$

Метрический тензор статического изотропного пространства-времени, соответствующий метрическому элементу (2) определяется ковариантные компонентами:

```
> g_compts:=array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
```

$$g := table\left(\left[compts = \begin{bmatrix} f0(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f1(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, index\_char = [-1, -1]\right]\right)$$

```
g_compts[1,1]:= f0(r): g_compts[2,2]:= - f1(r):
```

```
g_compts[3,3]:=  -r^2:                g_compts[4,4]:=  -r^2  *
sin(theta)^2:
g:=create([-1,-1], eval(g_compts));
```

Контравариантные компоненты метрического тензора, ненулевые значения символов Кристоффеля вычисляются средствами MAPLE:

```
> ginv:=invert(g,'detg'):
d1g:= d1metric( g, coord ):
d2g:= d2metric( d1g, coord ):
Cf1:= Christoffel1( d1g ):
Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 );
> ginv:=invert(g,'detg'):
d1g:= d1metric( g, coord ):
d2g:= d2metric( d1g, coord ):
Cf1:= Christoffel1( d1g ):
Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 );
#displayGR(Christoffel2, Cf2):
```

$$Cf2 := table\left(\left[index\_char = [1, -1, -1], compts = ARRAY\left(cf2, [1..4, 1..4, 1..4], \left[(1,1,1) = 0, (1,1,2) = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dr}f0(r)}{f0(r)}, (1,1,3) = 0, (1,1,4) = 0, (1,2,1) = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dr}f0(r)}{f0(r)}, (1,2,2) = 0, (1,2,3) = 0, (1,2,4) = 0, (1,3,1) = 0, (1,3,2) = 0, (1,3,3) = 0, (1,3,4) = 0, (1,4,1) = 0, (1,4,2) = 0, (1,4,3) = 0, (1,4,4) = 0, (2,1,1) = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dr}f0(r)}{f1(r)}, (2,1,2) = 0, (2,1,3) = 0, (2,1,4) = 0, (2,2,1) = 0, (2,2,2) = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dr}f1(r)}{f1(r)}, (2,2,3) = 0, (2,2,4) = 0, (2,3,1) = 0, (2,3,2) = 0, (2,3,3) = -\frac{r}{f1(r)}, (2,3,4) = 0, (2,4,1) = 0, (2,4,2) = 0, (2,4,3) = 0, (2,4,4) = -\frac{r\sin(\theta)^2}{f1(r)}, (3,1,1) = 0, (3,1,2) = 0, (3,1,3) = 0, (3,1,4) = 0, (3,2,1) = 0, (3,2,2) = 0, (3,2,3) = \frac{1}{r}, (3,2,4) = 0, (3,3,1) = 0, (3,3,2) = \frac{1}{r}, (3,3,3) = 0, (3,3,4) = 0, (3,4,1) = 0, (3,4,2) = 0, (3,4,3) = 0, (3,4,4) = -\sin(\theta)\cos(\theta), (4,1,1) = 0, (4,1,2) = 0, (4,1,3) = 0, (4,1,4) = 0, (4,2,1) = 0, (4,2,2) = 0, (4,2,3) = 0, (4,2,4) = \frac{1}{r}, (4,3,1) = 0, (4,3,2) = 0, (4,3,3) = 0, (4,3,4) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4,4,1) = 0, (4,4,2) = \frac{1}{r}, (4,4,3) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4,4,4) = 0\right]\right)\right]\right)$$

П.3.2. Уравнения геодезических

Уравнения движения свободной пробной частицы в искривленном пространстве-времени представляют собой уравнения Эйлера-Лагранжа, которые средствами MAPLE можно записать в явном виде:

```
> eqns0:= geodesic_eqns(coord,s,Cf2);
```

$$\frac{d^2}{ds^2}t(s) + \frac{\left(\frac{d}{dr}f0(r)\right)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)}{f0(r)} = 0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\phi(s)+\frac{2\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)}{r}+\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{ds}\theta(s)\right)\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)}{\sin(\theta)}=0,\ \frac{d^2}{ds^2}\theta(s)$$
$$+\frac{2\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)\left(\frac{d}{ds}\theta(s)\right)}{r}-\sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\theta(s)+\frac{2\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)\left(\frac{d}{ds}\theta(s)\right)}{r}-\sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2=0,\ \frac{d^2}{ds^2}r(s)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f0(r)\right)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)^2}{f1(r)}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f1(r)\right)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)^2}{f1(r)}-\frac{r\left(\frac{d}{ds}\theta(s)\right)^2}{f1(r)}$$
$$-\frac{r\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2}{f1(r)}=0$$

Поскольку поле тяготения сферически симметрично (что соответствует центральности гравитационного взаимодействия в данном случае), орбиты частиц будут представлять собой плоские кривые. В виду изотропности пространства-времени можно рассматривать движение в любой плоскости.

Выберем в качестве плоскости движения "экваториальную" плоскость, определяемую значением координаты:

```
> eqns1:=eval(subs({theta=Pi/2,theta(s)=Pi/2},eqns0));
```

$$0=0,\ \frac{d^2}{ds^2}\phi(s)+\frac{2\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)}{r}=0,$$
$$\frac{d^2}{ds^2}t(s)+\frac{\left(\frac{d}{dr}f0(r)\right)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)}{f0(r)}=0, \qquad \text{(II.2.4)}$$
$$\frac{d^2}{ds^2}r(s)+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f0(r)\right)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)^2}{f1(r)}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f1(r)\right)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)^2}{f1(r)}-\frac{r\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2}{f1(r)}=0$$

Интегралы движения

Уравнение на функцию $\phi(s)$ можно проинтегрировать:

```
>eq2:=expand(subs([r=r(s),r(s)=r(s)],eqns1[2]/diff(phi(s),s)));
I_1:=int(lhs(eq2),s);
```

$$eq2 := \frac{\frac{d^2}{ds^2}\phi(s)}{\frac{d}{ds}\phi(s)} + \frac{2\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)}{r(s)} = 0$$

(II.2.5),

$$I\_1 := \ln\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right) + 2\ln(r(s))$$

>SS1:=diff(phi(s),s)= solve(I_1=ln(L),diff(phi(s),s));

$$SS1 := \frac{d}{ds}\phi(s) = \frac{L}{r(s)^2}$$

Подставим это выражение в уравнение для координаты r

```
> eqns1[4];eq4:=subs(SS1,eqns1[4]);
```

$$\frac{d^2}{ds^2}r(s) + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f0(r)\right)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)^2}{f1(r)} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f1(r)\right)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)^2}{f1(r)} - \frac{r\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2}{f1(r)} = 0$$

$$eq4 := \frac{d^2}{ds^2}r(s) + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f0(r)\right)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)^2}{f1(r)} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d}{dr}f1(r)\right)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)^2}{f1(r)} - \frac{rL^2}{f1(r)\,r(s)^4} = 0$$

Учтем нормировку вектора скорости

```
>Nor:=f0(r)*diff(t(s),s)^2-f1(r)*diff(r(s),s)^2-
r(s)^2*diff(phi(s),s)^2-1=0;Diff(phi(s),s)=L/r(s)^2;
Nor2:=expand(subs(SS1,Nor));
```

$$Nor := f0(r)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)^2 - f1(r)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)^2 - r(s)^2\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{d}{ds}\phi(s) = \frac{L}{r(s)^2}$$

$$Nor2 := f0(r)\left(\frac{d}{ds}t(s)\right)^2 - f1(r)\left(\frac{d}{ds}r(s)\right)^2 - \frac{L^2}{r(s)^2} - 1 = 0$$

Отсюда

```
> SS2:=(diff(t(s), s))^2=solve(Nor2,(diff(t(s), s))^2);
```

$$SS2 := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, t(s)\right)^2 = \frac{f1(r)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, r(s)\right)^2 r(s)^2 + L^2 + r(s)^2}{f0(r)\, r(s)^2}$$

```
>eq5:=collect(expand(subs(SS2,eq4)),[diff(r(s), s),L,r(s)]);
```

$$q5 := \left(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f0(r)}{f0(r)} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f1(r)}{f1(r)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, r(s)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f0(r)}{f1(r)\, f0(r)\, r(s)^2} - \frac{r}{f1(r)\, r(s)^4}\right) L^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\, r(s) + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f0(r)}{f1(r)\, f0(r)} = 0$$

П.3.3.Уравнения для метрики Щварцщильда

Таким образом, получили уравнения, описывающие геодезические кривые для случая произвольных функций $f_0(r), f_1(r)$. Подставляем значения этих функций для случая Шварцшильда:

```
>f0(r):=1-2*Gm/r:f1(r):=1/(1-2*Gm/r):
>sys1:=expand(simplify(subs([r(s)=r(s),r=r(s)],[SS1,eq5])));
```

$$sys1 := \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\phi(s) = \frac{L}{r(s)^2},\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\, r(s) + \frac{3L^2\, Gm}{r(s)^4} + \frac{Gm}{r(s)^2} - \frac{L^2}{r(s)^3} = 0\right] \qquad \text{(II.2.6)}$$

,

>sys2:=sys1[1],diff(r(s), s) = R(s),subs(diff(r(s), s) = R(s), sys1[2]);

$$sys2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\phi(s) = \frac{L}{r(s)^2},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, r(s) = R(s),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, R(s) + \frac{3L^2\, Gm}{r(s)^4} + \frac{Gm}{r(s)^2} - \frac{L^2}{r(s)^3} = 0 \qquad \text{(II.2.7)}$$

Сравним уравнения, описывающие Ньютоновскую гравитацию (II.8)

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0;\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2},\ h = \mathrm{const},$$

с уравнениями (II.2.6), описывающими движение пробной частицы в ОТО. Если приравнять ϕ и φ, t и s а также постоянные L и h, то уравнения будут отличаться лишь членом $\frac{3L^2 Gm}{r^4}$. Без этого члена планеты двигаются по эллиптическим орбитам и величина $h = \sqrt{Gm\,a(1-e^2)}$.

Рассмотрим графики движения небесных тел, с учетом параметров солнечной системы. Масса Солнца: $M_{солн} = 1.9892 \cdot 10^{33} гр$;

гравитационная постоянная в сантиметрах деленная в граммы: k_gr_v_cm:=(simplify(G_grav/v_sveta^2))

$$k\_gr\_v\_cm := \frac{7.426144692\,10^{-29}\,cm}{г};$$

масса Солнца умноженное на гравитационную постоянную позволяет вычислять массу в сантиметрах: M_сол_cm:=M_солнца*k_gr_v_cm. $M\_сол\_cm := 1.477208702\,10^{5}\,cm$

$$M\_сол\_km := 1.477208702\,km$$

$$G\_grav := \frac{6.674286000\,10^{-8}\,cm^{3}}{c^{2}\,г}$$

$$M\_солнца := 1.989200000\,10^{33}\,г$$

$$M\_сол\_cm := 1.477208702\,10^{5}\,cm$$

$$R\_солнц := 14959787070000\,cm$$

$$R\_ot\_soln := 9.874530266\,10^{-9}$$

$$R\_crit := 2.954417404\,km$$

Вычислим величину h для Меркурия. Для этой планеты известно, что большая полуось (a.e) и эксцентриситет равны $a = 0.37822$, e=0.20564.

Для нахождения $h \approx L$ воспользуемся формулой $h = \sqrt{Gma(1-e^2)}$ / Величины будем вычислять в астрономических единицах.

Астрономическая единица по определению равна 149 597 870 700 метрам.

astr_cm := 14959787070000*cm; в*граммах+M_галак

```
>cm_1:=evalf(1/(14959787070000))*as/cm;M_сол_as:=M_сол_cm*cm
    _1;as_ed_sol:=(1/(9.874530266*10^(-9)))*m_s/as;
```

cm_1:=evalf(1/(14959787070000))*as/cm;M_сол_as:=M_сол_cm*cm_1;as_ed_sol:=(1/(9.874530266*10^(-9)))*m_s/as;

$$astr\_cm := 14959787070000\ cm$$

$$в\ граммах + M\_галак$$

$$cm\_1 := \frac{6.684587122\ 10^{-14}\ as}{cm}$$

$$M\_сол\_as := 9.874530266\ 10^{-9}\ as$$

$$as\_ed\_sol := \frac{1.012706400\ 10^{8}\ m\_s}{as}$$

Без поправок Общей теории относительности планеты двигаются по эллиптическим орбитам. Вычислим параметр L для меркурия. Большая полуось которого a=0.37822, эксцентриситет exs = 0.20564.

```
>G_m:=M_сол_as/as;a_p:=0.37822235;                    exs:=0.20564
;L_pl:=evalf(sqrt(G_m*a_p*(1-exs^2)))*as;
L_pl_ms:=as_ed_sol*L_pl;r_mer:=0.456*as_ed_sol*as;
r_mer_os:=a_p*as_ed_sol*as;god:=365.2564*24*60*60*c;god_cm:=v_sveta*god;
god_as:=cm_1*god_cm;as_god:=godi/god_as;
```

$$G\_m := 9.874530266\ 10^{-9}$$

$$a\_p := 0.37822235$$

$$exs := 0.20564$$

$$L\_pl := 0.00005980662908\ as$$

$$L\_pl\_ms := 6056.655603\ m\_s$$

$$r\_mer := 4.617941184\ 10^{7}\ m\_s$$

$$r\_mer\_os := 3.830281945\ 10^{7}\ m\_s$$

$$god := 3.155815296\ 10^{7}\ c$$

$$god\_cm := 9.460896246\ 10^{17}\ cm$$

$$god\_as := 63242.18521\ as$$

$$as\_god := \frac{0.00001581223034\ godi}{as}$$

Приведем результаты вычислений для Меркурия.

```
> Gm:=G_m;
r0:=0.456;r_mer_os/m_s;
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=evalf(L_pl/as);
R0:=0.:
smax:=15719.8:
```

$$Gm := 9.874530266\ 10^{-9}$$

$$r0 := 0.456$$

$$3.830281945\ 10^{7}$$

$$L0 := 0.00006710280242$$

$$L := 0.00005980662908$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=-smax..smax,color=red,numpoints=500, axes=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1,linestyle=dash):
    odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=blue,numpoints=5000, axes=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=2,frames=200);
    odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..40*smax,color=red,numpoints=500, axes=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1,linestyle=dash);
```

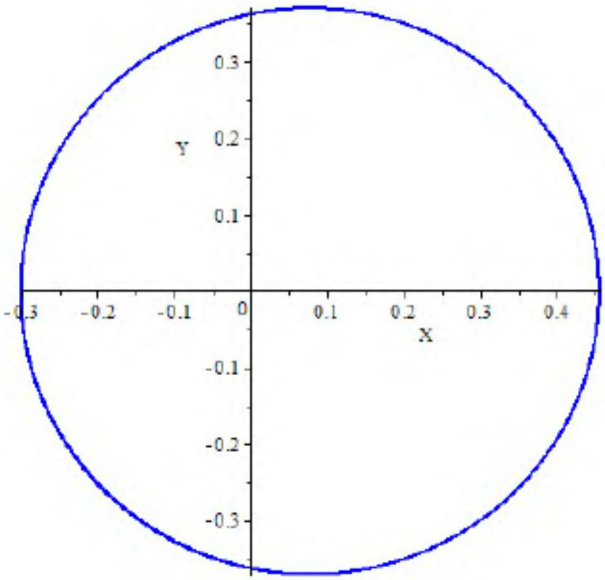


Рисунок 1 График орбиты Меркурия за один период

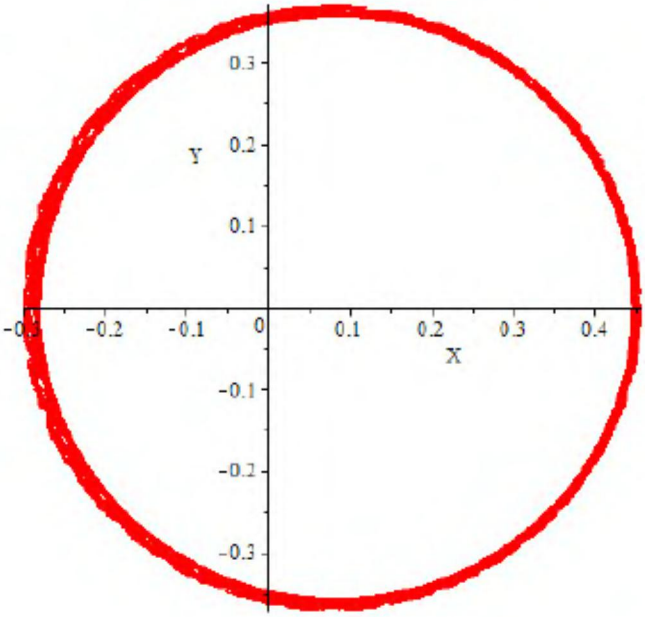


Рисунок 2. График орбиты Меркурия за 40 периодов

Приведены графики орбиты Меркурия за один и за 40 периодов. Отклонение от эллиптической траектории небольшое, однако смещение перигелия Меркурия можно заметить. Такое смещение от графика эллипса более заметно около точки перигелия потому что эффекты ОТО связаны с членом $\frac{3L^2Gm}{r^4}$. То есть влияние этого члена сильнее на малых расстояниях. В наших вычислениях величина r_0, соответствующее начальному значению радиуса

при $\phi = 0$ задает афелийное расстояние планеты, .и в ньютоновском приближении соответствует величине $a(1+e)$. Таким образом имеем два соотношения: $L \approx \sqrt{Gm\,a(1-e^2)}, r_0 \approx a(1+e)$, используя которые можем вычислить эксцентриситет $e = 1 - \frac{L^2}{Gm\,r_0}$. Движение по окружности с учетом ОТО происходит при $L = L_0 \equiv \sqrt{\frac{Gm\,r_0^2}{r_0 - 3\,Gm}}$ В ньютоновском приближении эллипс переходит в окружность при $e = 0 \Rightarrow L = \sqrt{Gm\,r_0}$. Из этих рассуждений получаем вывод, что ньютоновское приближение хорошо описывает движение небесных тел если выполняется неравенство $r_0 >> 3\,Gm$.

Приведем графики траектории соответствующей движению кометы Галлея. Афелийное расстояние у кометы 35.082302, эксцентриситет e_c = .9671429. Вычисляем параметр $L \approx \sqrt{Gm\,a(1-e^2)} = 0.0001066883204$.

. Период кометы вычисленная по формулам Коперника: $T_{kom} = 4.762115266 \cdot 10^6 \cdot as.ed \approx$ 75.3 земных лет.

Рисунок 3. Траектория движения кометы Галлея за 45 периодов

Подставляя эти параметры в предыдущие формулы получаем графики траектории движения кометы Галлея. На рисунке 6 приводится график движения за 45 периодов. Солнце расположено в начале координат. Из рисунка можно заметить уплотнение линий около точек перигелий. Этот факт характеризует эффект ОТО, который для Меркурия был назван «смещением перигелия Меркурия».

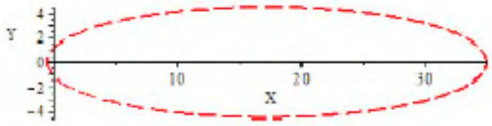


Рисунок 4. Траектория движения кометы Галлея за 1 период

Кстати, из рисунка можно заметить возможность падения кометы на Солнце, приблизительно в течении сотни периодов ее вращения. На рисунке 7 приводится траектория кометы за период.

Аномальное смещение перигелия Меркурия — обнаруженная в 1859 году особенность движения планеты Меркурий, сыгравшая исключительную роль в истории физики[1]. Это смещение оказалось первым движением небесного тела, которое не подчинялось ньютоновскому закону всемирного тяготения[комм. 1][1]. Физики были поставлены перед необходимостью искать пути модифицировать или обобщить теорию тяготения. Поиски увенчались успехом в 1915 году, когда Альберт Эйнштейн разработал общую теорию относительности (ОТО); из уравнений ОТО вытекало именно такое значение смещения, которое фактически наблюдалось. Позже были измерены аналогичные смещения орбит нескольких других небесных тел, значения которых также совпали с предсказанными ОТО.

П.3.4. Эффекты общей теории относительности

Используя предыдущие формулы и программу в пакете «maple» рассмотрим траектории пробных тел, когда значение полярной координаты $r(s)$ может быть близка к значению Gm.

Как следует из полученных уравнений (II.2.7), при $r(s) < 3Gm$ круговых орбит нет. Обозначим через r0 значение $r0 = r(0)$.

Примеры $L > L0$

Пример 1.1.

```
> Gm:=1/2:
r0:=100.:
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=L0+2;
R0:=0:
smax:=200000:
```

$$L0 := 7.124704999$$

$$L := 9.124704999$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
with(plots):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=red,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1):
P3:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=blue,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=3,frame
s=200):
> plots[display](P1,P2,P3);
```

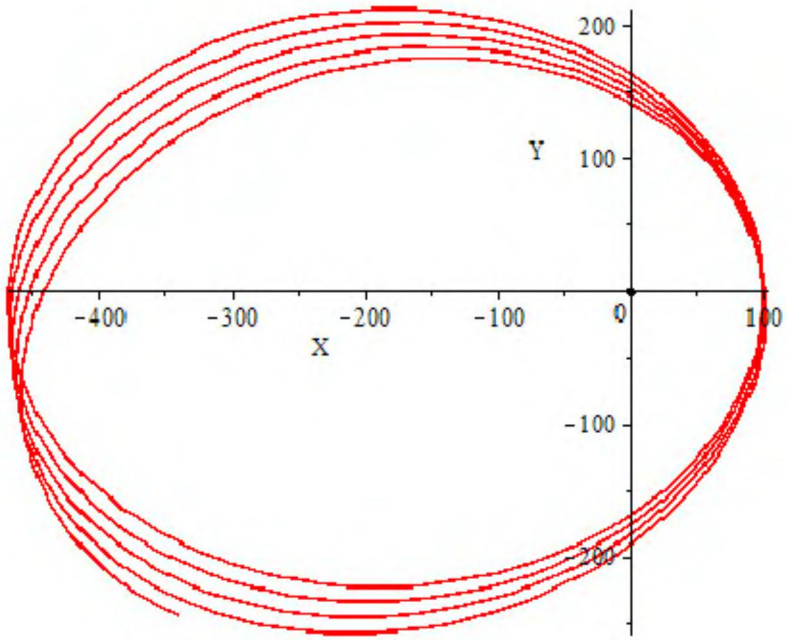


Рисунок 5

На этом примере смещение перигелия заметно сильнее. Траектория не является эллипсом.

Пример 1.2. Пример незамкнутой траектории.

```
> Gm:=1/2:
r0:=5.:
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=L0+1;
R0:=0:
smax:=200:
```

$$L0 := 1.889822365$$

$$L := 2.889822365$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))], s=-
smax..smax,color=red,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1,lines
tyle=dash):
P3:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))], s=-
smax..smax,color=blue,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=5,frame
s=200):
> plots[display](P1,P2,P3);
```

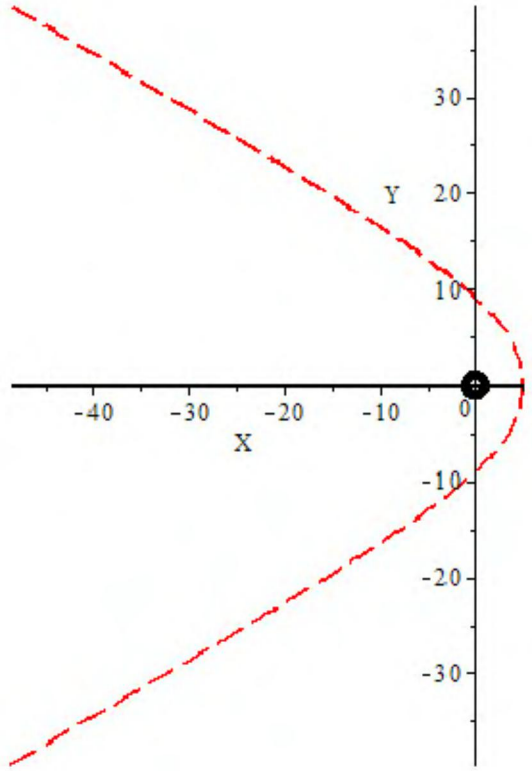


Рисунок 6

На этом изображена незамкнутая траектория движения. Траектория является приблизительно «гиперболической».

Пример 1.3. На этом примере рассмотрим случай когда начальная скорость направленная к центру не равна нулю.

```
> Gm:=1/2:
r0:=5.:
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=L0+1;
R0:=-0.2:
smax:=24.8:
```

$$L0 := 1.889822365$$

$$L := 2.889822365$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..2.5*smax,color=red,numpoints=900, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1,lines
tyle=dash):
P3:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=blue,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=5,frame
s=100):
> plots[display](P1,P2,P3);
```

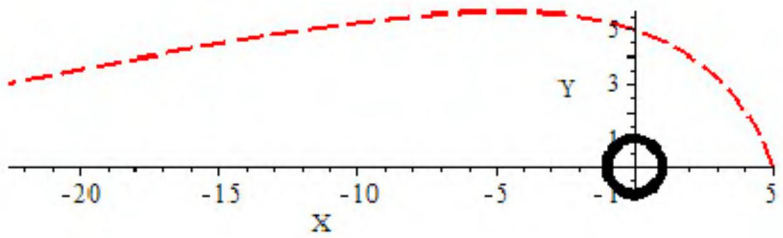


Рисунок 7. Начальная скорость направлена к центру. Траектория искривляется к центру.

Пример 1.4. Явное отличие траектории от эллиптической вблизи центральной массы.

```
> Gm:=1/2:
r0:=5.:
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=L0+0.1;
R0:=0:
smax:=400:
```

$$L0 := 1.889822365$$

$$L := 1.989822365$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))], s=-
smax..smax,color=red,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1,lines
tyle=dash):
#P3:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))], s=-
smax..smax,color=blue,#numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=5,#fram
es=200):
> plots[display](P1,P2);
```

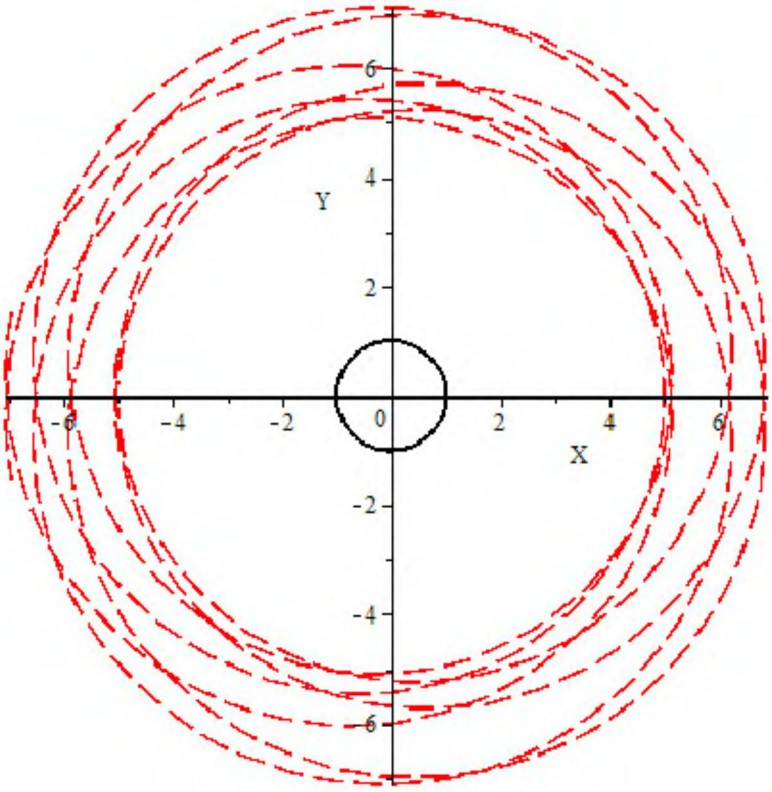


Рисунок 8

Пример 2. $L = L0$. Круговая траектория.

```
> Gm:=1/2:

r0:=5.:
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=L0;
R0:=0:
smax:=90:
```

$$L0 := 1.889822365$$

$$L := 1.889822365$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=red,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1,lines
tyle=dot):
P3:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=blue,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=5,frame
s=200):
> plots[display](P1,P2,P3);
```

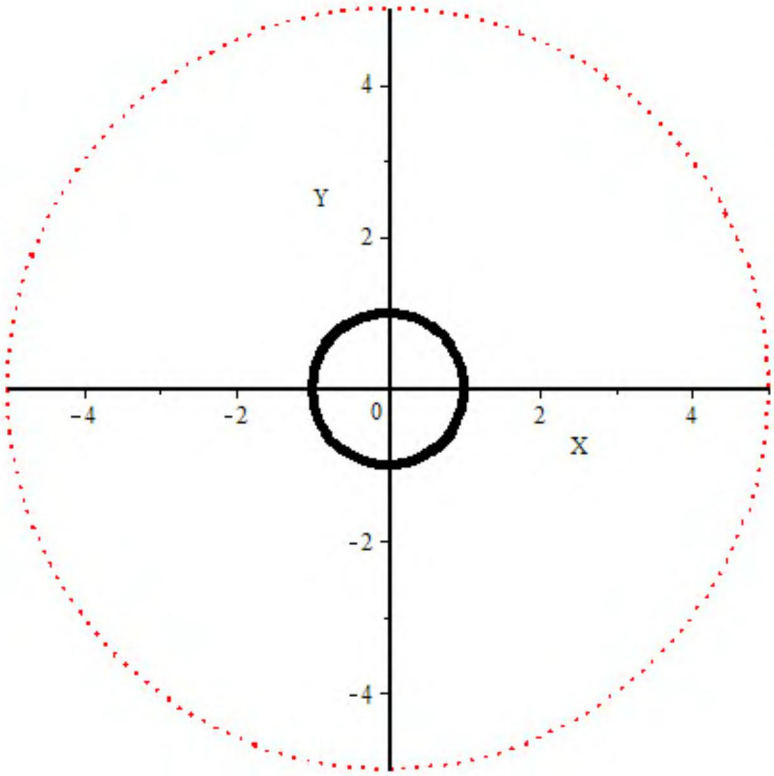


Рисунок 9. Траектория является круговой. Если параметр $L = L_0$ задан, то существует единственная такая орбита.

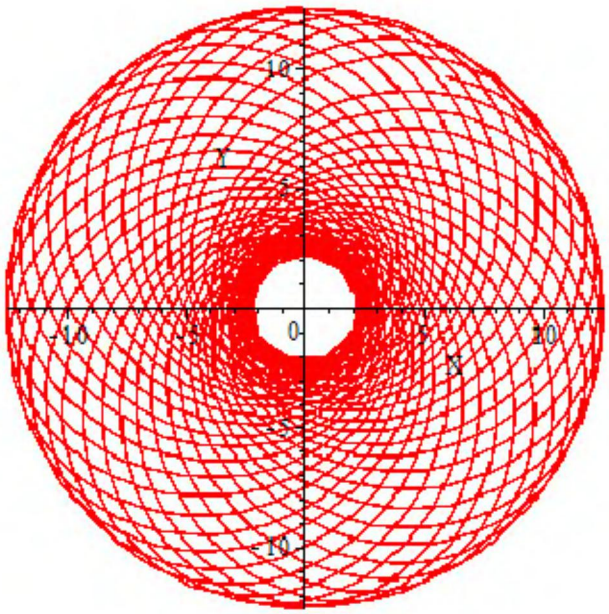
Пример3. Экзотические траектории.

```
> Gm:=1/2:
r0:=2.7:
L0:= sqrt(Gm*r0^2/(-3.*Gm+r0));
L:=1.9;
R0:=0:
smax:=8000:
```

$$L0 := 1.742842506$$

$$L := 1.9$$

```
> ics := r(0)=r0, phi(0)=0, R(0)=R0:
Sol:=dsolve([sys2, ics],numeric,output=listprocedure):
with(plots):
P1:=plot([2*Gm*cos(ph),2*Gm*sin(ph),ph=0..2*3.14],color=black):
P2;odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=red,numpoints=1500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=1);
P3:=odeplot(Sol,[r(s)*cos(phi(s)),r(s)*sin(phi(s))],
s=0..smax,color=blue,numpoints=500, ax-
es=NORMAL,labels=["X","Y"],scaling=CONSTRAINED,thickness=3,frame
s=100):
```



Литература:

8. M.A.Tchoshanov. Didactics and Engineering. – M .: Bean. Knowledge Laboratory, 2011. - 248 p.
9. F.Sh. Zaripov, L.L. Salekhova. Mathematical modeling and teaching as the basis for the training of teachers double profile (mathematics and computer science. KFU, 2012. 47str. The electronic version:http: //libweb.ksu.ru/ebooks/publicat/05_A5m-000001.pdf.
10. Ruthven, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. Handbook of international research in mathematics education/ Editor Lyn D. English. – London: LEA, Pp. 581-598.
11. Graaff E., Kolmos A. Characteristics of Problem-Based Learning. //Int .J. Engng Ed. - Vol. 19, - #5. - 2003. – P. 657–662.
12. Farchat Sh. Zaripov. Teachers of Mathematics-computer Science Based on Mathematical and Didactic Modeling Methods, as Well as Interdisciplinary Relations/ Volume XII, Pages 208-215 (July 2016). The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS e-ISSN: 2357-1330. IFTE 2016 - EpSBS Volume: http://dx.doi.org/10.15405/epsbs(2357-1330).2016.7 ?2016 Published by the Future Academy.
13. Ф.Ш. Зарипов, А.А. Попов. Индивидуальные задания по математическому пакету «maple» для магистрантов заочников.2016.
14. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ. – 2011. -208с.

15. СалеховаЛ.Л, Зарипов Ф.Ш. " Математическое и дидактическое моделирование как основа подготовки учителей двойного профиля (математика и информатика)". Издаво КФУ, 2012. 47стр.. Электронный вариант http://libweb.ksu.ru/ebooks/publicat/05_A5m-000001.pdf.
16. Грачев А.В., Погожев В.А., Селиверстов А.В. Физика: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2007. – 288 с.
17. Левитан Е.П., Румянцев А.Ю. Дидактика астрономии: от XX к XXI веку // http://xreferat.ru/54/912-1-didaktika-astronomii-ot-hh-k-hhi-veku.html.
18. Перышкин А.В. Физика. 8 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2003. – 192 с.
19. Алгебра: учеб. для 9 учащихся 9 кл. с углубл. изучением математики / [Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев]; под ред. Н.Я. Виленкина. – 7 изд. – М.: Просвещение, ОАО «Московские учебники», 2006. – 367 с.
20. А. Г. Коробейников. Разработка и анализ математических моделей с использованием MATLAB и MAPLE. Учебное пособие. Санкт-Петербург. 2010г. 145с.
21. Н. А. Беляев, К. И. Чурюмов. Комета Галлея и ее наблюдение. Москва, 1985 г., с. 56.
22. Ослан Асман. Квалификационная работа. Движение небесных тел. 2014г. http://kpfu.ru/portal/docs/F870678906/Osman.pdf#2.
23. Еремеев Д.В. «Математическое моделирование движения небесных тел, как пример реализации междисциплинарных связей математики, астрономии и информатики» . (http://kpfu.ru/portal/docs/F1800842365/Eremeev.pdf)

17. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GEOGEBRA: Методическое пособие / Ширикова Т. С. - Архангельск – 2014.

Автор-разработчик: доцент кафедры
ВМиММ ИМиМ, заведующий отделением
педагогического образования ИМиМ Зарипов Ф.Ш.