ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 517.972

А.Г. ЧЕНЦОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЗАДАЧЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДОСТИЖИМОСТИ

1. Введение

Предметом исследования в данной работе является задача, связанная с выбором решения при наличии ограничений весьма общей природы. Каждое решение характеризуется элементом некоторого заданного множества; этот элемент именуем оценкой. Прототипом рассматриваемой далее абстрактной задачи является хорошо известная в теории управления задача о построении и исследовании области достижимости. Нередко при ослаблении системы ограничений возникает скачкообразное изменение этой области в сторону ее расширения (как множества), причем, для "малых" возмущений точки новой (более широкой) области достижимости, с практической точки зрения, вполне приемлемы в смысле характеризации возможностей управляющей стороны. Конкретное указание степени вышеупомянутой малости нередко является затруднительным, что, впрочем, удается "обойти", прибегая к использованию приближенных (а по сути — асимптотических) решений в духе Дж. Варги ([1], гл. III, IV). Для определения реальных возможностей в части достижимости терминальных состояний можно, следуя [1], использовать так называемые обобщенные управления.

Упомянутые обобщенные управления применялись при решении игровых задач динамики в работах Н.Н. Красовского и его учеников [2], [3]. В частности, использование обобщенных элементов существенно в определении свойства стабильности [2] множеств, предложенного Н.Н. Красовским. Это важное свойство в сочетании с методом экстремального сдвига позволило Н.Н. Красовскому и А.И. Субботину установить фундаментальную теорему об альтернативе в нелинейной дифференциальной игре. Здесь обобщенные управления (скользящие режимы) также адекватным образом характеризуют надлежащую асимптотику обычных управлений.

В упомянутых (и в целом ряде других) случаях переход от точного к приближенному соблюдению традиционных ограничений определяет достижение некоторого нового качества, представляющего не только теоретический, но и практический интерес. В то же время использование в виде вариантов асимптотического поведения только последовательностей обычных решений может иногда оказаться ограничительным (этого не происходит в типичных задачах управления с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л.С. Понтрягиным). Это, в частности, можно отнести к постановкам, связанным с построением бесконечномерных аналогов областей достижимости в топологических пространствах; так, например, можно говорить о построении асимптотической версии пучка траекторий при оснащении соответствующего пространства функций топологией поточечной сходимости.

В этой связи будем допускать использование в качестве "асимптотических" решений не только последовательностей, но также направленностей и (что оказывается даже более удобным) фильтров пространства обычных решений. Полезно иметь в виду, что и в некоторых случаях, когда секвенциальные версии решения в духе Дж. Варги достаточны для построения всех элементов притяжения, использование фильтров и направленностей может оказаться полезным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00415, 04-01-96093) и Министерства образования России (Е02-1.0-232).

Дело в том, что при построении нужной последовательности (обычных решений) может возникать ситуация, когда данную последовательность приходится "извлекать", используя счетную аксиому выбора, в то время как решение-направленность можно построить конструктивно, привлекая сходимость по Мору–Смиту для реализации в виде предела подходящего обобщенного элемента.

Что же касается ослабления традиционных ограничений, то их сразу "подменяем" ограничениями асимптотического характера, которые в прикладных задачах как раз и реализуются при вышеупомянутом ослаблении стандартных ограничений. Такой более широкий взгляд позволяет охватить единой схемой и некоторые другие задачи. В частности, можно рассматривать представление множества предельных точек направленности в топологическом пространстве в виде надлежащей модификации множества притяжения.

Следуем содержательной постановке ([4], § 1). Фиксируем непустые множества E и $\mathbf{H}$, а также оператор $\mathbf{h} : E \to \mathbf{H}$; E — пространство решений, $\mathbf{H}$ — пространство оценок, $\mathbf{h}$ — целевое отображение. Ограничения асимптотического характера определяем в виде непустых семейств подмножеств E; условия соблюдения этих ограничений в классе направленностей соответствуют ([4], § 1): направленность (e_α) в множестве E $\mathcal{E}$-допустима, где $\mathcal{E}$ — непустое семейство подмножеств E, если $e_\alpha \in U$ с некоторого момента для всякого $U \in \mathcal{E}$. Итогом такого выбора (e_α) является направленность $(\mathbf{h}(e_\alpha))$ в $\mathbf{H}$. При оснащении $\mathbf{H}$ топологией некоторые из таких направленностей $(\mathbf{h}(e_\alpha))$ обладают пределами, именуемыми элементами притяжения (см. [4]–[7]). Последние не исчерпывают, вообще говоря, возможные асимптотические эффекты; без оснащения $\mathbf{H}$ топологией упомянутый подход неприменим в принципе. В этой связи предлагается заменить существенную "часть" $\mathbf{H}$ стоун–чеховским компактом, в котором уже, как показано ниже, асимптотические эффекты исходной задачи можно свести к элементам притяжения, а саму эту задачу — к задаче о построении множества притяжения. Целевой оператор $\mathbf{h}$ заменяется при этом своей обобщенной версией, реализуемой в виде суперпозиции с оператором погружения, сопоставляющим оценке ее тривиальный ультрафильтр ([8], гл. I). Построение элементов притяжения предполагает использование свободных ультрафильтров [9], [10]. Реализуемое при этом множество притяжения и его наиболее интересные фрагменты оказываются компактами. Для построения данного множества можно применить (стоун-чеховский) компактификатор, действуя в духе [5], [7], [11], [12] и используя ультрафильтры пространства решений (точки E отождествляются с тривиальными ультрафильтрами). Существенным элементом компактификатора является непрерывное отображение нульмерного компакта, связанного с E, на нульмерный компакт, соответствующий фрагменту $\mathbf{H}$. Для построения этого отображения используется вариант оператора ([9], с. 213), именуемый оператором Чеха.

Заметим, что вышеупомянутые компакты обозначаются часто как βE, $\beta\mathbf{H}$ (напр., ([10], § 3.6); строго говоря, эти символы относятся каждый к компактификации Стоуна–Чеха, что допускает ([10], § 3.5) возможность использования эквивалентных реализаций. Будем, однако, использовать другие обозначения, следуя [5]–[7].

Цель статьи — систематическое исследование множеств притяжения и асимптотических версий решения, формирующих точки этих множеств — элементы притяжения. Не ограничиваемся при этом секвенциальным подходом в духе [1] (в связи с условиями, достаточными для исчерпывающей секвенциальной реализации множеств притяжения см. [5] и [12], с. 38). В частности, будут установлены условия, достаточные для локальной универсальности множеств притяжения при "хаусдорфовом" ослаблении топологии пространства оценок, построены конструкции компактификаций и получены условия их применимости. Особое внимание будет уделено случаю, когда пространство оценок не оснащено топологией, а построение множества притяжения "переносится" в стоун–чеховский (волмэновский) компакт.

Используются сокращения: в/з (вещественнозначная), к.-а. (конечно-аддитивная), МП (множество притяжения), ОО (обобщенная оценка), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство), у/р (ультрарешение), у/ф (ультрафильтр), ЭП (элемент притяжения).

2. Общие понятия и обозначения

В части обозначений общего характера при незначительной их коррекции следуем [4]–[7]. Равенство по определению обозначаем через $\triangleq$. Множество, все элементы которого — множества, называем семейством; принимаем аксиому выбора. Для любого объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Через B^A обозначаем ([13], § II.6) множество всех отображений из множества A в множество B. Для произвольных множеств A, B и $C \in \mathcal{P}(A)$ и функции $f \in B^A$ как обычно $f(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ и $(f|C) \in B^C$ — сужение f на C, $(f|C)(x) = f(x)\ \forall x \in C$. Рассматриваем образы семейств: если A, B — множества, $f \in B^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, то

$$f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)). \tag{2.1}$$

Если A и B — множества, то $B^A_{(*)} \triangleq \{f \in B^A | f^1(A) = B\}$ (множество всех сюрьекций A на B). Для всяких семейства $\mathcal{X}$ и множества Y через $\mathcal{X}|_Y$ обозначаем семейство всех множеств $X \cap Y$, $X \in \mathcal{X}$.

Фильтры и их базы. Если H — множество, то через $\beta[H]$ (через $\beta_0[H]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$ $(\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(H)))$ таких, что

$$\forall H_1 \in \mathcal{H},\ \forall H_2 \in \mathcal{H}\ \exists H_3 \in \mathcal{H} : H_3 \subset H_1 \cap H_2. \tag{2.2}$$

Тогда $\beta_0[H]$, $\beta_0[H] \subset \beta[H]$, — множество баз фильтров H, (2.2) характеризует семейства из $\beta[H]$ как направленные двойственно к вложению.

Если S — множество, то 1) через $\mathfrak{F}[S]$, $\mathfrak{F}[S] \subset \beta_0[S]$, обозначаем семейство всех фильтров ([8]–[10]) S, т. е. $\mathfrak{F}[S]$ — множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(S))$ таких, что $(A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{F})\&(\{G \in \mathcal{P}(S) \mid F \subset G\} \subset \mathcal{F}\ \forall F \in \mathcal{F})$; 2) через $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$ обозначаем множество всех у/ф (максимальных фильтров) S, т. е.

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S] \mid \forall \mathcal{G} \in \mathfrak{F}[S]\ \ ((\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow (\mathcal{F} = \mathcal{G}))\} = \\ = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S] \mid \forall A \in \mathcal{P}(S)\ \ ((A \in \mathcal{F}) \vee (S \setminus A \in \mathcal{F}))\}. \tag{2.3}$$

Если X — множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то через $\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ (через $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathcal{X}]$) обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ (всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$) таких, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}$; если $\mathcal{X} \in \beta_0[X]$, то

$$(X - \mathbf{fi})[\mathcal{X}] \triangleq \{L \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{X} : B \subset L\} \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]. \tag{2.4}$$

Для любых множества S и фильтра $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S]$ реализуется равенство $(S - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$. С учетом (2.1) имеем ([8], гл. I) для произвольных множеств X и Y, базы (фильтра) $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и функции $f \in Y^X$ включение

$$f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y]. \tag{2.5}$$

Кроме того, отметим следующее известное ([8], гл. I) свойство:

$$((X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]) \Rightarrow ((Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y]) \tag{2.6}$$

((2.5) определяет важное для дальнейшего свойство образа базы фильтра; (2.6) означает, что образ базы у/ф есть база у/ф). Разумеется, в (2.5) можно использовать в качестве $\mathcal{B}$ фильтр и, в частности, у/ф. В этой связи отметим, что для любых множеств X, Y и сюрьекции $f \in Y^X_{(*)}$

$$(f^1[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[Y]\ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X])\&(f^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y]\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]). \tag{2.7}$$

Для всякого множества X полагаем, что $\mathbb{Z}_X \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \bigcap\limits_{L \in \mathcal{K}} L \neq \varnothing\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$ (множество центрированных подсемейств $\mathcal{P}(X)$).

Сходимость фильтров и направленностей. Если (X, τ) — ТП, то 1) при $x \in X$ $N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[X]$ есть фильтр всех окрестностей ([8], гл. I) точки x в (X, τ); 2) для всякого множества $A \in \mathcal{P}(X)$

$(A, \tau|_A)$ — подпространство (X, τ) и $\mathrm{cl}(A, \tau)$ — замыкание A в исходном ТП (X, τ); 3) через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных ([10], с. 196) в (X, τ) п/м X, а через $(\tau - \mathrm{comp})^0[X]$ — семейство всех множеств $S \in \mathcal{P}(X)$ таких, что $\{K \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \mid S \subset K\} \neq \emptyset$; имеем

$$(\tau - \mathrm{comp})^0[X] = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \mathrm{cl}(A, \tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]\} \tag{2.8}$$

в случае хаусдорфова ТП (X, τ). Для произвольного ТП (X, τ) пусть $(\tau - \mathrm{comp})_0[X] \triangleq (\tau - \mathrm{comp})^0[X] \setminus \{\emptyset\}$. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, то через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех непрерывных в смысле упомянутых ТП отображений из множества Y^X.

Если (X, τ) — ТП, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то ([8], гл. I) сходимость $\mathcal{B} \overset{\tau}{\Rightarrow} x$ определяется условием $N_\tau(x) \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$. С учетом (2.5) это определение может быть применено для случая, когда вместо $\mathcal{B}$ используется образ базы фильтра; можно говорить о сходимости фильтров, у/ф и их образов (см. (2.5)). В этой связи полезно учесть (2.7). Если X — множество и $A \in \mathcal{P}(X)$, то

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A] \subset \mathfrak{F}[A] \subset \beta_0[A] \subset \beta_0[X]. \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) можно говорить, в частности, о сходимости фильтров подпространства ТП. Напомним, что (см. [8], [10]) ТП (X, τ) компактно ([10], с. 196) тогда и только тогда, когда $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ $\exists x \in X : \mathcal{F} \overset{\tau}{\Rightarrow} x$. С учетом (2.9) имеем для всяких ТП (X, τ) и множества $K \in (\tau - \mathrm{comp})[X]$, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[K] \ \exists y \in K : \mathcal{F} \overset{\tau}{\Rightarrow} y. \tag{2.10}$$

Сходимость по Мору–Смиту теперь можно истолковать в терминах сходимости фильтров. Символика, касающаяся направленностей и сходимости по Мору–Смиту, соответствует ([4], с. 64). В частности, для каждого множества X и направленности $(D, \preceq, f)$ в X $(X - \mathrm{ass})[D; \preceq; f] \in \mathfrak{F}[X]$ есть ([4], с. 64) фильтр, ассоциированный с $(D, \preceq, f)$. Если же (X, τ) есть ТП, $(D, \preceq, f)$ — направленность в X и $x \in X$, то по определению

$$((D, \preceq, f) \overset{\tau}{\to} x) \Longleftrightarrow ((X - \mathrm{ass})[D; \preceq; f] \overset{\tau}{\Rightarrow} x). \tag{2.11}$$

В (2.11) в терминах сходимости фильтра охарактеризована хорошо известная сходимость по Мору–Смиту (полезно иметь в виду, что каждый фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ можно ([10], гл. 1) представить как $(X - \mathrm{ass})[D; \preceq; f]$ для некоторой направленности $(D, \preceq, f)$ в X).

Предельные точки направленности и точки прикосновения базы фильтра. Если $(D, \preceq)$ — направленное множество, $D \neq \emptyset$, то полагаем $(\preceq - \mathrm{cof})[D] \triangleq \{M \in \mathcal{P}(D) \mid \forall d \in D \ \exists m \in M : d \preceq m\}$ (семейство всех конфинальных в $(D, \preceq)$ п/м D). Если же (X, τ) есть ТП и $(D, \preceq, f)$ — направленность в X, то

$$(\tau - \mathrm{cl})[D; \preceq; f] \triangleq \{x \in X \mid f^{-1}(Y) \in (\preceq - \mathrm{cof})[D] \ \forall Y \in N_\tau(x)\} \tag{2.12}$$

есть множество всех предельных точек $(D, \preceq, f)$ в (X, τ).

Следуем ([8], гл. I): если (X, τ) — ТП и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то через $(\tau - \mathbb{CL})[\mathcal{B}]$ обозначаем пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(B, \tau)$, $B \in \mathcal{B}$; получаем множество всех точек прикосновения базы (фильтра) $\mathcal{B}$. Для произвольных ТП (X, τ) и у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ имеем $(\tau - \mathbb{CL})[\mathcal{F}] = \{x \in X \mid \mathcal{F} \overset{\tau}{\Rightarrow} x\}$.

Компакты у/ф и их преобразование (*оператор Чеха*). Если S — непустое множество, то при $s \in S$ имеем в виде $(S - \mathrm{ult})[s] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(S) \mid s \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$ тривиальный у/ф множества S, порожденный точкой s, и на этой основе конструируем оператор

$$(S - \mathrm{ult})[\,\cdot\,] \triangleq ((S - \mathrm{ult})[x])_{x \in S} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]^S \tag{2.13}$$

погружения S в $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$; наряду с (2.13) определяем оператор $\varphi[S] \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S])^{\mathcal{P}(S)}$ правилом ([14], § 6)

$$\varphi[S](A) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S] \mid A \in \mathcal{F}\} \ \forall A \in \mathcal{P}(S). \tag{2.14}$$

Для каждого непустого множества S семейство-образ $\varphi[S]^1(\mathcal{P}(S))$ есть база топологии множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$, обозначаемой ниже через $\tau_{\mathbf{fi}}[S]$, причем $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S], \tau_{\mathbf{fi}}[S])$ есть непустой нульмерный [10] компакт (нульмерное компактное хаусдорфово ТП), в котором $(S-\mathrm{ult})[\,\cdot\,]^1(S) = \{(S-\mathrm{ult})[x] : x \in S\}$ есть всюду плотное множество, а $\varphi[S]^1(\mathcal{P}(S))$ — семейство всех открыто-замкнутых ([10], § 1.1) п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$. Кроме того, при $x \in S$ в силу (2.14) $\{(S-\mathrm{ult})[x]\} = \varphi[S](\{x\}) \in \tau_{\mathbf{fi}}[S]$, откуда вытекает, что $(S-\mathrm{ult})[\cdot]^1(A) \in \tau_{\mathbf{fi}}[S]$ при $A \in \mathcal{P}(S)$. Данное свойство именуем дискретной вложенностью S в $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$.

Если X и Y — непустые множества, а $h \in Y^X$, то оператор ([9], с. 213)

$$(U-\mathrm{tr})[X;Y;h] : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X] \to \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y] \tag{2.15}$$

определяем (см. (2.6)) условием $(U-\mathrm{tr})[X;Y;h](\mathcal{F}) \triangleq (Y-\mathbf{fi})[h^1[\mathcal{F}]]\ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$. Отображение (2.15) именуем оператором Чеха. Легко видеть, что он непрерывен: в условиях, определяющих (2.15),

$$(U-\mathrm{tr})[X;Y;h] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X], \tau_{\mathbf{fi}}[X], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y], \tau_{\mathbf{fi}}[Y]) \tag{2.16}$$

(к (2.16) можно, в частности, придти на основе процедур расширения [14], с. 80; [15]); кроме того,

$$(U-\mathrm{tr})[X;Y;h]((X-\mathrm{ult})[x]) = (Y-\mathrm{ult})[h(x)] \quad \forall x \in X. \tag{2.17}$$

Оператор Чеха (см. (2.15), (2.16)) инъективен (сюрьективен) если и только если h инъективен (сюрьективен) ([9], с. 213). Если же в (2.15) h — биекция X на Y, то (2.16) есть гомеоморфизм нульмерных компактов $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X], \tau_{\mathbf{fi}}[X])$ и $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y], \tau_{\mathbf{fi}}[Y])$.

3. Ультрарешения и обобщенные оценки

Следуя разделу 1, используем триплет $(E, \mathbf{H}, \mathbf{h})$; тогда

$$\mathbb{H} \triangleq \mathbf{h}^1(E) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}) \tag{3.1}$$

и $\mathbf{h} \in \mathbb{H}^E_{(*)}$. Элементы $\mathbb{H}$ — реализуемые (обычные) оценки, которые только и могут получаться при выборе решения $e \in E$. Для описания “асимптотической реальности” таких оценок недостаточно. Прибегаем (в этой связи) к расширению, заменяя E и $\mathbb{H}$ стоун–чеховскими компактами. С учетом (2.7) и общих свойств оператора Чеха (2.15), (2.16) имеем

$$\mathfrak{U} \triangleq (U-\mathrm{tr})[E;\mathbb{H};\mathbf{h}] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]) \cap \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}_{(*)} \tag{3.2}$$

((3.2) — непрерывная сюрьекция), причем $\mathfrak{U}(\mathcal{U}) = \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Если $\mathbf{h}$ — инъективное отображение E в $\mathbf{H}$, то (3.2) — гомеоморфизм компактов

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]),\ (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]). \tag{3.3}$$

В компакты (3.3) погружаем множества E и $\mathbb{H}$, применяя операторы (2.13) $\mathbf{m} \triangleq (E-\mathrm{ult})[\cdot]$ и $\mathbf{n} \triangleq (\mathbb{H}-\mathrm{ult})[\cdot]$; $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E])$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] = \mathrm{cl}(\mathbf{n}^1(\mathbb{H}), \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}])$. Из (2.17) вытекает следующее полезное равенство:

$$\mathfrak{U} \circ \mathbf{m} = \mathbf{n} \circ \mathbf{h}, \tag{3.4}$$

где $\circ$ — символ суперпозиции. Отметим, что (см. раздел 2) $\mathbf{E} \triangleq \varphi[E]^1(\mathcal{P}(E)) = \{\varphi[E](S) : S \in \mathcal{P}(E)\}$ — база первого в (3.3) ТП и одновременно семейство всех открыто-замкнутых (в этом ТП) п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$.

“Заменим” $\mathbb{H}$ множеством $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$, а $\mathbf{h}$ — оператором $\mathbf{n} \circ \mathbf{h}$. Тем самым понятия оценки и целевого оператора подвергаются процедуре расширения, а полученное пространство оценок в расширенном смысле превращается в компакт. Итак, первоначальная задача, определяемая триплетом $(E, \mathbf{H}, \mathbf{h})$, преобразуется в подобную задачу, соответствующую триплету $(E, \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})$.

Конструкцию решения новой задачи связываем с МП, полагая, что в E введены "асимптотические ограничения" в виде непустого семейства. В этом построении (3.4) играет важную роль в связи с использованием компактификатора в духе [6].

По свойствам $\mathbf{E}$ имеем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \bigcap_{A \in \mathcal{E}} \varphi[E](A) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]; \tag{3.5}$$

элементы множества $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ (3.5) называем у/р (соответствующими "ограничениям" в виде семейства $\mathcal{E}$). Из (3.2), (3.5) имеем

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{3.6}$$

Точки множеств в левой части (3.6) именуем ОО в задаче о достижимости с "ограничениями" в виде семейства $\mathcal{E}$. Следовательно, для каждого такого семейства имеем компакт у/р и отвечающий ему компакт ОО. С учетом свойства дискретной вложенности (см. раздел 2) имеем $\{\mathbf{m}(x)\} \in \tau_{\mathbf{fi}}[E]$ при $x \in E$, $\{\mathbf{n}(y)\} \in \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]$ при $y \in \mathbb{H}$. Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathbf{m}^1(A) = \bigcup_{x \in A} \{\mathbf{m}(x)\} \in \tau_{\mathbf{fi}}[E], \quad (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1(A) = \bigcup_{y \in \mathbf{h}^1(A)} \{\mathbf{n}(y)\} \in \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]. \tag{3.7}$$

Если S — множество, то $(\mathrm{Fam})[S] \triangleq \{\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S)) \mid \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \emptyset\}$ и

$$\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[S] \triangleq \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S] \cap (\mathrm{Fam})[S] \tag{3.8}$$

(множество всех свободных у/ф множества S; см., напр., [9]); каждый у/ф S является либо свободным, либо тривиальным. Как следствие (3.7), (3.8) имеем известный [14] факт

$$\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \mathbf{m}^1(E) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]],$$
$$\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \setminus \mathbf{n}^1(\mathbb{H}) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]].$$

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то, как легко проверить,

$$\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U = \mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]); \tag{3.9}$$

получаем следующее представление компакта свободных у/р:

$$\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \triangleq \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \cap \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E) =$$
$$= \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\Big) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \tag{3.10}$$

Кроме того, с учетом свойства дискретной вложенности (3.7) имеем

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \setminus \mathbf{n}^1(\mathbb{H}) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]], \tag{3.11}$$

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \setminus (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\Big) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]]. \tag{3.12}$$

В (3.11) имеем компакт свободных ОО, а в (3.12) — компакт ОО, нереализуемых в классе точных решений (см. (3.9)). С учетом (3.2) и (3.10) имеем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ компакт $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]]$ (всех ОО, реализуемых свободными у/р), для которого (см. (3.4),(3.10),(3.12)) $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \setminus (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\Big) \subset \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}])$,

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \cup (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\Big). \tag{3.13}$$

В связи с (3.13) полезно учесть (3.6): компакт ОО получается объединением компакта ОО, реализуемых свободными у/р, и открытого множества. Для получения несколько иного представления компакта (3.13) (всех) ОО отметим

Предложение 3.1. *Если* $A \in \mathcal{P}(E)$, *то* $\varphi[E](A) = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{fi}}[E])$.

Доказательство легко следует из свойства: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то семейство всех множеств $\varphi[E](F)$, $F \in \mathcal{F}$, есть локальная база в точке $\mathcal{F}$ первого в (3.3) ТП. Из (2.3), (3.6) и простейших свойств оператора $\varphi[E]$ ([5], § 7) вытекает, что $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned}(\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{fi}}[E]) \setminus \mathbf{m}^1(A) = \varphi[E](A) \setminus \mathbf{m}^1(A) \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]])\& \\ \&(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{fi}}[E]) = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus \varphi[E](A) = \\ = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E} \cup \{E \setminus A\}] \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))). \quad (3.14)\end{aligned}$$

В связи с рассматриваемой задачей асимптотического анализа представляет интерес случай, когда в (3.14) A есть пересечение всех множеств из $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. В этой связи отметим, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}} \triangleq \mathcal{E} \cup \left\{ E \setminus \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right\} \in (\mathrm{Fam})[E] \tag{3.15}$$

и для множества $E_0 \triangleq \bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U \in \mathcal{P}(E)$ имеет место свойство: компакты

$$\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[E]) \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]], \tag{3.16}$$

$$\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[E]) = \varphi[E](E_0) \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \tag{3.17}$$

обладают непересекающимися открыто-замкнутыми (в смысле первого ТП в (3.3)) окрестностями в виде множеств $\varphi[E](E \setminus E_0)$, $\varphi[E](E_0)$ соответственно. Итак, компакты (3.16), (3.17) отделены в топологии $\tau_{\mathfrak{fi}}[E]$, причем $\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[E]) \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$, что означает: упомянутые компакты образуют разбиение $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$. Из (3.2) и (3.4) легко следует ([10], теорема 3.1.12)

Предложение 3.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ *и* $E_0 \triangleq \bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U$, *то* $\mathfrak{U}^1(\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[E])) = \mathrm{cl}((\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[\mathbb{H}])$.

Из предложения 3.2 вытекает (см. замечание, предваряющее данное предложение), что при всяком выборе $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}]) \cup \mathrm{cl}((\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[\mathbb{H}]), \tag{3.18}$$

где E_0 — пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$;

$$\mathrm{cl}((\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1(E_0), \tau_{\mathfrak{fi}}[\mathbb{H}]) = \mathfrak{U}^1(\varphi[E](E_0)) \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[\mathbb{H}] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]]. \tag{3.19}$$

В (3.13) и (3.18) имеем два представления компакта ОО, связанные соответственно с выделением в виде фрагментов (открытого) множества точных ОО и компакта точных в существенном (см. (3.19)) ОО.

4. Множества притяжения, 1

Рассмотрим определение МП, полагая, что в качестве пространства решений используется множество E. Вместо пространства оценок используем, однако, произвольное ТП. Допускаем замену целевого отображения произвольным оператором. Если (X, τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}]$ обозначаем множество всех таких точек $x \in X$, что для некоторой направленности $(D, \preceq, f)$ в множестве E

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[D; \preceq; f])\&((D, \preceq, r \circ f) \xrightarrow{\tau} x); \tag{4.1}$$

если при этом $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то (см. [5], [11], [12])

$$(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}] = \bigcap_{U\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}(r^1(U),\tau). \tag{4.2}$$

На самом же деле (4.2) можно использовать и в более общем случае семейства $\mathcal{E}$. Дело в том, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ семейство

$$\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \triangleq \left\{ \bigcap_{U\in\mathcal{K}} U : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})\right\} \in \beta[E] \tag{4.3}$$

оказывается эквивалентным $\mathcal{E}$ в следующем смысле (см. аксиомы фильтра, (4.1) и (4.2)): для любого ТП (X,τ) и оператора $r \in X^E$

$$(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}] = \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} \mathrm{cl}(r^1(U),\tau). \tag{4.4}$$

Предложение 4.1. *Если (X,τ) — хаусдорфово ТП, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(K,\mathbf{t})$ — компактное ТП, $m \in K^E$ и $g \in C(K,\mathbf{t},X,\tau)$, то*

$$(\mathbf{as})[X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}]).$$

Предложение следует из положений ([11], с. 41 и [12], с. 147) с учетом (4.3), (4.4). Далее, из теоремы 8.1 работы [5] вытекает

Предложение 4.2. *Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то справедливо равенство*

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E];\tau_{\mathbf{fi}}[E];\mathbf{m};\mathcal{E}].$$

Теорема 4.1. *Для всякого семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ компакт ОО допускает следующее представление в виде МП:*

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) = (\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}];\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}];\mathbf{n}\circ\mathbf{h};\mathcal{E}]. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для семейства $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ (4.3) имеем (см. (4.4)) равенства

$$(\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}];\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}];\rho;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}];\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}];\rho;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}] = \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} \mathrm{cl}(\rho^1(U),\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]),$$

где $\rho \triangleq \mathbf{n}\circ\mathbf{h}$. В силу (3.4) имеем равенство $\rho = \mathfrak{U}\circ\mathbf{m}$. С учетом компактности и отделимости ТП (3.3), (3.2) и предложения 4.1 получаем

$$(\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}];\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}];\rho;\mathcal{E}] = \mathfrak{U}^1((\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E];\tau_{\mathbf{fi}}[E];\mathbf{m};\mathcal{E}]). \tag{4.6}$$

Из (4.6) и предложения 4.2 следует справедливость равенства (4.5). □

Содержательный смысл теоремы состоит в следующем: если “не различать” $\mathbf{h}$ и $\mathbf{n}\circ\mathbf{h}$, т. е. рассматривать $\mathbf{n}\circ\mathbf{h}$ в качестве целевого оператора, то компакт ОО, отвечающий за представление всевозможных эффектов, создаваемых у/р, исчерпывается ЭП. При этом кортеж $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathbf{fi}}[E],\mathbf{m},\mathfrak{U})$ выступает в качестве компактификатора ([6], сс. 185, 186). Данный вывод отвечает формализации “асимптотических решений” в классе у/ф, что и приводит к понятию у/р. Если же обратиться к фильтрам E в качестве своеобразного эквивалента направленностей, то (см. раздел 2) при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}])\&(\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}]\ \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] : \mathcal{F} \subset \mathcal{U}); \tag{4.7}$$

см. также ([5], с. 123). В силу (4.7) у/р обладают известной представительностью в классе решений-фильтров и, стало быть, в классе направленностей, соблюдающих ограничения асимптотического характера.

Следствие 4.1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $E_0 \triangleq \bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U$, то

$$(\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]; \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]; \mathbf{n} \circ \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]; \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]; \mathbf{n} \circ \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{c}}] \cup \mathrm{cl}((\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1(E_0), \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]).$$

Доказательство. Учтем (3.18) и (4.5). В силу (3.5), (3.8), (3.10) и (3.14) $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] = \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}]$, а тогда из теоремы 4.1 получаем равенство

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}]) = (\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]; \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]; \mathbf{n} \circ \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{c}}]. \tag{4.8}$$

Из (3.18), (4.5) и (4.8) следует требуемое утверждение. □

5. Элементы притяжения и предельные точки направленностей

Через (top)[$\mathbf{H}$] (через (TOP)[$\mathbf{H}$]) обозначаем множество всех (всех хаусдорфовых) топологий $\mathbf{H}$. При $\tau \in$ (top)[$\mathbf{H}$] и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ полагаем

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \triangleq (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}], \tag{5.1}$$

получая МП в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. К (5.1) применимы конструкции на основе (4.3), (4.4) и предложения 4.1. В связи с (5.1) рассмотрим вопрос о представлении предельных точек направленностей (в ТП) в виде ЭП.

Предельные точки направленностей и ЭП. Фиксируем направление ([16], гл. 2) $\preceq$ на множестве E; следуем соглашениям раздела 2 и [4]. Пусть $[d; \rightarrow) \triangleq \{\delta \in E \mid d \preceq \delta\}$ при $d \in E$. Тогда

$$\mathcal{D} \triangleq \{[d; \rightarrow) : d \in E\} \in \beta_0[E], \tag{5.2}$$

$(E, \preceq, \mathbf{h})$ есть направленность в $\mathbf{H}$, причем (см. (2.12))

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{D}] = (\tau - \mathrm{cl})[E; \preceq; \mathbf{h}] \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]. \tag{5.3}$$

Для доказательства (5.3) используем (4.2) и известное свойство ([16], с. 104) при несущественной коррекции рассуждений. К этому добавим следствие (5.2): $\mathbf{h}^1[\mathcal{D}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$, причем $(\mathbf{H} - \mathrm{ass})[E; \preceq; \mathbf{h}] = (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{D}]]$ (следствие определения в ([4], с. 64)). Из определения множества точек прикосновения фильтра при $\tau \in$ (top)[$\mathbf{H}$] имеем (см. (4.2), (4.3))

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{D}] = (\tau - \mathbb{CL})[\mathbf{h}^1[\mathcal{D}]] = (\tau - \mathbb{CL})[(\mathbf{H} - \mathrm{ass})[E; \preceq; \mathbf{h}]]. \tag{5.4}$$

В связи с (5.3), (5.4) уместно коснуться вопроса об условиях секвенциальной реализации МП (см. [5] и [12], с. 38).

Частный случай. Пусть $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$, $\overline{1,n} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq n\}$ и $\overrightarrow{n,\infty} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid n \leq i\}$ при $n \in \mathcal{N}$. Полагаем до конца настоящего раздела, что $E = \mathcal{N}$, а $\preceq$ есть обычный порядок $\leq$ на множестве $\mathcal{N}$. Следовательно, $(E, \preceq) = (\mathcal{N}, \leq)$ — направленное множество, $\mathcal{D} = \{\overrightarrow{n,\infty} : n \in \mathcal{N}\}$ (см. (5.2)). При этих условиях справедливо

Предложение 5.1. $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{D}] = \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] = \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[\mathcal{N}]$.

Доказательство. Имеем вложение $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{D}] \subset (\mathrm{Fam})[E]$, коль скоро $\mathcal{D} \in (\mathrm{Fam})[E]$. Из (3.8) имеем вложение $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{D}] \subset \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E]$. Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] : \mathcal{F}$ — свободный у/ф $\mathcal{N}$. Если $n \in \mathcal{N}$ и $\{n\} \in \mathcal{F}$, то по аксиомам фильтра $\mathbf{m}(n) \subset \mathcal{F}$ (см. раздел 3) и в силу максимальности $\mathbf{m}(n)$ имеем $\mathcal{F} = \mathbf{m}(n) \in \mathbf{m}^1(E)$, что невозможно (см. (3.8)). Итак, $\{r\} \notin \mathcal{F}\ \forall r \in E$. Тогда $\overline{1,k} \notin \mathcal{F}$ при любом $k \in E$. В самом деле, если $p \in E$ (т. е. $p \in \mathcal{N}$) и $\overline{1,p} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \{i\} \in \mathcal{F}$, то по свойствам у/ф ([8], гл. I) $\exists k \in \overline{1,p} : \{k\} \in \mathcal{F}$. Итак, нужное свойство конечных промежутков $E = \mathcal{N}$ установлено, отсюда (см. (2.3)) $\overrightarrow{m,\infty} \in \mathcal{F}\ \forall m \in \mathcal{N}$. В итоге $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{D}]$, чем завершается обоснование вложения $\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{D}]$. □

Пример. Пусть $\mathbf{H}$ — множество всех нормированных в/з к.-а. $(0,1)$-мер на σ-алгебре $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{N})$ всех п/м E. Мы рассматриваем $\mathbf{H}$ как п/м множества всех ограниченных в/з к.-а. мер на $\mathcal{P}(E)$ с обычной $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{P}(E))$ ([12], с. 41); полагаем $\tau \triangleq \tau_*(\mathcal{P}(E))|_{\mathbf{H}}$; тогда $\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$, причем $(\mathbf{H}, \tau)$ — компакт. Заметим, что ([12], с. 45) τ — топология поточечной сходимости в $\mathbf{H}$, индуцированная ([16], с. 77) из тихоновского произведения экземпляров вещественной прямой в обычной $|\cdot|$-топологии при использовании семейства $\mathcal{P}(E)$ в качестве индексного множества. По свойством направленностей в компактном ТП имеем непустоту МП (5.4); если $z \in (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{D}]$, то (см. (4.1), (5.1)) для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, f)$ в множестве E имеем

$$(\mathcal{D} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; f])\&((\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\tau} z). \tag{5.5}$$

Ни одна из таких направленностей $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, f)$ (см. (5.5)) не сводится к последовательности. Доказательство этого восходит к примеру ([17], с. 139) и использует рассуждения ([18], с. 238), где показано, что $\mathbf{h}$ не имеет сходящихся в $(\mathbf{H}, \tau)$ подпоследовательностей. Итак, здесь ЭП из непустого множества (5.4) реализуются несеквенциально: в классе направленностей (или фильтров; см. [4]).

6. Множества притяжения, 2

В данном разделе развиваем подход [4]–[7], привлекая элементы стоун–чеховской компактификации и расширения Волмэна; см. ([10], гл. 3). Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$, то через $(\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{B}|\tau]$ обозначаем множество всех $z \in \mathbf{H}$ таких, что $\mathbf{h}^1[\mathcal{B}] \overset{\tau}{\Rightarrow} z$. При $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ определяем $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}} - \mathrm{sol})[\mathcal{E}|\tau]$ как множество всех у/р $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ таких, что $(\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{F}|\tau] \neq \emptyset$, тогда с учетом построений [5] имеем

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]} (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \bigcup_{\mathcal{F} \in (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}} - \mathrm{sol})[\mathcal{E}|\tau]} (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{F}|\tau]. \tag{6.1}$$

Отметим комбинацию (4.3), (4.4), (5.1) и предложения 4.2: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]$ и $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]$ $\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$. Поэтому достаточно (см. (4.3)) рассматривать МП $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$, $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, $\mathcal{E} \in \beta[E]$. Однако для $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем $\mathcal{E} \in \mathbb{Z}_E$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \in \beta_0[E]$; если $\mathcal{E} \notin \mathbb{Z}_E$, то $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \emptyset$ и $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \emptyset$ $\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$. Итак, интересен лишь случай $\mathcal{E} \in \mathbb{Z}_E$, для которого $\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \in \beta_0[E]$ определяет фильтр $(E - \mathbf{fi})[\mathcal{E}_{\mathbf{f}}] \in \mathfrak{F}[E]$ со свойствами

$$(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|(E - \mathbf{fi})[\mathcal{E}_f]])\&((\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbf{AS})[(E - \mathbf{fi})[\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]] \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]). \tag{6.2}$$

В силу (6.2) в практически интересных случаях построения МП можно ограничиться рассмотрением $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{F}]$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$; имеем свойство достаточности фильтров (для исследования МП). Используя свойства фильтров в ([8], гл. I), отметим положение: если $n \in \mathcal{N}$ и

$$(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \to \mathfrak{F}[E], \tag{6.3}$$

то для фильтра $\mathcal{F} \triangleq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \Big\{ \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i : (F_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \Big\} \in \mathfrak{F}[E]$

$$(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}] = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}_i])\&\Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_i} F \Big) \Big)\&$$
$$\&((\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{F}] = \bigcup_{i=1}^{n} (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{F}_i] \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]). \tag{6.4}$$

В связи с первым положением в (6.4) см. ([8], с. 94), второе извлекается из аксиом фильтра, а последнее — из (6.1). Из (6.2), (6.4) вытекает

Предложение 6.1. *Если* $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, $n \in \mathcal{N}$ *и* $(\mathcal{E}^{(i)})_{i\in\overline{1,n}} : \overline{1,n} \to \mathbb{Z}_E$, *то* $\mathcal{F} \triangleq \bigcap\limits_{i=1}^{n}(E - \mathbf{fi})[\mathcal{E}^{(i)}_{\mathbf{f}}] \in \mathfrak{F}[E]$ *и* $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{F}] = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}^{(i)}]$.

При $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ имеем из определений, что $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{U}] = \{\mathcal{U}\}$ и (см. (6.1)) $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{U}] = (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau]$ $\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$.

7. Компактификации, 1

Рассматриваем компактифицируемые фрагменты E, полагая

$$(\mathbf{PC})[\tau] \triangleq \{A \in \mathcal{P}'(E) \mid \mathbf{h}^1(A) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbf{H}]\} \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]. \tag{7.1}$$

В (7.1) введено семейство п/м E с $\mathbf{h}$-образами из $(\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbf{H}]$. Множества из семейства (7.1) используем в качестве вышеупомянутых компактифицируемых фрагментов E. При $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$ имеем

$$\mathbf{h}^1(A) \in (\tau - \mathrm{comp})_0[\mathbf{H}]; \tag{7.2}$$

с учетом (2.9), (7.2) и определений раздела 6 получаем

$$(\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{F}|\tau] \in \mathcal{P}'(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau)) \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]. \tag{7.3}$$

С использованием известных положений ([8], гл. I) дополним (7.3) следующим свойством: если $\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$, то $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$

$$\exists! z \in \mathbf{H} : (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \{z\}; \tag{7.4}$$

с учетом (7.4) определяем оператор $\mathfrak{H}^0_A[\tau] \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]}$ посредством правила: при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$ элемент $\mathfrak{H}^0_A[\tau](\mathcal{U}) \in \mathbf{H}$ доставляет равенство

$$(\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{\mathfrak{H}^0_A[\tau](\mathcal{U})\}. \tag{7.5}$$

Предложение 7.1. *Если* $\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ *и* $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$, *то*:
1) $\mathfrak{H}^0_A[\tau]((A - \mathrm{ult})[x]) = \mathbf{h}(x)$ $\forall x \in A$;
2) $\mathfrak{H}^0_A[\tau] \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau)^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]}_{(*)}$;
3) $\mathfrak{H}^0_A[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A], \tau_{\mathbf{fi}}[A], \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau), \tau|_{\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(A),\tau)})$.

Следствие 7.1. $\mathfrak{H}^0_A[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A], \tau_{\mathbf{fi}}[A], \mathbf{H}, \tau)$ $\forall \tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ $\forall A \in (\mathbf{PC})[\tau]$.

Обоснование 1) аналогично доказательству предложения 5.5 в [5]; 2) следует из (7.3); 3) устанавливается подобно предложению 7.1 в [5].

Если $\tau_1 \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, то через $(\mathrm{top})[\mathbf{H}|\tau_1]$ (через $(\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$) обозначаем множество всех $\tau_2 \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ (всех $\tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$) таких, что $\tau_2 \subset \tau_1$; при $\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}|\tau_1]$ имеем $(\mathbf{PC})[\tau_1] \subset (\mathbf{PC})[\mathbf{t}]$ и, кроме того,

$$(\tau_1 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset (\mathbf{t} - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{7.6}$$

Предложение 7.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\tau_1 \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ *и* $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}} - \mathrm{sol})[\mathcal{E}|\tau_1] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$, *то* $(\tau_1 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau_2 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ $\forall \tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$.

Доказательство использует (6.1) и свойство единственности предела базы фильтра в хаусдорфовом ТП ([8], гл. I). Учитывается, что ослабление топологии $\mathbf{H}$ наследуется фильтрами окрестностей точек $\mathbf{H}$. Смысл предложения состоит в установлении свойства локальной универсальности МП при ослаблении топологии пространства оценок.

Предложение 7.3. *Если* $\tau_1 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$, $\tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ *и* $A \in (\mathbf{PC})[\tau_1]$, *то* $\mathfrak{H}^0_A[\tau_1] = \mathfrak{H}^0_A[\tau_2]$.

Доказательство следует из определений (см. (7.5)). Введем локальные аналоги МП (5.1): если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то через $(\tau - \mathbf{as})[A|\mathcal{A}]$ обозначаем множество всех $z \in \mathbf{H}$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве A, что

$$(\mathcal{A} \subset (A - \mathrm{ass})[D; \preceq; f])\&((D, \preceq, (\mathbf{h}|A) \circ f) \xrightarrow{\tau} z); \tag{7.7}$$

$$(\tau - \mathbf{as})[A|\mathcal{A}] = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[A|\mathcal{A}]} (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau]. \tag{7.8}$$

Предложение 7.4. *Если* $\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$, $A \in (\mathrm{PC})[\tau]$ *и* $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, *то* $(\tau - \mathbf{as})[A|\mathcal{A}] = \mathfrak{H}^0_A[\tau]^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[A|\mathcal{A}])$.

Доказательство следует из (7.5), (7.8) и определений раздела 6. Отметим аналог предложения 4.2: если $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[A|\mathcal{A}]$ есть множество всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве A, что (см. (2.13))

$$(\mathcal{A} \subset (A - \mathrm{ass})[D; \preceq; f])\&((D, \preceq, (A - \mathrm{ult})[\,\cdot\,] \circ f) \xrightarrow{\tau_{\mathfrak{F}}[A]} \mathcal{F}). \tag{7.9}$$

Отметим аналогию (4.1) и (7.9). Продолжая эту аналогию, рассмотрим вопрос о применении (7.8) для исследования МП в основной задаче. Потребуются некоторые построения, подобные исследуемым в ([5], § 6). Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $(\tau - \mathbf{pc})[\mathcal{E}] \triangleq \mathcal{E} \cap (\mathbf{PC})[\tau]$ есть семейство всех множеств $A \in \mathcal{E}$ таких, что

$$\mathbf{h}^1(A) \in (\tau - \mathrm{comp})_0[\mathbf{H}]. \tag{7.10}$$

Свойство (7.10) оказывается ключевым в вопросах компактифицируемости фрагментов пространства решений. Используем и свойство достаточности фильтров (см. (6.2)), поскольку ([5], § 6) для $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ и $A \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{F}|_A = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subset A\} \in \mathfrak{F}[A]. \tag{7.11}$$

В дополнение к (7.11) отметим, что

$$(\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \Rightarrow (\mathcal{F}|_A \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]). \tag{7.12}$$

В связи с (7.12) отметим, что (см. (2.9)) для всяких у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и множества $A \in \mathcal{F}$ для баз (фильтров) $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ и $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A] \in \beta_0[\mathbf{H}]$

$$(\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] = (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{H}]; \tag{7.13}$$

(7.13) можно рассматривать как эквивалентную локализацию действия у/ф $\mathcal{F}$. С учетом (7.3), (7.10) и (7.13) получаем

Предложение 7.5. *Для любых* $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ *при* $(\tau - \mathbf{pc})[\mathcal{E}] \neq \emptyset$ *имеем равенство* $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}} - \mathrm{sol})[\mathcal{E}|\tau]$.

Из предложений 7.2 и 7.5 вытекает достаточное условие локальной универсальности основного МП при хаусдорфовом ослаблении топологии пространства оценок $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ $\forall \tau_1 \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$

$$((\tau_1 - \mathbf{pc})[\mathcal{E}] \neq \emptyset) \Rightarrow ((\tau_1 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau_2 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \;\; \forall \tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]). \tag{7.14}$$

Предложение 7.6. *Для всяких топологии* $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, *фильтра* $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ *и множества* $A \in \mathcal{F}$ *имеем для фильтра* $\mathcal{F}_A \triangleq \mathcal{F}|_A$ (7.11) *равенство* $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{F}] = (\tau - \mathbf{as})[\mathcal{F}_A]$.

Доказательство следует из (4.2), (5.1) и аналогов (4.2) для случая МП (7.8); учитываем также (7.11).

Теорема 7.1. *Если* $\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, $A \in (\tau - \mathbf{pc})[\mathcal{F}]$ *и* $\mathcal{F}_A \triangleq \mathcal{F}|_A$, *то* $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{F}] = \mathfrak{H}^0_A[\tau]^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[A|\mathcal{F}_A])$.

Доказательство получаем комбинацией предложений 7.4 и 7.6.

8. Компактификации, 2

Конструкция расширения, реализуемая в теореме 7.1, является индивидуальной в смысле используемого фильтра, формирующего "асимптотические ограничения", что связано с конкретным выбором $A \in \mathcal{F}$. Рассмотрим условия, обеспечивающие построение универсальной в упомянутом смысле компактификации. В этой связи через $(\mathbf{h} - \mathrm{top})[\mathbf{H}]$ (через $(\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$) обозначаем множество всех топологий $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ $(\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}])$ таких, что $E \in (\mathbf{PC})[\tau]$. Тогда (см. (3.1), (7.1), (7.2))

$$\mathbb{H} \in (\tau - \mathrm{comp})_0[\mathbf{H}] \quad \forall \tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{top})[\mathbf{H}]. \tag{8.1}$$

Из (8.1), предложения 7.1 и следствия 7.1 при $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ имеем

$$\mathfrak{H}[\tau] \triangleq \mathfrak{H}^0_E[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{H}, \tau); \tag{8.2}$$

к этому следует добавить (см. определения раздела 3) равенство

$$\mathbf{h} = \mathfrak{H}[\tau] \circ \mathbf{m} \tag{8.3}$$

и следующее свойство сюрьективности: $\mathfrak{H}[\tau] \in \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau)^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}_{(*)}$ (см. п. 2) предложения 7.1). Отметим аналогию (3.2) и (8.2), а также (3.4) и (8.3). Это позволяет реализовать процедуру построения МП, подобную теореме 4.1. Подменяем оператор Чеха (см. (3.2)) отображением (8.2) с целью перенести конструкции МП, подобные теореме 4.1, в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. Из определений следует, что при $\tau_1 \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ $(\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1] \subset (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$. Тогда при $\tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ имеем пару $(\mathfrak{H}[\tau_1], \mathfrak{H}[\tau_2])$ операторов из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ в $\mathbf{H}$; при этом (см. предложение 7.3)

$$\mathfrak{H}[\tau_1] = \mathfrak{H}[\tau_2] \tag{8.4}$$

и, как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_1) = \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_2)$. В силу (3.5), (8.2) и предложения 7.4 для $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}] \tag{8.5}$$

(см. также (6.1) и (7.8)); (8.5) является по сути дела вариантом применения предложения 4.1 в условиях, когда $(K, \mathbf{t})$ есть первое в (3.3) ТП (нульмерный компакт), $m = \mathbf{m}$ и $g = \mathfrak{H}[\tau]$. Учитываем, конечно, (5.1), (8.2) и (8.3). В (8.5) реализуется представление искомого МП в виде непрерывного образа компакта у/р. Легко видеть (см. (2.10), ([8], гл. I)), что $\forall \tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$, $\forall A \in (\tau - \mathrm{comp})_0[\mathbf{H}]$, $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$ $\exists! z \in \mathbf{H} : \mathcal{F} \overset{\tau}{\Rightarrow} z$. С учетом данного свойства полагаем при $\tau \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\tau - \mathrm{comp})_0[\mathbf{H}]$, что оператор $\mathbf{l}_\tau[A] \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]}$ определяется условием $\mathcal{F} \overset{\tau}{\Rightarrow} \mathbf{l}_\tau[A](\mathcal{F})$ $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$; $\mathbf{l}_\tau[A] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A], \tau_{\mathbf{fi}}[A], \mathbf{H}, \tau)$ (обоснование подобно доказательству предложения 7.1 в [5]). В силу (3.1) и (8.1)

$$\mathbf{l}_\tau[\mathbb{H}] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{H}, \tau) \quad \forall \tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]. \tag{8.6}$$

Предложение 8.1. *Если* $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$, *то* $\mathfrak{H}[\tau] = \mathbf{l}_\tau[\mathbb{H}] \circ \mathfrak{U}$.

Утверждение можно связать с возможностью "визуализации" ОО раздела 3 (см. (3.2), (3.13)), т. е. абстрактных ЭП в теореме 4.1. Доказательство следует из определений. Как следствие, при $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ имеем равенство $\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F}) = \mathbf{l}_\tau[\mathbb{H}](\mathbf{h}^1[\mathcal{F}])$ (см. раздел 3). Из (3.9), (3.10), (8.2) и (8.3) следует свойство: если $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}]$ и $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) \cup \mathbf{h}^1\Big(\bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U\Big)$. Используем (8.5) и свойство локальной универсальности МП и его фрагмента: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\tau_1 \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$, то из (8.4), (8.5) следует $(\tau_1 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau_2 - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ и $\mathfrak{H}[\tau_1]^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{H}[\tau_2]^1(\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}])$. Из (8.2), (8.3) и предложения 3.1 имеем положение: если $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[E]$ и $M \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(M), \tau) = \mathfrak{H}[\tau]^1(\varphi[E](M)) \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}]. \tag{8.7}$$

В (8.7) наиболее важен случай, когда M — пересечение множеств непустого семейства п/м E, определяющего "асимптотические ограничения". В силу (8.7) для всяких $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\tau_1 \in (\mathbf{h}-\mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1\Big(\bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U\Big), \tau_1) = \mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1\Big(\bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U\Big), \tau_2\right)$ (локальная универсальность множества оценок, точных в существенном).

Замечание 8.1. Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и E_0 — пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$, то $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E_0), \tau) \subset (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$, поскольку при $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ имеем вложение $E_0 \subset U$ и, как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E_0), \tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(U), \tau)$. Из (4.3), (4.4), (5.1) и (6.2) имеем требуемую оценку МП снизу.

Теорема 8.1. *Если* $\tau \in (\mathbf{h} - \mathrm{TOP})[\mathbf{H}]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то*

$$((\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}]) \& \left(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\Big), \tau\right) \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}]) \tag{8.8}$$

и при этом справедливо следующее равенство для МП:

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] \cup \mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\Big), \tau\right). \tag{8.9}$$

Свойство (8.8) следует из (8.5) и (8.7); (8.9) получаем комбинацией (3.9), (3.16), (8.7) и простейших свойств операции взятия образа. С использованием свойств конфинальных п/м направленного множества ([16], гл. 2) получаем

Предложение 8.2. *Если* $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то* $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}_{\mathbf{c}}]$ *есть множество всех оценок* $x \in \mathbf{H}$, *для каждой из которых существует направленность* $(D, \preceq, f)$ *в множестве* $E \setminus \Big(\bigcap\limits_{U \in \mathcal{E}} U\Big)$ *такая, что выполнено* (4.1) *при* $r = \mathbf{h}$.

Литература

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 622 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.
4. Ченцов А.Г. *Приближенные решения в задаче об асимптотической достижимости* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 8. – С. 63–73.
5. Ченцов А.Г. *Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха* // Современная математика и ее приложения. — АН Грузии. Ин-т кибернетики. – 2005. – Т. 26. – С. 119–150.
6. Ченцов А.Г. *Обобщенные множества притяжения и приближенные решения, их формирующие* // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. — Екатеринбург, 2004. – Т. 10. – № 2. – С. 178–196.
7. Chentsov A.G. *Some questions of asymptotic analysis: approximate solutions and extension constructions* // Funct. Different. Equations. – 2005. – V. 12. – № 1–2. – P. 119–148.
8. Бурбаки Н. *Общая топология.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.
9. Čech E. *Topological spaces.* – Prague: Academia, 1966. – 893 p.
10. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
11. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* – New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. – 244 p.
12. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 322 p.
13. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.

14. Архангельский А.В. *Компактность* // Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ. – 1989. – Т. 50. – С. 5–128.
15. Архангельский А.В., Пономарев В.И. *Основы общей топологии в задачах и упражнениях.* – М.: Наука, 1974. – 423 с.
16. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
17. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1977. – 360 с.
18. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 408 p.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
20.01.2006