ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.98

М.Ю. КОКУРИН, О.В. КАРАБАНОВА

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Рассматривается операторное уравнение

$$Ax = f, \quad x \in X, \tag{1.1}$$

где A — линейный вполне непрерывный оператор, действующий из банахова пространства X в X. Предполагаем, что уравнение (1.1) имеет решение x^*, не обязательно единственное. В силу полной непрерывности оператора A задача (1.1) относится к классу некорректных [1]–[3]. Пусть вместо точного оператора A и правой части f в (1.1) известны их приближения $A_h \in L(X)$ и $f_\delta \in X$ такие, что

$$\|A_h - A\|_{L(X)} \le h, \quad \|f_\delta - f\|_X \le \delta. \tag{1.2}$$

Здесь и далее через $\|\cdot\|_X$ обозначается норма элемента в пространстве X, $L(X)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в X. Обозначим через $X^*(A,f)$ множество решений уравнения (1.1). В контексте теории некорректных задач разработка методов приближенного решения уравнения (1.1) в условиях погрешностей сводится к построению регуляризующих алгоритмов для задачи (1.1). Напомним (см. [1]–[3]), что регуляризующим алгоритмом для уравнения (1.1) называется такое зависящее от параметров $h, \delta \ge 0$ отображение $R_{h\delta} : L(X) \times X \to X$, что для любых начальных данных $(A,f) \in L(X) \times X$ таких, что $X^*(A,f) \ne \emptyset$, выполняется

$$\exists x^* \in X^*(A,f) : \lim_{h,\delta \to 0} \sup_{\substack{\|A_h - A\|_{L(X)} \le h \\ \|f_\delta - f\|_X \le \delta}} \|R_{h\delta}(A_h, f_\delta) - x^*\|_X = 0. \tag{1.3}$$

Согласно (1.3) элемент $x^{h\delta} = R_{h\delta}(A_h, f_\delta)$ может быть взят в качестве приближенного решения уравнения (1.1), отвечающего приближенным исходным данным (A_h, f_δ).

В [4] (см. также [3]) для случая $\xi = 0$ введен и исследован класс методов аппроксимации решения уравнения (1.1)

$$x_\alpha = (E - \Theta(A,\alpha)A)\xi + \Theta(A,\alpha)f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{1.4}$$

где E — единичный оператор, α — параметр регуляризации, элемент $\xi \in X$ играет роль начального приближения к искомому решению x^*. Предполагается, что порождающая функция $\Theta(\lambda, \alpha)$, $\lambda \in \mathbf{C}, \alpha \in (0, \alpha_0]$, аналитична по λ в открытой окрестности $D \subset \mathbf{C}$ спектра $\sigma(A)$ оператора A. Будем обозначать через $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ и $\rho(A) = \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$ резольвенту и резольвентное множество A соответственно. Пусть функция $\varphi(\lambda)$ аналитична по λ в области D, Γ — положительно ориентированный замкнутый контур, лежащий в области D и содержащий внутри спектр $\sigma(A)$. Напомним, что функция $\varphi(A)$ оператора $A \in L(X)$ в банаховом пространстве X определяется формулой Рисса–Данфорда ([5], с.455)

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda. \tag{1.5}$$

Потребности практической реализации методов аппроксимации x^*, получаемых в рамках схемы (1.4), диктуют необходимость разработки их аналогов, оперирующих с конечномерными аппроксимациями пространства X и оператора A. Наряду с этим актуальна задача построения на базе конечномерных вариантов схемы (1.4) регуляризующих алгоритмов для решения уравнений (1.1) в условиях погрешностей в исходных данных (A, f).

Зафиксируем семейства конечномерных подпространств $\{N_l\}$ и $\{M_m\}$ из X. Пусть P_l, Q_m — проекторы (в общем сучае неортогональные) на подпространства N_l, M_m соответственно. Таким образом, имеют место соотношения

$$P_l^2 = P_l, \quad Q_m^2 = Q_m, \quad N_l = \mathrm{Im}(P_l), \quad M_m = \mathrm{Im}(Q_m),$$

где $\mathrm{Im}(A)$ есть образ оператора A. Кроме того, предполагается, что семейства $\{N_l\}$, $\{M_m\}$ плотны в пространстве X, так что

$$\lim_{l\to\infty} \|(E - P_l)x\|_X = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|(E - Q_m)x\|_X = 0 \quad \forall x \in X.$$

В силу теоремы Банаха–Штейнгауза ([6], с. 129) проекторы P_l, Q_m равномерно ограничены по норме, т. е.

$$\sup_l \|P_l\|_{L(X)} < \infty, \quad \sup_m \|Q_m\|_{L(X)} < \infty. \tag{1.6}$$

Обозначим через C_1, C_2 верхние грани, стоящие в левых частях неравенств (1.6). В силу полной непрерывности оператора A имеет место равенство $\lim\limits_{m\to\infty} \|(E - Q_m)A\|_{L(X)} = 0$ (см. [7], с. 202). Отметим, что если исходное пространство X рефлексивно, то наряду с этим равенством зачастую справедливо соотношение $\lim\limits_{l\to\infty} \|A(E - P_l)\|_{L(X)} = 0$ (см. [7], с. 203). Во многих случаях с использованием результатов теории приближений (см., напр., [8], [9]) последние соотношения удается уточнить, указав такие последовательности $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$, что

$$\begin{gathered} \|A(E - P_l)\|_{L(X)} \le C_3\eta_l, \quad \|(E - Q_m)A\|_{L(X)} \le C_4\omega_m, \\ \lim_{l\to\infty} \eta_l = \lim_{m\to\infty} \omega_m = 0, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где постоянные $C_3, C_4, \ldots$ не зависят от l, m. Будем предполагать, что последовательности $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$, удовлетворяющие (1.7), зафиксированы.

В данной статье рассматривается следующий класс методов конечномерной аппроксимации решения уравнения (1.1) в условиях приближенных данных:

$$x_{\alpha lm}^{h\delta} = (E - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l)\xi + \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m f_\delta. \tag{1.8}$$

Как будет показано ниже, реализация схемы (1.8) в типичных случаях сводится к решению конечных систем линейных алгебраических либо дифференциальных уравнений. К группе методов (1.8) приходим, регуляризуя согласно (1.4) уравнение

$$(Q_m A_h P_l)x = Q_m f_\delta, \quad x \in N_l,$$

являющееся конечномерной аппроксимацией уравнения (1.1) по схеме Петрова–Галёркина ([7], с. 190; [10], с. 46).

В (1.8) параметр регуляризации $\alpha = \alpha(h, \delta)$ и номера используемых подпространств $l = l(h, \delta)$, $m = m(h, \delta)$ следует согласовать с погрешностями h, δ так, чтобы равномерно относительно выбора приближений A_h, f_δ в рамках условий (1.2) выполнялось регуляризационное соотношение (1.3):

$$\lim_{h,\delta\to 0} \|x_{\alpha lm}^{h\delta} - x^*\|_X = 0.$$

В этом случае отображение $R_{h\delta} : L(X) \times X \to X$, где $R_{h\delta}(A_h, f_\delta) = x_{\alpha lm}^{h\delta}$, определяет регуляризующий алгоритм для задачи (1.1).

2. Уточним класс рассматриваемых далее уравнений (1.1) и порождающих функций $\Theta(\lambda,\alpha)$. Аналогично [3], [4], [11] предполагаем, что оператор A в (1.1) удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие 1. Для некоторых $\varphi_0 \in (0,\pi)$, $C_5 > 0$ выполняется включение

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg\lambda| < \varphi_0\} \cup \{0\} \tag{2.1}$$

и оценка

$$\|R(\lambda,A)\|_{L(X)} \le \frac{C_5}{|\lambda|} \quad \forall\lambda \in \mathbf{C} \setminus K(\varphi_0). \tag{2.2}$$

Некоторые классы операторов $A \in L(X)$, удовлетворяющих условию 1, приведены в [11]. Зафиксируем величину $R_0 > \|A\|_{L(X)}$. Нетрудно видеть, что $\sigma(A) \subset K(R_0,\varphi_0)$, где

$$K(R_0,\varphi_0) = K(\varphi_0) \cap S(R_0), \quad S(\rho) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le \rho\}.$$

Кроме того, оценка (2.2) с соответствующей постоянной C_5 выполняется при замене конуса $K(\varphi_0)$ на сектор $K(R_0,\varphi_0)$.

Сходимость приближений (1.8) будем исследовать в предположении приближенной истокопредставимости начальной невязки

$$x^* - \xi = A^p v + w, \quad v,w \in X, \quad p > 0, \quad \|w\|_X \le \Delta. \tag{2.3}$$

Здесь для оператора A, удовлетворяющего условию 1, и натурального показателя p степень A^p определяется стандартным образом: $A^p = A \cdot \ldots \cdot A$. В случае $p \in (0,1)$, следуя ([12], с. 156; [13]), полагаем

$$A^p = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int_0^\infty t^{p-1}(tE + A)^{-1} A dt. \tag{2.4}$$

В силу оценки (2.2) интеграл в правой части (2.4) сходится абсолютно и представляет оператор $A^p \in L(X)$. Наконец, для произвольного $p \in (n,n+1)$ и натурального n принимаем

$$A^p = A^{p-n}A^n \equiv A^n A^{p-n}. \tag{2.5}$$

Лемма 1 ([12], с. 155). *Пусть оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда для любого $\mu \in (0,1)$ имеет место оценка*

$$\|A_\varepsilon^\mu - A^\mu\|_{L(X)} \le C_6 \varepsilon^\mu \quad \forall\varepsilon > 0,$$

где $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$ и постоянная $C_6 = C_6(\mu)$ не зависит от ε.

В дополнение к условию 1 будем предполагать выполненным следующее

Условие 2. Для любого $\alpha \in (0,\alpha_0]$ порождающая функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ аналитична по λ на открытом множестве $D_\alpha \subset \mathbf{C}$ таком, что

$$K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0) \subset D_\alpha, \tag{2.6}$$

где $K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0) = K(R_0,\varphi_0) \cup S(d_0\alpha)$, $d_0 \in (0,1)$ — фиксированная постоянная.

Обозначим через γ_α границу множества $K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$. Зафиксируем положительно ориентированный контур $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ так, чтобы Γ_α содержал внутри контур γ_α и не содержал точку $\lambda = -d_1\alpha$ с некоторым $d_1 > d_0$. Согласно (2.1), (2.6) оператор $\Theta(A,\alpha)$ в (1.4) может быть представлен в виде

$$\Theta(A,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \Theta(\lambda,\alpha) R(\lambda,A) d\lambda, \quad \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{2.7}$$

3. Перейдем к исследованию сходимости приближений (1.8). Вначале покажем, что при достаточно больших l, m и достаточно малом $h > 0$ функция $\Theta(Q_m A_h P_l,\alpha)$ оператора $Q_m A_h P_l$ наряду с $\Theta(A,\lambda)$ может быть определена по формуле (2.7).

Лемма 2. *Пусть оператор A удовлетворяет условию 1 и выполняется неравенство*

$$\frac{C_7(h+\eta_l+\omega_m)}{d_0\alpha} \le \omega, \tag{3.1}$$

где $C_7 = C_5 \max\{C_1C_2, C_2C_3, C_4\}$; $\omega \in (0,1)$ — фиксированная постоянная. Тогда построенный указанным выше способом контур Γ_α охватывает спектр $\sigma(Q_mA_hP_l)$, поэтому для оператора $\Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)$ справедливо представление (2.7) с заменой A на $Q_mA_hP_l$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbf{C}\backslash \operatorname{int} K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$ по построению множества $K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$ имеем $|\lambda| \ge d_0\alpha$. Используя (1.2), (1.6), (1.7), (2.2), получаем

$$\begin{aligned}&\|(Q_mA_hP_l - A)R(\lambda,A)\|_{L(X)} \le \\ &\le \frac{C_5}{|\lambda|}(\|(E-Q_m)A\|_{L(X)} + C_1C_2\|A_h - A\|_{L(X)} + C_2\|A(E-P_l)\|_{L(X)}) \le \frac{C_7(h+\eta_l+\omega_m)}{d_0\alpha} \le \omega < 1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Следовательно, в силу теоремы из ([6], с. 141) $\lambda \in \rho(Q_mA_hP_l)$. Таким образом, контур Γ_α содержит внутри все точки спектра $\sigma(Q_mA_hP_l)$. $\square$

Условие (3.1) всюду в дальнейшем предполагается выполненным. Из (1.8) и (2.3) следует

$$\begin{aligned}x_{\alpha lm}^{h\delta} - x^* &= -(E - \Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)Q_mA_hP_l)(x^*-\xi) - \Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)Q_m(A_hP_lx^* - f_\delta) = \\ &= -\Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)Q_m[(A_h-A)P_lx^* + (f-f_\delta) - A(E-P_l)x^*] - \\ &\qquad - (E - \Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)Q_mA_hP_l)(A^pv + w).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначим через $n = [p]$ и $\nu = p - n$ целую и дробную части p соответственно. Согласно (2.5) $A^p = A^nA^\nu$. Из (3.3) с учетом (1.2), (1.6), (1.7), (2.3) получаем оценку

$$\begin{aligned}\|x_{\alpha lm}^{h\delta} - x^*\|_X &\le C_8\|\Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)\|_{L(X)}(h+\delta+\eta_l) + \\ &+ \|(E - \Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)Q_mA_hP_l)A^pv\|_X + \|E - \Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)Q_mA_hP_l\|_{L(X)}\Delta.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Оценим по отдельности каждое слагаемое в правой части неравенства (3.4). В силу леммы 2 имеем

$$\|\Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)\|_{L(X)} \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\alpha} |\Theta(\lambda,\alpha)|\,\|R(\lambda, Q_mA_hP_l)\|_{L(X)}|d\lambda| \quad \forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{3.5}$$

Норму, стоящую под знаком интеграла в (3.5), оценим, используя соотношения (2.2), (3.2) и предложение 2 из [14] (лемма 5.2 из [15]):

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, Q_mA_hP_l)\|_{L(X)} &\le \|R(\lambda,A)\|_{L(X)}\sum_{k=o}^{\infty}\|(Q_mA_hP_l - A)R(\lambda,A)\|_{L(X)}^k \le \\ &\le \frac{C_5}{|\lambda|(1-\omega)} \quad \forall\lambda\in\Gamma_\alpha, \quad \forall\alpha\in(0,\alpha_0].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) следует

$$\|\Theta(Q_mA_hP_l,\alpha)\|_{L(X)} \le \frac{C_5}{2\pi(1-\omega)}\int_{\Gamma_\alpha}\frac{|\Theta(\lambda,\alpha)|}{|\lambda|}|d\lambda| \quad \forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{3.7}$$

В связи с полученной оценкой введем следующее дополнительное условие на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$.

Условие 3. Для всех $\alpha\in(0,\alpha_0]$ имеет место оценка

$$\int_{\Gamma_\alpha}\frac{|\Theta(\lambda,\alpha)|}{|\lambda|}|d\lambda| \le \frac{C_9}{\alpha}.$$

Учитывая условие 3, из (3.7) получаем

$$\|\Theta(Q_m A_h P_l, \alpha)\|_{L(X)} \le \frac{C_{10}}{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{3.8}$$

Для второго слагаемого в (3.4) справедлива оценка

$$\|(E - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l) A^p v\|_X \le \|(E - \Theta(A, \alpha) A) A^p v\|_X + \\ + \|(\Theta(A, \alpha) A - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l) A^p v\|_X. \tag{3.9}$$

Будем предполагать выполненным

Условие 4. Для всех $s \in [0, p]$ имеет место оценка

$$\int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\, |\lambda|^{s-1} |d\lambda| \le C_{11} \alpha^s \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{3.10}$$

где $C_{11} = C_{11}(p)$.

Положим $\varepsilon = d_1 \alpha$. Поскольку согласно сказанному в конце п. 2 контур Γ_α не проходит через точку $\lambda = -\varepsilon$ и не содержит ее внутри, из (2.2), (3.10) на основании (1.5) и леммы 1 получаем

$$\|(E - \Theta(A, \alpha) A) A^p v\|_X \le \|(E - \Theta(A, \alpha) A) A^n (A + \varepsilon E)^\nu v\|_X + \\ + \|(E - \Theta(A, \alpha) A) A^n ((A + \varepsilon E)^\nu - A^\nu) v\|_X \le \\ \le \frac{1}{2\pi} \|v\|_X \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\, |\lambda|^n |\lambda + \varepsilon|^\nu \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} |d\lambda| + \\ + \frac{C_6}{2\pi} \varepsilon^\nu \|v\|_X \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\, |\lambda|^n \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} |d\lambda| \le \\ \le C_{12} \|v\|_X \left(\int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| (|\lambda|^{p-1} + \varepsilon^\nu |\lambda|^{n-1}) |d\lambda| + \right. \\ \left. + \varepsilon^\nu \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| |\lambda|^{n-1} |d\lambda| \right) \le C_{13} \|v\|_X \alpha^p. \tag{3.11}$$

Далее находим

$$\|(\Theta(A, \alpha) A - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l) A^p v\|_X \le \\ \le \|(\Theta(A, \alpha) A - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l) A^n (A + \varepsilon E)^\nu v\|_X + \\ + \|(\Theta(A, \alpha) A - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l) A^n ((A + \varepsilon E)^\nu - A^\nu) v\|_X. \tag{3.12}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (3.12). На основании (1.5) и леммы 2 имеем

$$\|(\Theta(A, \alpha) A - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l) A^n (A + \varepsilon E)^\nu v\|_X \le \\ \le \frac{1}{2\pi} \|v\|_X \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\, \|(R(\lambda, A) - R(\lambda, Q_m A_h P_l)) A^n (A + \varepsilon E)^\nu\|_{L(X)} |d\lambda|. \tag{3.13}$$

Используя (1.2), (1.6), (1.7), (2.2), (3.2) и предложение 2 из [14] (см. также лемму 5.2 из [15]), получаем

$$\|(R(\lambda, A) - R(\lambda, Q_m A_h P_l)) A^n (A + \varepsilon E)^\nu\|_{L(X)} \le \\ \le \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (R(\lambda, A)(Q_m A_h P_l - A))^k R(\lambda, A) A^n (A + \varepsilon E)^\nu \right\|_{L(X)} \le \\ \le \frac{C_{14}(h + \eta_l + \omega_m)}{(1 - \omega)|\lambda|} \|R(\lambda, A) A^n\|_{L(X)} \quad \forall \lambda \in \Gamma_\alpha, \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Заметим, что для любого оператора $A \in L(X)$ и натурального $n = [p]$ имеет место оценка

$$\|R(\lambda, A)A^n\|_{L(X)} \leq C_{15} g_p(|\lambda|), \quad g_p(t) = \begin{cases} t^{-1}, & [p] = 0; \\ 1, & [p] > 0, \end{cases} \quad p > 0.$$

В силу последнего неравенства из (3.10) (при $s = 0$) и (3.13) следует

$$\|(\Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l - \Theta(A, \alpha) A) A^n (A + \varepsilon E)^\nu v\|_X \leq \\ \leq C_{16} \|v\|_X g_p(\alpha)(h + \eta_l + \omega_m) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \quad (3.14)$$

С учетом (1.2), (1.6), (1.7), (3.2), условия 4 и леммы 1 второе слагаемое в правой части (3.12) оценим следующим образом:

$$\|(\Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l - \Theta(A, \alpha) A) A^n ((A + \varepsilon E)^\nu - A^\nu) v\|_{L(X)} \leq \\ \leq C_{17} \|v\|_X \alpha^\nu \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \|(R(\lambda, A) - R(\lambda, Q_m A_h P_l)) A^n ((A + \varepsilon E)^\nu - A^\nu)\|_{L(X)} |d\lambda| \leq \\ \leq C_{17} \|v\|_X \alpha^\nu \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (R(\lambda, A)(Q_m A_h P_l - A))^k R(\lambda, A) A^n ((A + \varepsilon E)^\nu - A^\nu) \right\|_{L(X)} |d\lambda| \leq \\ \leq C_{18} \|v\|_X g_p(\alpha) \alpha^\nu (h + \eta_l + \omega_m). \quad (3.15)$$

Согласно (3.6), (3.10) (при $s = 0$) для третьего слагаемого в (3.4) имеем

$$\|E - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l\|_{L(X)} \leq C_{19} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \quad (3.16)$$

Объединяя (3.4), (3.8), (3.9), (3.11), (3.12), (3.14)–(3.16), окончательно приходим к оценке

$$\|x_{\alpha l m}^{h\delta} - x^*\|_X \leq C_{20} \left(\frac{h + \delta + \eta_l}{\alpha} + \|v\|_X (\alpha^p + g_p(\alpha)(h + \eta_l + \omega_m)) + \Delta \right). \quad (3.17)$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть выполняются условия 1–4 и для некоторого $x^* \in X^*(A, f)$ начальная невязка $x^* - \xi$ обладает истокообразным представлением (2.3). Предположим, что параметр регуляризации $\alpha = \alpha(h, \delta)$ и номера $l = l(h, \delta)$, $m = m(h, \delta)$ согласованы с погрешностями h, δ так, что выполняется неравенство (3.1) и, кроме того,*

$$\lim_{h,\delta \to 0} l(h, \delta) = \lim_{h,\delta \to 0} m(h, \delta) = \infty,$$

$$\alpha(h, \delta) \in (0, \alpha_0], \quad \lim_{h,\delta \to 0} \alpha(h, \delta) = \lim_{h,\delta \to 0} \frac{h + \delta + \eta_{l(h,\delta)}}{\alpha(h, \delta)} = 0.$$

Тогда для указанного x^* имеет место оценка (3.17) и

$$\lim_{h,\delta \to 0} \|x_{\alpha l m}^{h\delta} - x^*\|_X \leq C_{20} \Delta. \quad (3.18)$$

Неравенство (3.18) показывает, что при $\Delta = 0$, т. е. в случае $x^* - \xi \in \mathrm{Im}(A^p)$, отображение $R_{h\delta}(A_h, f_\delta) = x_{\alpha l m}^{h\delta}$ определяет регуляризующий алгоритм для задачи (1.1). В общем случае согласно (3.18) приближение $x_{\alpha l m}^{h\delta}$ асимптотически устойчиво при $h, \delta \to 0$ по отношению к малым вариациям истокообразного представления $x^* - \xi \in \mathrm{Im}(A^p)$, мерой которых служит величина $\Delta \geq 0$.

Заметим, что условие секториальности в теореме налагается только на точный оператор A, от аппроксимации A_h требуется лишь близость к A в смысле неравенства (1.2). Отметим также, что в процессе доказательства теоремы конечномерность подпространств N_l и M_m фактически не использовалась, поэтому ее результат остается в силе и в случаях $P_l = E$ либо $Q_m = E$, которые формально соответствуют выбору $l = l(h, \delta) = \infty$ либо $m = m(h, \delta) = \infty$. В этих случаях оценки (1.7) автоматически выполняются с $\eta_l = 0$ и $\omega_m = 0$ соответственно.

4. Рассмотрим несколько примеров реализации методов (1.8), отвечающих некоторым часто используемым семействам порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$. Непосредственно проверяется, что все рассматриваемые ниже функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяют условиям 2, 3.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1},$$

известную в теории линейных некорректных задач в качестве порождающей функции метода М.М. Лаврентьева ([16], с. 19). Согласно (1.8) нахождение приближения $x_{\alpha lm}^{h\delta}$ сводится к решению уравнения

$$(\alpha E + Q_m A_h P_l)(x_{\alpha lm}^{h\delta} - \xi) = Q_m(f_\delta - A_h P_l \xi). \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что $x_{\alpha lm}^{h\delta} - \xi \in M_m$. Для определенности примем $\dim M_m = m$, и пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ — базис подпространства M_m, так что

$$x_{\alpha lm}^{h\delta} = \xi + \sum_{i=1}^m c_i e_i. \tag{4.2}$$

Таким образом, нахождение $x_{\alpha lm}^{h\delta}$ сводится к вычислению коэффициентов c_i, $i = 1, \ldots, m$, в (4.2). Обозначим через I единичную $m \times m$-матрицу и положим $c = (c_i)_{i=1}^m$, $D = (d_{ij})_{i,j=1}^m$, $b = (b_i)_{i=1}^m$, где

$$Q_m A_h P_l e_i = \sum_{j=1}^m d_{ji} e_j, \quad Q_m(f_\delta - A_h P_l \xi) = \sum_{i=1}^m b_i e_i. \tag{4.3}$$

Используя введенные обозначения, из (4.1), (4.2) приходим к системе линейных уравнений $(\alpha I + D)c = b$ относительно неизвестных коэффициентов c_i, $i = 1, \ldots, m$. Из леммы 2 следует, что при выполнении (3.1) полученная система неособая.

Рассматриваемая в этом примере порождающая функция удовлетворяет условию 4 при всех $p \in (0, 1]$.

Пример 2. Функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right)^N\right), \quad N = 2, 3, \ldots,$$

известна как порождающая функция итерированного метода М.М. Лаврентьева ([16], с. 19). В данном случае схема (1.8) допускает следующую реализацию: $x_{\alpha lm}^{h\delta} = x_{\alpha lm}^{h\delta,N}$, где элементы последовательности $\{x_{\alpha lm}^{h\delta,k}\}_{k=0}^N$ вычисляются итерационно:

$$x_{\alpha lm}^{h\delta,0} = \xi, \quad (\alpha E + Q_m A_h P_l)(x_{\alpha lm}^{h\delta,k} - x_{\alpha lm}^{h\delta,k-1}) = Q_m(f_\delta - A_h P_l x_{\alpha ml}^{h\delta,k-1}), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{4.4}$$

Аналогично (4.2) примем

$$x_{\alpha lm}^{h\delta,k} = \xi + \sum_{i=1}^m c_i^{(k)} e_i \tag{4.5}$$

и обозначим $c^{(k)} = (c_i^{(k)})_{i=1}^m$. Из (4.4), (4.5) получаем рекуррентную схему для определения вектора $c^{(N)}$

$$c^{(0)} = 0; \quad (\alpha I + D)c^{(k)} = b + \alpha c^{(k-1)}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{4.6}$$

В данном случае реализация схемы (1.8) сводится к последовательному решению N неособых систем линейных уравнений (4.6). Непосредственно проверяется, что условие 4 в данном случае выполняется для всех $p \in (0, N]$.

Пример 3. Функция

$$\Theta(\lambda,\alpha)=\begin{cases}\lambda^{-1}(1-e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}), & \lambda\neq 0;\\ \alpha^{-1}, & \lambda=0\end{cases}$$

является порождающей для метода установления ([16], с. 27). Приближенное решение $x_{\alpha lm}^{h\delta}$, определяемое (1.8), имеет вид $x_{\alpha lm}^{h\delta}=u(\alpha^{-1})$, где X-значная функция $u=u(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}+Q_mA_hP_lu=Q_mf_\delta,\\ u(0)=\xi.\end{gathered}\tag{4.7}$$

Решение задачи (4.7) ищем в виде

$$u(t)=\xi+\sum_{i=1}^{m}c_i(t)e_i,\quad c_i(0)=0,\quad i=1,\dots,m.$$

Подставив последнее выражение в (4.7), получим конечномерную задачу Коши для отыскания коэффициентов $c_i(t)$, $i=1,\dots,m$,

$$\begin{gathered}\frac{dc}{dt}+Dc(t)=b,\\ c(0)=0,\end{gathered}$$

где $c(t)=(c_i(t))_{i=1}^m$, матрица D и вектор b определены в (4.3). Непосредственно проверяется, что рассматриваемая в этом примере порождающая функция удовлетворяет условию 4 при всех $p\in(0,\infty)$.

Пример 4. Функция

$$\Theta(\lambda,\alpha)=\begin{cases}\lambda^{-1}(1-(1-\mu\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}), & \lambda\neq 0;\\ \mu\alpha^{-1}, & \lambda=0\end{cases}$$

в применении к линейным операторным уравнениям порождает простейший явный итерационный процесс ([16], с. 24). В данном случае в (1.8) полагаем $\alpha=1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots$ Возможна следующая реализация схемы (1.8) с этой порождающей функцией: $x_{\alpha lm}^{h\delta}=x_{\alpha lm}^{h\delta,n}$, где

$$x_{\alpha lm}^{h\delta,0}=\xi,\quad x_{\alpha lm}^{h\delta,k}=x_{\alpha lm}^{h\delta,k-1}-\mu Q_m(A_hP_lx_{\alpha lm}^{h\delta,k-1}-f_\delta),\quad k=1,\dots,n.\tag{4.8}$$

Будем искать элементы $x_{\alpha lm}^{h\delta,k}$, $k=0,\dots,n$, в виде (4.5). Для вычисления коэффициентов $c_i^{(n)}$, $i=1,\dots,m$, получается рекуррентная схема

$$c^{(0)}=0;\quad c^{(k)}=(I-\mu D)c^{(k-1)}+\mu b,\quad k=1,\dots,n.$$

Здесь $c^{(k)}=(c_i^{(k)})_{i=1}^m$, $k=1,\dots,n$. Рассматриваемая порождающая функция удовлетворяет условию 4 при всех $p\in(0,\infty)$.

Процедуры (4.1), (4.4), (4.7), (4.8) естественным образом упрощаются в случае $P_l=E$. Реализация этих процедур при таком выборе проекторов P_l по-прежнему сводится к решению систем линейных уравнений либо к решению задач Коши для линейной системы с постоянными коэффициентами.

5. В заключение конкретизируем вид последовательностей $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$ применительно к интегральному уравнению

$$(Ax)(t)\equiv\int_0^{2\pi}K(t,s)x(s)ds=f(t),\quad t\in[0,2\pi],\tag{5.1}$$

с оператором $A : L_r(0,2\pi) \to L_r(0,2\pi)$, $r \in (1,\infty)$, и комплексным пространством $L_r(0,2\pi)$. Предполагается, что ядро $K(t,s)$ удовлетворяет условиям K, $\frac{dK}{ds}$, $\frac{dK}{dt} \in C([0,2\pi]\times[0,2\pi])$. Пусть

$$c_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)e^{-iks}ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

— коэффициенты разложения функции $x = x(t)$ в ряд Фурье. Выберем в качестве P_l и Q_m проекторы Фурье

$$(Q_m x)(t) = (P_m x)(t) = \sum_{|k|\le m} c_k(x)e^{ikt}, \quad t \in [0,2\pi], \quad m = 0, 1, \ldots$$

Используя следствие 2 из ([8], с. 137), получаем

$$\|(E - Q_m)A\|_{L(L_r)} \le$$

$$\le C_{21} \sup_{\|x\|_{L_r}\le 1} \left\{ \sup_{0<h\le m^{-1}} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (K(t+h,s) - K(t,s))x(s)ds \right|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \le C_{22}(m+1)^{-1}.$$

Здесь для краткости обозначено $L_r = L_r(0,2\pi)$. В силу леммы из ([17], с. 164) имеем

$$\|A(E - P_l)\|_{L(L_r)} = \sup_{\|x\|_{L_r}\le 1} \left\| \int_0^{2\pi} K(t,s)x(s)ds - 2\pi \sum_{|k|\le l} c_k(x)c_{-k}(K(\cdot,t)) \right\|_{L_r} \le C_{23}(l+1)^{-1}.$$

Таким образом, в (1.7) в данном случае можно положить $\eta_l = (l+1)^{-1}$, $\omega_m = (m+1)^{-1}$.

Уточним вид последовательности $\{\omega_m\}$ в случае, когда в интегральном уравнении (5.1) оператор $A : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$, $P_l = E$, проектор Q_m соответствует линейной сплайн-аппроксимации ([18], с. 41) и имеет вид

$$(Q_m x)(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k(x)e_k(t), \quad t \in [0,2\pi], \quad m = 2, 3, \ldots$$

Здесь $c_k(x) = x(t_k)$, $t_k = 2\pi k/m$, $k = 0, 1, \ldots, m$, непрерывные на $[0,2\pi]$ и линейные на $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, m-1$, функции $e_k(t)$, $t \in [0,2\pi]$, $k = 0, \ldots, m$, определяются равенствами

$$e_0(t_0) = 1, \;\; e_0(t_1) = 0; \;\; e_m(t_m) = 1, \;\; e_m(t_{m-1}) = 0;$$
$$e_k(t_k) = 1, \;\; e_k(t_{k-1}) = e_k(t_{k+1}) = 0,$$

причем функции $e_0(t)$, $e_m(t)$, $e_k(t)$ нулевые вне отрезков $[t_0, t_1]$, $[t_{m-1}, t_m]$, $[t_{k-1}, t_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, m-1$, соответственно. Используя теорему 2.1 из ([18], с. 44), получаем

$$\|(E - Q_m)A\|_{L(C)} \le$$

$$\le C_{24} \sup_{\|x\|_C \le 1} \max_{\substack{0\le t, t+h\le 2\pi \\ 0<h\le 2\pi\cdot m^{-1}}} \left| \int_0^{2\pi} (K(t+h,s) - K(t,s))x(s)ds \right| \le C_{25}m^{-1}, m = 2, 3, \ldots,$$

где $C = C[0,2\pi]$. Таким образом, в (1.7) можно выбрать $\omega_m = m^{-1}$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 208 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
4. Бакушинский А.Б. *К проблеме построения линейных регуляризующих алгоритмов в банаховом пространстве* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13. – № 1. – С. 204–210.

5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Мир, 1979. – 592 с.
6. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 495 с.
7. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
8. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* – М.: Наука, 1984. – 496 с.
9. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
10. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 232 с.
11. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Условия истокопредставимости и скорость сходимости методов решения некорректных операторных уравнений.* I // Вычисл. методы и программиров. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – С. 64–84.
12. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
13. Balakrishnan A.V. *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them* // Pacif. J. Math. – 1960. – V. 10. – № 2. – P. 419–437.
14. Кокурин М.Ю. *Условие истокопредставимости и оценки скорости сходимости методов регуляризации линейных уравнений в банаховом пространстве.* I // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 8. – С. 51–59.
15. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. *Однопараметрические полугруппы.* – М.: Мир, 1992. – 352 с.
16. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 181 с.
17. Жук В.В., Кузютин В.Ф. *Аппроксимации функций и численное интегрирование.* – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. – 352 с.
18. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Марийский государственный университет

Поступила 05.10.2001