ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.956

*А.М. НИГМЕДЗЯНОВА*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

В данной работе строится фундаментальное решение и потенциалы типа простого и двойного слоев для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка. С помощью этих потенциалов краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

## 1. Формулы Грина

Пусть $\mathrm{E}_p^+$ — полупространство $x_p > 0$ $p$-мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p), x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$, $D$ — конечная область в $\mathrm{E}_p^+$, ограниченная открытой частью $\Gamma_0$ гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью $\Gamma$.

В $\mathrm{E}_p^+$ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$E[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0, \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 1$, $p \geq 3$.

Методом разделения переменных можно показать, что существует решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $x_p \to 0$.

Пусть функции $U, V \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$VE[U] + \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial V}{\partial x_p}\frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha V \frac{\partial U}{\partial x_p}\right). \tag{2}$$

Интегрируя обе части тождества (2) по области $D$ и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int_D VE[U]dx + \int_D \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial V}{\partial x_p}\frac{\partial U}{\partial x_p}\right)dx = \int_\Gamma VA[U]d\Gamma, \tag{3}$$

где

$$A[U] = \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, x_j)\frac{\partial U}{\partial x_j} + x_p^\alpha \cos(n, x_p)\frac{\partial U}{\partial x_p}$$

— конормальная производная, $n$ — внешняя нормаль к $\Gamma$. Формула (3) называется первой формулой Грина для оператора $E$. Меняя местами $U$ и $V$ в формуле (3), имеем

$$\int_D UE[V]dx + \int_D \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\frac{\partial V}{\partial x_p}\right)dx = \int_\Gamma UA[V]d\Gamma.$$

Вычитая это равенство из (3), получаем

$$\int_D [VE[U] - UE[V]]dx = \int_\Gamma [VA[U] - UA[V]]\, d\Gamma. \tag{4}$$

Формула (4) называется второй формулой Грина для оператора $E$.

Если функции $U$ и $V$ являются решениями уравнения (1) в области $D$, то из формулы (4) имеем

$$\int_\Gamma [VA[U] - UA[V]]\, d\Gamma = 0.$$

Полагая в формуле (3) $U = V$, получаем

$$\int_D \left( \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) dx = \int_\Gamma UA[U] d\Gamma.$$

Наконец, из формулы (3), полагая $V = 1$, будем иметь

$$\int_\Gamma A[U] d\Gamma = 0,$$

т. е. интеграл от конормальной производной решения уравнения (1) по границе $\Gamma$ равен нулю.

## 2. Фундаментальное решение

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$U(x) = (\rho_1^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)} \omega(\sigma), \tag{5}$$

где $\sigma = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$, $\beta = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}$, $\rho^2 = \sum\limits_{j=1}^{p-1} (x_j - x_{j_0})^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2} \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} - x_{p_0}^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2$, $\rho_1^2 = \sum\limits_{j=1}^{p-1} (x_j - x_{j_0})^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2} \times$ $\times \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} + x_{p_0}^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2$.

Подставляя функцию (5) в уравнение (1), получаем

$$\sigma(1-\sigma)\omega'' + \left[\frac{p}{2} - \left(\frac{p}{2} + 2\beta\right)\sigma\right]\omega' - \beta\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)\omega = 0. \tag{6}$$

Известно ([1], с. 40), что в окрестности точки $\sigma = 1$ уравнение (6) имеет два линейно-независимых решения. Одно из них имеет вид

$$\omega(x, x_0) = (1-\sigma)^{1-2\beta} F\left(1-\beta, \frac{p}{2} - \beta, 2 - 2\beta; 1-\sigma\right) =$$
$$= \sigma^{-\frac{p-2}{2}} (1-\sigma)^{1-2\beta} F\left(1-\beta, 2 - \frac{p}{2} - \beta, 2 - 2\beta; 1-\sigma\right). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получаем решение уравнения (1)

$$\mathcal{E}(x, x_0) = a(\rho_1^2)^{-\beta} (\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}} (1-\sigma)^{1-2\beta} F\left(1-\beta, 2 - \frac{p}{2} - \beta, 2 - 2\beta; 1-\sigma\right), \tag{8}$$

где $a$ — некоторая постоянная, $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция. Известно ([2], с. 280), что решение (8) может быть представлено в виде

$$\mathcal{E}(x,x_0) = a(\rho_1^2)^{-\beta}(\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}}(1-\sigma)^{1-2\beta}\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}F\left(1-\beta,2-\frac{p}{2}-\beta,2-\frac{p}{2};\sigma\right)+\right.$$
$$\left.+\sigma^{\frac{p-2}{2}}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}-\beta\right)}F\left(1-\beta,\frac{p}{2}-\beta,\frac{p}{2};\sigma\right)\right] = a(\rho_1^2)^{-\beta}\times$$
$$\times(\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}}(1-\sigma)^{1-2\beta}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}F\left(1-\beta,2-\frac{p}{2}-\beta,2-\frac{p}{2};\sigma\right)+$$
$$+a(\rho_1^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}(1-\sigma)^{1-2\beta}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}-\beta\right)}F\left(1-\beta,\frac{p}{2}-\beta,\frac{p}{2};\sigma\right). \tag{9}$$

Отсюда следует, что решение (9) имеет степенную особенность вида $\rho^{2-p}$ и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0$.

С помощью ряда Гаусса, разложения функций

$$(1-\sigma)^{1-2\beta} \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{(2-\alpha)^2\rho^2}{16\ (x_p x_{p_0})^{\frac{2-\alpha}{2}}}\right)^{-\beta}$$

при малых значениях $\rho$ в степенной ряд, фундаментальное решение (9) запишем в виде

$$\mathcal{E}(x,x_0) = \widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0) + \mathcal{E}^*(x,x_0), \tag{10}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0) = a\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}\ \frac{(2-\alpha)^{2\beta}(x_p x_{p_0})^{-\frac{\alpha}{4}}}{2^{4\beta}}(\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}},$$

$\mathcal{E}^*(x,x_0)$ — регулярная часть фундаментального решения $\mathcal{E}(x,x_0)$.

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{E}(\xi,x) = o(1) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,$$
$$x_p^\alpha\frac{\partial\mathcal{E}(\xi,x)}{\partial x_p} = O(1) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}(\xi,x)}{\partial x_p} = o(1) \quad \text{при} \quad \xi_p\to 0,$$
$$\mathcal{E}(x,x_0) = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \quad \text{при} \quad r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_p^2}\to\infty,$$
$$A[\mathcal{E}(x,x_0)] = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \quad \text{при } r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_p^2}\to\infty,$$

где $\rho_0^2 = \sum\limits_{j=1}^{p-1}x_j^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2}x_p^{2-\alpha}$.

## 3. Интегральное представление

Найдем теперь интегральное представление решения уравнения (1) в области $D$. Пусть $U(x)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ — решение уравнения (1) в области $D$ и удовлетворяет условию

$$U(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x_p\to 0. \tag{11}$$

Зададим в области $D$ произвольную точку $x_0$. Вырежем эту точку шаром $Q_{x_0\varepsilon}$. Радиус $\varepsilon$ возьмем столь малым, чтобы шар $Q_{x_0\varepsilon}$ целиком находился внутри области $D$. В области

$D_\varepsilon = D \setminus \overline{Q}_{x_0\varepsilon}$ фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, x_0)$ уравнения (1) (т. е. (10)) принадлежит классу $C^2(D_\varepsilon) \cap\ C^1(\overline{D}_\varepsilon)$. Применяя к функциям $U(x)$ и $\mathcal{E}(x, x_0)$ в области $D_\varepsilon$ вторую формулу Грина для оператора $E$ (4), получаем

$$\int_\Gamma [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]]\,d\Gamma = \int_{S_{x_0\varepsilon}} [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]]\,dS_{x_0\varepsilon}, \quad (12)$$

где $A$ — внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Переходя в формуле (12) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int_\Gamma [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]]\,d\Gamma = a(p-2)\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}\,\frac{(2-\alpha)^{2\beta}}{2^{4\beta}}\,U(x_0)\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Полагая в этой формуле

$$a = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}{4\pi^{\frac{p}{2}}\ \Gamma(2-2\beta)}\left(\frac{4}{2-\alpha}\right)^{2\beta},$$

получаем интегральное представление решения уравнения (1)

$$U(x_0) = \int_\Gamma [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]]\,d\Gamma. \quad (13)$$

## 4. Принцип максимума

Из интегрального представления (13) вытекает следующее свойство решения уравнения (1).

**Теорема 1** (принцип максимума). *Если функция $U(x)$ удовлетворяет условиям*

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}),$$
$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$
$$U(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x_p \to 0,$$

*то эта функция $U(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе $\Gamma$, если она тождественно не равна нулю.*

**Доказательство.** Пусть функция $U(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая уравнению (1) и условию (11), достигает своего наибольшего положительного значения $U_0$ в некоторой внутренней точке $M_0(x_0)$ области $D$, т. е. существует $\delta$-окрестность $Q_{x_0\delta}$ точки $x_0$ (шар), где

$$U(x) < U(x_0) = U_0 \quad \text{при} \quad x \neq x_0 \quad \text{и} \quad U(x) > 0. \quad (*)$$

Полагая в интегральном представлении (13) $\Gamma = S_{x_0\delta}$, где $S_{x_0\delta}$ — сфера с центром в точке $x_0$ радиуса $\delta$, получаем

$$U(x_0) = \int_{S_{x_0\delta}} \mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)]dS_{x_0\delta} - \int_{S_{x_0\delta}} U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]dS_{x_0\delta} = I_{1\delta} + I_{2\delta}. \quad (14)$$

Здесь конормаль $A$ внешняя по отношению к сфере $S_{x_0\delta}$, $\mathcal{E}(x, x_0) > 0$ и $U(x) > 0$ в силу $(*)$, поэтому $A[U(x)] < 0$, $A[\mathcal{E}(x, x_0)] < 0$ и, следовательно, $I_{1\delta} < 0$, $I_{2\delta} > 0$. В силу вышесказанного при $\delta \to 0$ интеграл $I_{1\delta}$, возрастая, стремится к нулю, а интеграл $I_{2\delta}$, возрастая, стремится к $U_0$. Отсюда следует, что

$$I_{1\delta} < 0 \quad \text{и} \quad I_{2\delta} < U_0. \quad (15)$$

Заменяя в правой части формулы (14) во втором интеграле $U(x)$ на $U_0$ и учитывая оценки (15), получаем $U_0 < I_{2\delta} < U_0$, т. е. $U_0 \neq U_0$.

Полученное противоречие доказывает справедливость первого утверждения теоремы. Второе утверждение доказывается переходом от $U$ к $-U$. При этом наименьшее отрицательное значение переходит в наибольшее положительное значение. $\square$

**Следствие.** Если функция $U(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (11), то $|U(x)| \leq \max\limits_{x_0 \in \Gamma} |U(x_0)|$, $x \in D$. В частности, если $U(x)|_\Gamma = 0$, то $U(x) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

## 5. Постановка краевых задач типа Дирихле и Неймана. Теоремы единственности

*Внутренняя задача типа Дирихле* (*задача* $D_i$). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}), \tag{16}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D, \tag{17}$$

$$U(x) = o(1) \ \text{ при } \ x_p \to 0, \tag{18}$$

$$U|_\Gamma = f(x), \quad f(x) \in C(\Gamma). \tag{19}$$

**Теорема 2.** *Внутренняя краевая задача типа Дирихле* (16)–(19) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство следует из теоремы о принципе максимума.

*Внешняя задача типа Дирихле* (*задача* $D_e$). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(\overline{D_e}), \tag{20}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D_e, \tag{21}$$

$$U(x) = o(1) \ \text{ при } \ x_p \to 0, \tag{22}$$

$$U(x) = O\big((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\big) \ \text{ при } \ r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \to \infty, \tag{23}$$

$$U|_\Gamma = f(x), \quad f(x) \in C(\Gamma). \tag{24}$$

Доказательство также следует из теоремы о принципе максимума.

**Теорема 3.** *Внешняя краевая задача типа Дирихле* (20)–(24) *не может иметь более одного решения.*

*Внутренняя задача типа Неймана* (*задача* $N_i$). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \tag{25}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D, \tag{26}$$

$$U(x) = o(1) \ \text{ при } \ x_p \to 0, \tag{27}$$

$$A[U(x)]|_\Gamma = \varphi(x), \quad f(x) \in C(\Gamma); \tag{28}$$

здесь $A$ — внешняя конормаль.

**Теорема 4.** *Внутренняя краевая задача типа Неймана* (25)–(28) *не может иметь более одного решения.*

*Внешняя задача типа Неймана* (*задача* $N_e$). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D_e}), \tag{29}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D_e, \tag{30}$$

$$U(x) = o(1) \ \text{ при } \ x_p \to 0, \tag{31}$$

$$U(x) = O\big((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\big) \ \text{ при } \ r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \to \infty, \tag{32}$$

$$A[U(x)]\big|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C(\Gamma); \tag{33}$$

здесь $A$ — конормаль, направленная во вне области $\overline{D}$.

**Теорема 5.** *Внешняя краевая задача типа Неймана* (29)–(33) *не может иметь более одного решения.*

**Доказательство.** Пусть $U_1(x)$ и $U_2(x)$ — два решения задачи типа Неймана. Тогда их разность $\omega(x) = U_2(x) - U_1(x)$ удовлетворяет условиям (29)–(32) и граничному условию

$$A[\omega]\big|_{\Gamma} = 0. \tag{$33_0$}$$

Так как $D$ — конечная область, то существует число $R$ такое, что $D$ принадлежит полушару $Q_R^+$ радиуса $R$. Обозначим через $D_{eR} = Q_R^+ \setminus \overline{D}$.

Применяя к функциям $U = \omega$ и $V = \omega$ первую формулу Грина (3) в области $D_{eR}$, с учетом условий (31) и ($33_0$) получаем

$$\int_{D_{eR}} \left( \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + x_p^{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial x_p} \frac{\partial \omega}{\partial x_p} \right) dx = \int_{S_R^+} \omega A[\omega] dS_R^+. \tag{34}$$

Из условия (32) следует

$$\omega A[\omega] = O\big((\rho_0^2)^{-\left(p-2+\frac{4-3\alpha}{(2-\alpha)}\right)}\big).$$

Поэтому $\int\limits_{S_R^+} \omega A[\omega] dS_R^+ \longrightarrow 0$ при $R \to \infty$.

Переходя в формуле (34) к пределу при $R \to \infty$, с учетом последнего условия получаем

$$\int_{D_e} \left( \sum_{j=1}^{p-1} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^2 + x_p^{\alpha} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_p} \right)^2 \right) dx = 0,$$

откуда $\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1,p} \Rightarrow \omega = \mathrm{const} = c$. Учитывая, что функция $\omega$ на бесконечности стремится к нулю, получаем $c = 0$ и $U \equiv 0$ в $D_e$, а значит, $U_1 \equiv U_2$. $\square$

## 6. Потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (1) и их свойства

С помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(\xi, x)$ уравнения (1) образуем поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев:

$$V(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \mathcal{E}(\xi, x) d\Gamma, \tag{35}$$

$$W(x) = \int_{\Gamma} \nu(\xi) A\Big[\mathcal{E}(\xi, x)\Big] d\Gamma,$$

где $A[\ \ ] = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \xi_p^{\alpha} \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$, а $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ — непрерывные функции на $\Gamma$.

**Теорема 6** (формула скачка). *Если поверхность Ляпунова* $\Gamma$ *образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то*

$$\int_{\Gamma} A[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in D, \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } x \in \mathrm{E}_p^+ \setminus \overline{D} = D_e. \end{cases} \tag{36}$$

Из свойств фундаментального решения следует, что фундаментальное решение имеет такие же особенности, что и фундаментальное решение уравнения Лапласа. Поэтому имеют место следующие теоремы.

**Теорема 7.** *Пусть поверхность Ляпунова* $\Gamma$ *образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда если* $\nu \in C(\Gamma)$, *то имеют место следующие предельные соотношения*:

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)}, \quad W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},$$

*где* $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *при* $x \to x_0$ *соответственно изнутри и извне границы* $\Gamma$, *а* $\widetilde{W(x_0)}$ *— прямое значение потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$. *Здесь* $x_0 \in \Gamma$ *— фиксированная точка границы* $\Gamma$, $\nu_0 = \nu(x_0)$.

**Теорема 8.** *Пусть поверхность Ляпунова* $\Gamma$ *образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Если плотность* $\mu \in C(\Gamma)$, *то потенциал типа простого слоя* $V(x)$ *непрерывен в* $\mathrm{E}_p^+$.

Рассмотрим конормальную производную потенциала типа простого слоя (35) в точке $x_0 \in \Gamma$:

$$A_{x_0}[V] = \int_\Gamma \mu(\xi) A_{x_0}[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma.$$

**Теорема 9.** *Пусть поверхность Ляпунова* $\Gamma$ *образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения*:

$$A_{x_0}[V(x_0)]_i = \frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{x_0}[V(x_0)]}, \quad A_{x_0}[V(x_0)]_e = -\frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{x_0}[V(x_0)]},$$

*где* $A_{x_0}[V(x_0)]_i$ *и* $A_{x_0}[V(x_0)]_e$ *— предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* $\Gamma$, $\mu_0 = \mu(x_0)$, *а* $\widetilde{A_{x_0}[V(x_0)]}$ *— прямое значение конормальной производной потенциала типа простого слоя.*

## 7. Сведение задач типа Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям теории потенциала

*Задача* $D_i$. Решение задачи $D_i$ будем искать в виде потенциала типа двойного слоя

$$U(x) = W(x) = \int_\Gamma \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma. \tag{37}$$

Очевидно, функция $U(x)$ удовлетворяет условиям (16)–(18) внутренней задачи типа Дирихле. Плотность $\nu(\xi)$ — пока неопределенная функция. Потребуем, чтобы функция (37) удовлетворяла граничному условию (19) задачи $D_i$. С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (19) и, учитывая формулу предельного значения потенциала типа двойного слоя (теорема 7), получим

$$\nu(x) - 2\int_\Gamma \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = -2\ f(x). \tag{38}$$

Аналогично выводятся интегральные уравнения, соответствующие задачам $D_e$, $N_i$ и $N_e$. Они имеют вид

$$\nu(x) + 2\int_\Gamma \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = 2f(x), \tag{39}$$

$$\mu(x) + 2\int_\Gamma \mu(\xi) A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = 2\varphi(x), \tag{40}$$

$$\mu(x) - 2\int_\Gamma \mu(\xi) A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = -2\varphi(x). \tag{41}$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (38)–(41).

1) Из формулы (10) следует, что эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

2) Ядра $A[\mathcal{E}(\xi, x)$ и $-A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]$ получаются друг из друга перестановкой точек $\xi$ и $x$. Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные. Отсюда следует, что уравнения (38) и (41), (39)

и (40) — попарно сопряженные интегральные уравнения. Следовательно, для них справедливы все теоремы Фредгольма.

## 8. Исследование двух попарно сопряженных интегральных уравнений

1. Докажем, что интегральные уравнения (38) и (41), соответствующие задачам $D_i$ и $N_e$, разрешимы единственным образом при любых непрерывных функциях $\varphi(x), f(x) \in C(\Gamma)$. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение задачи $N_e$

$$\mu(x) - 2\int_\Gamma \mu(\xi) A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = 0. \tag{42}$$

Пусть $\overline{\mu(\xi)}$ — ненулевое решение этого уравнения. Тогда функция

$$\overline{U(x)} = \int_\Gamma \overline{\mu(\xi)} \mathcal{E}(\xi, x)\, d\Gamma$$

удовлетворяет условиям (29)–(32) внешней задачи типа Неймана и граничному условию $A_x[\overline{U(x)}]\big|_\Gamma = 0$, т. е.

$$A_x[\overline{U(x)}]_e = -\frac{\overline{\mu(x)}}{2} + \int_\Gamma \overline{\mu(\xi)} A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma \equiv 0. \tag{43}$$

По теореме 5 о единственности для внешней задачи $N_e$ $\overline{U(x)} \equiv 0$, $x \in D_e$.

Так как потенциал типа простого слоя (35) есть непрерывная функция во всем полупространстве (теорема 8), то

$$\overline{U(x)} \equiv 0, \quad x \in \Gamma. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь потенциал $\overline{U(x)}$ в области $D$. В этой области функция $\overline{U(x)}$ удовлетворяет уравнению (1) и в силу (44) обращается в нуль на границе $\Gamma$. По теореме 2 о единственности задачи $D_i$ $\overline{U(x)} \equiv 0$, $x \in D$. Тогда

$$A_x[\overline{U(x)}]_i = \frac{\overline{\mu(x)}}{2} + \int_\Gamma \overline{\mu(\xi)} A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma \equiv 0. \tag{45}$$

Вычитая из равенства (45) равенство (43), получаем $\overline{\mu(\xi)} \equiv 0$, $x \in D$.

Однородное интегральное уравнение (42) имеет, таким образом, только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (41) задачи $N_e$ однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $\varphi(x) \in C(\Gamma)$.

Таким образом, значение параметра $\lambda = 2$ — правильное для ядра $A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]$, по известной теореме Фредгольма является правильным и для сопряженного ядра $A[\mathcal{E}(\xi, x)]$.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (38) задачи $D_i$ однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $f(x) \in C(\Gamma)$.

Из разрешимости интегральных уравнений задач $D_i$ и $N_e$ следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

**Теорема 10.** *Если поверхность Ляпунова $\Gamma$ образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача $D_i$ для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных, и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.*

**Теорема 11.** *Если поверхность Ляпунова $\Gamma$ образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача $N_e$ для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных, и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.*

2. Значение параметра $\lambda = 2$, входящее в интегральные уравнения (39) и (40) — характеристическое для каждого из ядер $A[\mathcal{E}(\xi, x)]$ и $A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]$. Действительно, второе равенство из (36) показывает, что однородное интегральное уравнение задачи $D_e$

$$\nu(x) + 2\int_\Gamma \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = 0 \tag{46}$$

имеет нетривиальное решение $\overline{\nu(\xi_0)} = 1/2$, а это означает, что число $\lambda = 2$ — характеристическое для ядра $A[\mathcal{E}(\xi, x)]$. На основании известной теоремы Фредгольма это число будет характеристическим и для сопряженного ядра $A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]$. В таком случае однородное интегральное уравнение задачи $N_i$

$$\mu(x) + 2\int_\Gamma \mu(\xi) A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma = 0 \tag{47}$$

имеет по крайней мере, одно нетривиальное решение. Обозначим его через $\overline{\mu(\xi)}$.

Докажем, что уравнения (46) и (47) не имеют решений, линейно независимых с указанными выше решениями $\overline{\mu(\xi)}$ и $\overline{\nu(\xi)}$. В силу теоремы Фредгольма достаточно показать, что этим свойством обладает уравнение (47). Составим потенциал типа простого слоя с плотностью $\overline{\mu(\xi)}$

$$\overline{U(x)} = \int_\Gamma \overline{\mu(\xi)} \mathcal{E}(\xi, x)\, d\Gamma. \tag{48}$$

Из уравнения (47) следует, что $A_x[\overline{U(x)}] \equiv 0$ и $\overline{U(x)} \equiv 0$, $x \in D$, согласно теореме 4 о единственности задачи $N_i$.

В силу теоремы 8 о непрерывности потенциала типа простого слоя $\overline{U(x)} \equiv 0$ на $\Gamma$. В силу теоремы 3 о единственности задачи $D_e$ $\overline{U(x)} \equiv 0$, $x \in D_e$. Значит,

$$A[\overline{U(x)}] \equiv 0. \tag{49}$$

Из (48) и (49) и из формул предельного значения потенциалов типа простого слоя (теорема 9) следует, что $\overline{\mu(\xi_0)} \equiv 0$, а это противоречит нетривиальности решения $\overline{\mu(\xi_0)}$. Отсюда также следует, что если потенциал типа простого слоя в области $D$ тождественно равен нулю, то его плотность также тождественно равна нулю.

Пусть уравнение (47) имеет еще одно решение $\overline{\overline{\mu(\xi)}}$. Докажем, что решения $\overline{\mu(\xi)}$ и $\overline{\overline{\mu(\xi)}}$ линейно зависимы. Положим

$$\widetilde{\mu(\xi)} = \overline{\overline{\mu(\xi)}} + c\overline{\mu(\xi)}, \quad c = \mathrm{const} \neq 0. \tag{50}$$

Построим потенциал типа простого слоя

$$\widetilde{U(x)} = \int_\Gamma \widetilde{\mu(\xi)} \mathcal{E}(\xi, x)\, d\Gamma. \tag{51}$$

Ясно, что функция (51) удовлетворяет условиям (25)–(27) и граничному условию $A_x[\widetilde{U(x)}]\big|_\Gamma = 0$, т. е.

$$A_x[\widetilde{U(x)}]_i = \frac{\widetilde{\mu(x)}}{2} + \int_\Gamma \widetilde{\mu(\xi)} A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma \equiv 0. \tag{52}$$

Согласно теореме 4 о единственности для внутренней задачи $N_i$ $\widetilde{U(x)} \equiv 0$, $x \in D$. Так как потенциал типа простого слоя есть непрерывная функция во всем полупространстве (теорема 8), то

$$\widetilde{U(x)} \equiv 0, \quad x \in \Gamma. \tag{53}$$

Рассмотрим функцию (51) в области $D$. В этой области функция $\overline{U(x)}$ удовлетворяет условиям (20)–(23) и граничному условию (53). По теореме 3 о единственности задачи $D_e$ $\widetilde{U(x)} \equiv 0$, $x \in D_e$. Тогда

$$A_x[\widetilde{U(x)}]_e = -\frac{\widetilde{\mu(x)}}{2} + \int_\Gamma \widetilde{\mu(\xi)} A_x[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma \equiv 0. \tag{54}$$

Вычитая из равенства (52) равенство (54), получаем $\widetilde{\mu(\xi)} \equiv 0$. Отсюда и из (50) следует $\overline{\overline{\mu(\xi)}} = -c\overline{\mu(\xi)}$. Таким образом, любое решение уравнения (47) отличается от $\overline{\mu(\xi)}$ только постоянным множителем.

Рассмотрим теперь неоднородное интегральное уравнение (40) задачи $N_i$. В силу теоремы Фредгольма это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\xi)$ ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (46). Но это последнее уравнение имеет только одно линейно независимое решение $\overline{\nu(\xi_0)} = 1/2$. Таким образом, для разрешимости уравнения (40) необходимо и достаточно, чтобы $(\varphi, 1/2) = 0$ или

$$\int_\Gamma \varphi(\xi) d\xi = 0. \tag{55}$$

Если уравнение (40) имеет решение, то разрешима и задача $N_i$. Таким образом, условие (55) достаточно для того, чтобы задача $N_i$ была разрешимой, и мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 12.** *Если поверхность Ляпунова $\Gamma$ образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол и выполняется условие* (55)*, то задача $N_i$ для этой поверхности существует при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.*

Напомним, что условие (55) необходимо для того, чтобы существовало достаточно гладкое решение задачи $N_i$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (39) задачи $D_e$. Для разрешимости уравнения (39) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Gamma \overline{\mu(\xi)} f(\xi) d\xi = 0. \tag{56}$$

Если условие (56) выполнено, то интегральное уравнение (39) разрешимо; в этом случае существует решение внешней задачи типа Дирихле, представимое в виде потенциала типа двойного слоя и, следовательно, убывающее на бесконечности.

Если условие (56) нарушено, то не существует решения уравнения (39). Это не означает, однако, что задача $D_e$ неразрешима; можно лишь утверждать, что эта задача не имеет такого решения, которое можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.

*Решение задачи $D_e$.* Решение внешней задачи типа Дирихле ищем в виде

$$U(x) = \int_\Gamma \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)]\, d\Gamma + \frac{1}{\rho_0^{p-2+2\beta}} \int_\Gamma \nu(\xi)\, d\Gamma. \tag{57}$$

Функция (57) удовлетворяет условиям (20)–(23) внешней задачи типа Дирихле. Плотность $\nu(\xi)$ найдем из граничного условия (24) задачи $D_e$. С этой целью подставим (57) в это граничное условие и, учитывая предельное значение потенциала типа двойного слоя извне (теорема 7), получим

$$\nu(x) + 2\int_\Gamma \nu(\xi) \left[ A[\mathcal{E}(\xi, x)] + \frac{1}{\rho_0^{p-2+2\beta}} \right] d\Gamma = 2f(x). \tag{58}$$

Ядро уравнения (58) $\left[A[\mathcal{E}(\xi, x)] + \frac{1}{\rho_0^{p-2+2\beta}}\right]$, так же, как и ядро $A[\mathcal{E}(\xi, x)]$, имеет слабую особенность, и к этому уравнению можно применить теорию Фредгольма.

Докажем, что интегральное уравнение (58) однозначно разрешимо для всех непрерывных граничных функций. Достаточно доказать, что соответствующее однородное интегральное уравнение не имеет ненулевого решения.

Рассмотрим уравнение

$$\nu(x) + 2\int_\Gamma \nu(\xi)\left[A[\mathcal{E}(\xi,x)] + \frac{1}{\rho_0^{p-2+2\beta}}\right] d\Gamma = 0. \tag{59}$$

Пусть $\overline{\nu(\xi)}$ — предполагаемое ненулевое решение. Рассмотрим

$$\overline{U} = \int_\Gamma \overline{\nu(\xi)}\left[A[\mathcal{E}(\xi,x)] + \frac{1}{\rho_0^{p-2+2\beta}}\right] d\Gamma.$$

Здесь функция $\overline{U}$ удовлетворяет условиям (20)–(23) внешней задачи типа Дирихле и в силу (59)

$$\overline{U}|_\Gamma = 0.$$

В силу теоремы 3 о единственности задачи $D_e$ $\overline{U} \equiv 0$ в $D_e$, т. е.

$$\int_\Gamma \overline{\nu(\xi)} A[\mathcal{E}(\xi,x)]\, d\Gamma + \int_\Gamma \overline{\nu(\xi)} \frac{1}{\rho_0^{p-2+2\beta}}\, d\Gamma = 0. \tag{60}$$

Умножим (60) на $\rho_0^{p-2+2\beta}$ и перейдем к пределу при $\rho_0^{p-2+2\beta} \to \infty$ (тогда в пределе первое слагаемое равно нулю), получаем

$$\int_\Gamma \overline{\nu(\xi)} d\Gamma = 0. \tag{61}$$

Таким образом, любое ненулевое решение уравнения (59) удовлетворяет условию (61). Тогда (59) упрощается и примет вид

$$\overline{\nu(x)} + 2\int_\Gamma \overline{\nu(\xi)} A[\mathcal{E}(\xi,x)]\, d\Gamma = 0. \tag{62}$$

Как было доказано выше, уравнение (62) имеет лишь одно линейно независимое решение $\overline{\nu} = 1/2$. В таком случае его общее решение $\overline{\nu} = c = \mathrm{const}$, где постоянная $c$ должна удовлетворять условию (61). Значит, $c = 0$. Следовательно, однородное интегральное уравнение (59) имеет только нулевое решение, а по теореме Фредгольма неоднородное уравнение (58) разрешимо и вместе с ним разрешима и задача $D_e$.

Таким образом, доказана

**Теорема 13.** *Если поверхность Ляпунова $\Gamma$ образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача $D_e$ однозначно разрешима при любых граничных данных и решение можно представить в виде* (57).

## Литература


1. Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.* – М.: Наука, 1966. – 292 с.
2. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* – Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: “Лань”, 2003. – 832 с.



*Казанский государственный педагогический университет*



*Поступила* 22.11.2005