ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.993

А.Н. КАРАПЕТЯНЦ, В.А. НОГИН

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

В работе получено описание анизотропных пространств

$$L^{\overline{\alpha}}_{p,r} \equiv L^{\overline{\alpha}}_{p,r}(\mathbb{R}^n) = \{f(x) : \|f\|_{L^{\overline{\alpha}}_{p,r}} \equiv \|f\|_r + \|F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + \cdots + |\xi_n|^{\alpha_n})Ff\|_p < \infty\}, \tag{1}$$
$$1 < p < \infty, \ \ 1 \le r < \infty, \ \ \overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \ \ \operatorname{Re}\alpha_j > 0, \ \ j = 1, \dots, n,$$

F — преобразование Фурье, понимаемое в соответствующем смысле. При вещественных α_j и $r = p$ пространства (1) совпадают с введенными и исследованными П.И. Лизоркиным (см. [1]–[4] и [5]) пространствами p-суммируемых функций, имеющих в L_p обобщенные лиувиллевские производные $D^{\alpha_j} f$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, по переменным x_j соответственно. В случае $r \ne p$ и $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha > 0$ пространства $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ были изучены С.Г. Самко (см. [6], [7] и [8], [9]). В анизотропном случае пространства $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$, а также пространства, совпадающие с ними с точностью до эквивалентности норм, при вещественных α_j изучались в [10], [11] (см. также [12]–[14], где рассматривалась анизотропность более общего характера). В указанных работах описание класса $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ было дано в терминах гиперсингулярных интегралов (ГСИ), введенных П.И. Лизоркиным в [3] (и их модификаций).

Интерес, проявленный нами к пространствам $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, обусловлен, в частности, тем, что они содержат классические пространства бесселевых, риссовых, параболических потенциалов комплексного порядка. Принципиальное отличие случая комплексных α_j состоит в том, что для исследования пространств $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ неприменимы, вообще говоря, использовавшиеся в [1]–[11] и традиционные в таких вопросах методы, базирующиеся на технике p-мультипликаторов. Это связано с необходимостью деления на функцию $|\xi_1|^{\alpha_1} + \cdots + |\xi_n|^{\alpha_n}$, которая в случае комплексных α_j таких, что $\Delta_{jk} = \operatorname{Im}\alpha_j \operatorname{Re}\alpha_k - \operatorname{Im}\alpha_k \operatorname{Re}\alpha_j \ne 0$ хотя бы для двух индексов j и k, имеет нули в $\mathbb{R}^n$, отличные от начала координат (напр., при $n = 2$ координаты нулей функции $|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_2}$ в случае $\Delta_{12} \ne 0$ находятся из равенств: $|\xi_1| = \exp\{\pi(2k+1)\operatorname{Re}\alpha_2/\Delta_{12}\}$, $|\xi_2| = \exp\{\pi(2k+1)\operatorname{Re}\alpha_1/\Delta_{12}\}$, $k \in \mathbb{Z}$). В частности, для описания классов $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ неприменим метод ГСИ (вообще не ясно, как определить эти конструкции). Здесь используется другой (аппроксимативный) подход, применявшийся ранее при обращении операторов типа потенциала с L_p-плотностями (см. обзорную статью [15] и имеющуюся там библиографию). В рамках этого подхода описание дано в терминах условно сходящихся (по L_p-норме) сверточных операторов с суммируемыми ядрами, выражаемыми через элементарные функции (в отличие от описания в терминах анизотропных ГСИ при вещественных α_j; см. ниже замечание 2).

Будем использовать обозначения: $P_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$, $x \in \mathbb{R}^1$, — ядро Пуассона в $\mathbb{R}^1$; $\langle f, \omega\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\omega(x)dx$; $(Ff)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ix\xi}dx$ — преобразование Фурье функции $f(x)$; $(F^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi$ — обратное преобразование Фурье; $S = S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Л. Шварца быстро убывающих гладких функций; Ψ_v, $v \subset \mathbb{R}^n$, — введенный и исследованный в [16]–[19]

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 94-01-00577-А).

(см. также [8], § 3) класс шварцевых функций, исчезающих вместе со всеми своими производными на множестве v; топология в пространстве Ψ_v задается счетным набором согласованных сравнимых норм:

$$\|\omega\|_N = \sup_{\substack{|k|\leq N \\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus v}} [\max\{(1+|\xi|^2)^{1/2},\ 1/\rho(\xi,v)\}]^n |(\mathcal{D}^k\omega)(\xi)|, \quad N=0,1,2,\ldots,$$

где $\rho(\xi,v)=\min\limits_{\eta\in v}|\xi-\eta|$; $\Phi_v = F^{-1}(\Psi_v)$ — пространство прообразов Фурье функций из Ψ_v. Если v — совокупность координатных гиперплоскостей, то будем писать $\Psi_v=\Psi$, $\Phi_v=\Phi$; пространства Φ, Ψ были введены и изучены П.И. Лизоркиным ([1]–[4]). Через $BC^m = BC^m(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать класс функций, ограниченных вместе со всеми своими производными до m-го порядка включительно. Под z^α, $\alpha\in\mathbb{C}$, будем понимать главную ветвь ($k=0$) многозначной функции $z^\alpha=\exp\{\alpha(\ln|z|+i\arg z+2\pi ki)\}$, являющуюся аналитической функцией в плоскости с разрезом по отрицательной вещественной полуоси.

I. Описание пространств $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ в терминах аппроксимативных операторов

Пространство $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ определим соотношением (1), понимая в нем преобразование Фурье в смысле Ψ'-распределений. Такое определение корректно, поскольку функция $|\xi_1|^{\alpha_1}+\cdots+|\xi_n|^{\alpha_n}$ является мультипликатором в Ψ. Для $\alpha_j\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha_j>0$ и $\varepsilon>0$ положим

$$R_{\overline{\alpha},\varepsilon}(x) = (F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1}+\cdots+|\xi_n|^{\alpha_n})e^{-\varepsilon|\xi_1|-\cdots-\varepsilon|\xi_n|})(x).$$

В силу формулы

$$R_{\alpha,\varepsilon}(|x|) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} |\xi|^\alpha e^{-\varepsilon|\xi|}e^{-ix\xi}d\xi = (\Gamma(\alpha+1)/2\pi)[(\varepsilon-i|x|)^{-\alpha-1}+(\varepsilon+i|x|)^{-\alpha-1}]$$

получаем

$$R_{\overline{\alpha},\varepsilon}(x) = \sum_{j=1}^n R_{\alpha_j,\varepsilon}(|x_j|)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n P_\varepsilon(x_k). \tag{2}$$

Нетрудно показать, что $R_{\overline{\alpha},\varepsilon}(x)\in L_1(\mathbb{R}^n)$. Положим далее

$$(T^{\overline{\alpha}}_\varepsilon f)(x) = (R_{\overline{\alpha},\varepsilon} * f)(x). \tag{3}$$

Основной результат статьи составляет

Теорема 1. *Пусть* $1\leq p\leq 2$, $1\leq r\leq 2$, $\operatorname{Re}\alpha_j>0$. *Тогда*

$$L^{\overline{\alpha}}_{p,r} = \{f(x) : f\in L_r,\ T^{\overline{\alpha}}f\in L_p\}, \tag{4}$$

где

$$T^{\overline{\alpha}}f = \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}(T^{\overline{\alpha}}_\varepsilon f)(x). \tag{5}$$

Кроме того, $\|f\|_{L^{\overline{\alpha}}_{p,r}} = \|f\|_r + \|T^{\overline{\alpha}}f\|_p$.

Доказательство. Пусть $f(x)\in L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$. Покажем, что

$$(T^{\overline{\alpha}}_\varepsilon f)(x) = (P_\varepsilon\varphi)(x), \quad \varphi = F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1}+\cdots+|\xi_n|^{\alpha_n})Ff\in L_p, \tag{6}$$

где $(P_\varepsilon\varphi)(x) = \Big(\prod\limits_{k=1}^n P_\varepsilon(t_k)*\varphi\Big)(x)$. Положим $v=\{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi_1|^{\alpha_1}+\cdots+|\xi_n|^{\alpha_n}\}$ и для $\omega\in\Phi_v$ рассмотрим функционал $\langle T^{\overline{\alpha}}_\varepsilon f,\omega\rangle = \langle f, \overline{R_{\overline{\alpha},\varepsilon}}*\omega\rangle$. Заметим, что $\overline{R_{\overline{\alpha},\varepsilon}}*\omega\in\Phi_v$; это следует из того, что функция $\overline{R_{\overline{\alpha},\varepsilon}}(\xi) = (|\xi_1|^{\overline{\alpha}_1} + \dots + |\xi_n|^{\overline{\alpha}_n})e^{-\xi|\xi_1|-\dots-\xi|\xi_n|}$ является мультипликатором в Ψ_v. С учетом этого получаем

$$\langle T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f, \omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \widetilde{f}, (|\xi_1|^{\overline{\alpha}_1} + \dots + |\xi_n|^{\overline{\alpha}_n})e^{-\varepsilon|\xi_1|-\dots-\varepsilon|\xi_n|}\widetilde{\omega}(\varepsilon)\rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \widetilde{\varphi}, e^{-\varepsilon|\xi_1|-\dots-\varepsilon|\xi_n|}\widetilde{\omega}(\varepsilon)\rangle = \langle \varphi, P_\varepsilon\omega\rangle = \langle P_\varepsilon\varphi, \omega\rangle.$$

Второе из равенств этой цепочки вытекает из соотношения $\langle \widetilde{f}, \widetilde{\omega}\rangle = \langle \widetilde{\varphi}, \widetilde{\omega}(\xi)/(|\xi_1|^{\alpha_1} + \dots + |\xi_n|^{\alpha_n})\rangle$, $\omega \in \Phi_v$. Таким образом, пришли к равенству

$$\langle T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f, \omega\rangle = \langle P_\varepsilon\varphi, \omega\rangle, \tag{7}$$

справедливому для любой функции $\omega \in \Phi_v$. Покажем, что (7) справедливо для $\omega \in S$, откуда и будет следовать (6). Выберем последовательность $\omega_k \in \Phi_v$, аппроксимирующую функцию $\omega \in S$ по норме $L_{r'}$ и $L_{p'}$ одновременно. Возможность такой аппроксимации функции из S функциями из Φ_v, где v — произвольное множество нулевой меры и $r', p' \geq 2$, установлена в [17]–[19] (в нашем случае соотношение $\operatorname{mes} v = 0$ очевидно). Переходя в равенстве $\langle T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f, \omega_k\rangle = \langle P_\varepsilon\varphi, \omega_k\rangle$ к пределу при $k \to \infty$, убеждаемся в справедливости (7) на функциях из S. На основании (6) заключаем, что

$$\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f = \varphi \in L_p.$$

Пусть теперь $f(x) \in L_r$, $T^{\overline{\alpha}} f \in L_p$. Для $\omega \in \Phi$ имеем

$$\langle T^{\overline{\alpha}} f, \omega\rangle = \langle \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, \overline{R_{\overline{\alpha},\varepsilon}} * \omega\rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \widetilde{f}, (|\xi_1|^{\overline{\alpha}_1} + \dots + |\xi_n|^{\overline{\alpha}_n})e^{-\varepsilon|\xi_1|-\dots-\varepsilon|\xi_n|}\widetilde{\omega}(\xi)\rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \widetilde{f}, (|\xi_1|^{\overline{\alpha}_1} + \dots + |\xi_n|^{\overline{\alpha}_n})\widetilde{\omega}(\xi)\rangle = \langle F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + \dots + |\xi_n|^{\alpha_n})Ff, \omega\rangle. \tag{8}$$

Второе из равенств этой цепочки следует из того, что сходимость в L_p влечет сходимость в Φ', предпоследнее — из того, что, как легко показать, $e^{-\varepsilon|\xi_1|-\dots-\varepsilon|\xi_n|}\widetilde{\omega}(\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \widetilde{\omega}(\xi)$ в топологии Ψ. Таким образом, $\langle F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + \dots + |\xi_n|^{\alpha_n})Ff, \omega\rangle = \langle T^{\overline{\alpha}} f, \omega\rangle$, $\omega \in \Phi$, откуда следует, что $f \in L_{p,r}^{\overline{\alpha}}$ и $F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + \dots + |\xi_n|^{\alpha_n})Ff = T^{\overline{\alpha}} f$. $\square$

Содержащееся в теореме 1 условие сходимости аппроксимативных операторов можно заменить условием равномерной ограниченности L_p-норм интегралов $T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f$. Именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leq 2$, $1 \leq r \leq 2$, $\operatorname{Re}\alpha_j > 0$. *Тогда* $L_{p,r}^{\overline{\alpha}} = \{f(x) : f \in L_r, \sup\limits_{\varepsilon>0}\|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p < \infty\}$. *При этом* $\|f\|_{L_{p,r}^{\overline{\alpha}}} = \|f\|_r + \sup\limits_{\varepsilon>0}\|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p$.

Доказательство. Если $f \in L_{p,r}^{\overline{\alpha}}$, то, как было ранее показано, имеет место равенство (6), в котором $\varphi = T^{\overline{\alpha}} f$. Отсюда следует

$$\sup_{\varepsilon>0}\|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p \leq \|T^{\overline{\alpha}} f\|_p. \tag{9}$$

Пусть $f \in L_r$ и $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p < \infty$. Тогда существует такая подпоследовательность ε_k, что $W\text{-}\overset{(L_p)}{\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}} T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f = \varphi \in L_p$, где $W\text{-}\overset{(L_p)}{\lim}$ означает слабый предел в L_p. Заменив в цепочке выкладок (8) $\overset{(L_p)}{\lim}$ на $W\text{-}\overset{(L_p)}{\lim}$, получаем соотношение $\langle F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + \dots + |\xi_n|^{\alpha_n})Ff, \omega\rangle = \langle \varphi, \omega\rangle$, из которого следует, что $f \in L_{p,r}^{\overline{\alpha}}$.

Далее имеем $\|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p \le \sup\limits_{\varepsilon>0} \|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p$, откуда предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ получаем $\|T^{\overline{\alpha}} f\|_p \le \sup\limits_{\varepsilon>0} \|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p$. Отсюда и из (9) следует $\|T^{\overline{\alpha}} f\|_p = \sup\limits_{\varepsilon>0} \|T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f\|_p$. $\square$

Замечание 1. В случае, когда $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, приведенные выше теоремы справедливы при $1 \le p, r < \infty$ ($p \ne 1$ в теореме 2). Доказательство этого факта аналогично доказательству теорем 1, 2 с учетом того, что пространство $\Phi_v = \Phi$, построенное по совокупности координатных гиперплоскостей, плотно в L_p, $1 < p < \infty$ (см. [2]).

Замечание 2. Упомянутое выше описание пространств $L_{p,r}^{\overline{\alpha}}$ в терминах ГСИ имеет вид

$$L_{p,r}^{\overline{\alpha}} = \{f(x) : f \in L_r,\, \mathbb{D}^{\overline{\alpha}} f \in L_p\}, \quad 1 < p < \infty, \;\; 1 \le r < \infty, \;\; \alpha_j > 0, \tag{10}$$

где

$$\mathbb{D}^{\overline{\alpha}} f = \int_{\mathbb{R}^n} ((\Delta_t^{2l} f)(x)/\rho^{n+\alpha^*}(t))dt \equiv \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_{\rho(t)>\varepsilon} ((\Delta_t^{2l} f)(x)/\rho^{n+\alpha^*}(t))dt \tag{11}$$

— анизотропный ГСИ П.И. Лизоркина. В (11) $\frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}$, $\rho(t)$ — неявная функция, являющаяся решением уравнения $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \rho^{-2\lambda_i} = 1$, $\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\alpha^*}$, $l = \frac{1}{2}\max\limits_{j\in\overline{1,n}} \alpha_j$. Содержащееся в теореме 1 описание пространств $L_{p,r}^{\overline{\alpha}}$ (при вещественных α_j) является более эффективным в том смысле, что ядра операторов $T_\varepsilon^{\overline{\alpha}}$ выражаются явно и через элементарные функции. Однако оно не обладает такой конструктивностью, как описание (10): если $f(x)$ — "достаточно хорошая" функция, то предел в (11) равен интегралу по $\mathbb{R}^n$; в то же время вопрос о том, существует ли предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f)(x)$ и чему он равен, требует специального исследования. Такое исследование проведено ниже в п. II, в котором по существу речь идет о конструктивности описания (4).

II. Сходимость аппроксимативных операторов на "хороших" функциях

Здесь будет доказано существование предела $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, на функциях $f(x)$ класса BC^m, $m \ge \max\{[\operatorname{Re}\alpha_1], \dots, [\operatorname{Re}\alpha_n]\}$. Для таких функций $f(x)$, следуя ([8], с. 86; [9], (26.67)), введем регуляризацию расходящегося интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{f(x-e_k t)}{|t|^{1+\alpha_k}} dt$, e_k — координатный орт, равенством

$$\text{p.f.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(x-e_k t)}{|t|^{1+\alpha_k}} dt = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(x-e_k t) - \chi(t) P_{t,k}^{[\operatorname{Re}\alpha_k]}(x)}{|t|^{1+\alpha_k}} dt + \sum_{s=0}^{[\operatorname{Re}\alpha_k]}{}' \frac{\Omega_s}{s!\,(s-\alpha_k)} \frac{\partial^s}{\partial x_k^s} f(x), \quad \Omega_s = \begin{cases} 2, & s \text{ четное}, \\ 0, & s \text{ нечетное}, \end{cases} \tag{12}$$

где $P_{t,k}^{[\operatorname{Re}\alpha_k]}(x) = \sum\limits_{s=0}^{[\operatorname{Re}\alpha_k]} \frac{(-t)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x_k^s} f(x)$, $\chi(t)$ — характеристическая функция интервала $(-1, 1)$, штрих у суммы означает пропуск слагаемого с номером $s = \operatorname{Re}\alpha_k$ в случае, когда α_k — целое число.

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in BC^m$, $m \ge \max\{[\operatorname{Re}\alpha_1], \dots, [\operatorname{Re}\alpha_n]\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\varepsilon>0}(T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f)(x)$ существует для $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon^{\overline{\alpha}} f)(x) = \sum_{j=1}^n (J^{\alpha_j} f)(x),$$

$$J^{\alpha_j}f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha_j+1)\cos\frac{\pi(\alpha_j+1)}{2}}{\pi}\ \text{p. f.}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^1}\frac{f(x-e_jt)}{|t|^{1+\alpha_j}}dt, & \alpha_j\neq 2,4,\dots;\\ \left(i\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}f(x), & \alpha_j=2,4,\dots\end{cases}$$

Доказательство. Интеграл $(T_\varepsilon^{\overline{\alpha}}f)(x)$ запишем в виде

$$(T_\varepsilon^{\overline{\alpha}}f)(x)=\sum_{j=1}^n\frac{1}{\pi^{n-1}\varepsilon^{1+\alpha_j}}\int_{\mathbb{R}^1}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)dt_j\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n\frac{\varepsilon}{t_k^2+\varepsilon^2}f(x-t)d\overline{t}_j=\sum_{j=1}^n(J_\varepsilon^{\alpha_j}f)(x),\tag{13}$$

$$\overline{t}_j=(t_1,\dots,t_{j-1},\,t_{j+1},\dots,t_n),$$

где $R_{\alpha_j}(|t|)=R_{\alpha_j,1}(|t|)$. Покажем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}(J_\varepsilon^{\alpha_j}f)(x)=(J^{\alpha_j}f)(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, откуда и будет следовать утверждение теоремы. Пусть вначале $\alpha_j\neq2,4,\dots$ Интеграл $(J_\varepsilon^{\alpha_j}f)(x)$ представим в виде

$$(J_\varepsilon^{\alpha_j}f)(x)=$$
$$=\frac{1}{\pi^{n-1}\varepsilon^{1+\alpha_j}}\int_{\mathbb{R}^1}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)dt_j\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n\frac{1}{t_k^2+1}[f(x_j-t_j,\,\overline{x}_j-\varepsilon\overline{t}_j)-\chi(t_j)P_{t_j,j}^{[\operatorname{Re}\alpha_j]}(x_j,\,\overline{x}_j-\varepsilon\overline{t}_j)]d\overline{t}_j+$$
$$+\frac{1}{\pi^{n-1}\varepsilon^{1+\alpha_j}}\int_{|t_j|<1}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)dt_j\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n\frac{1}{t_k^2+1}P_{t_j,j}^{[\operatorname{Re}\alpha_j]}(x_j,\,\overline{x}_j-\varepsilon\overline{t}_j)d\overline{t}_j\equiv(J_{1,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x)+(J_{2,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x),$$

где обозначено $f(x)=f(x_j,\,\overline{x}_j)$. Рассмотрим интеграл $(J_{1,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha_j}}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\frac{\Gamma(\alpha_j+1)\cos\frac{\pi(\alpha_j+1)}{2}}{\pi}|t_j|^{-1-\alpha_j}\tag{14}$$

и, кроме того,

$$\left|\varepsilon^{-1-\alpha_j}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n\frac{1}{t_k^2+1}[f(x_j-t_j,\,\overline{x}_j-\varepsilon\overline{t}_j)-\chi(t_j)P_{t_j,j}^{[\operatorname{Re}\alpha_j]}(x_j,\,\overline{x}_j-\varepsilon\overline{t}_j)]dt_j\right|\leq$$
$$\leq C\begin{cases}|t_j|^{-1-\operatorname{Re}\alpha_j}, & |t_j|>1;\\ |t_j|^{-\{\operatorname{Re}\alpha_j\}}, & |t_j|\leq1,\end{cases}\tag{15}$$

где C не зависит от ε. Переходя на основании (15) к пределу под знаком интеграла (по dt_j) в $(J_{1,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x)$, с учетом (14) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to0}(J_{1,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x)=\frac{\Gamma(\alpha_j+1)\cos\frac{\pi(\alpha_j+1)}{2}}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{f(x-e_jt)-\chi(t_j)P_{t_j,j}^{[\operatorname{Re}\alpha_j]}(x)}{|t_j|^{1+\alpha_j}}dt_j.\tag{16}$$

Обратимся теперь к $(J_{2,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x)$. Если $\operatorname{Re}\alpha_j\neq2,4,\dots$, то в силу $\int\limits_{\mathbb{R}^1}t_j^kR_{\alpha_j}(|t_j|)dt_j=0$ для $k<\operatorname{Re}\alpha_j$ и $\int\limits_{|t_j|<1}t_j^{\operatorname{Re}\alpha_j}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)dt_j=0$ при нечетных $\operatorname{Re}\alpha_j$ получаем

$$(J_{2,\varepsilon}^{\alpha_j}f)(x)=-\frac{1}{\pi^{n-1}}\sum_{s=0}^{[\operatorname{Re}\alpha_j]}{}'\int_{|t_j|>1}\frac{(-t)_j^s}{s!\,\varepsilon^{1+\alpha_j}}R_{\alpha_j}\Big(\frac{|t_j|}{\varepsilon}\Big)dt_j\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n\frac{1}{t_k^2+1}\frac{\partial^s}{\partial x_j^s}f(x_j,\,\overline{x}_j-\varepsilon\overline{t}_j)d\overline{t}_j.$$

Переходя в правой части последнего равенства к пределу под знаком интеграла, с учетом (14) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(J^{\alpha_j}_{2,\varepsilon}f)(x) = -\frac{\Gamma(\alpha_j+1)\cos\frac{\pi(\alpha_j+1)}{2}}{\pi}\sum_{s=0}^{[\operatorname{Re}\alpha_j]}{}' \frac{\Omega_s}{s!\,(\alpha_j-s)}\frac{\partial^s}{\partial x_j^s}f(x). \qquad (17)$$

Если же $\operatorname{Re}\alpha_j = 2,4,\ldots$, $\operatorname{Im}\alpha_j \neq 0$, то, интегрируя по частям, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(\operatorname{Re}\alpha_j)!}\int_{|t_j|<1} t^{\operatorname{Re}\alpha_j}R_{\alpha_j,\varepsilon}(|t_j|)dt_j = -\frac{2\Gamma(\alpha_j+1)\cos\frac{\pi(\alpha_j+1)}{2}}{\pi i\operatorname{Im}\alpha_j(\operatorname{Re}\alpha_j)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\operatorname{Re}\alpha_j} f(x),$$

откуда, как и при $\operatorname{Re}\alpha_j \neq 2,4,\ldots$, получаем (17). Из (16), (17) следует утверждение теоремы при $\alpha_j \neq 2,4,\ldots$

Остается рассмотреть случай $\alpha_j = 2,4,\ldots$ Проинтегрировав $(J^{\alpha_j}_\varepsilon f)(x)$ из (13) по частям α_j раз, будем иметь

$$(J^{\alpha_j}_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^n\frac{1}{t_k^2+1}\left(\left(i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}f\right)(x-\varepsilon t)dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(J^{\alpha_j}_\varepsilon f)(x) = \left(\left(i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}f\right)(x)$. $\square$

Литература

1. Лизоркин П.И. *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L^r_p(E_n)$. Теоремы вложения* // Матем. сб. – 1963. – Т. 60. – № 3. – С. 325–353.
2. Лизоркин П.И. *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1969. – Т. 105. – С. 89–167.
3. Лизоркин П.И. *Описание пространств $L^r_p(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов* // Матем. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 79–91.
4. Лизоркин П.И. *Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1972. – Т. 117. – С. 212–243.
5. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1983. – 480 с.
6. Самко С.Г. *О пространствах риссовых потенциалов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40.– № 5. – С. 1143–1172.
7. Самко С.Г. *Пространства $L^\alpha_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ и гиперсингулярные интегралы* // Studia math. – 1977. – T. 61. – № 3. – S. 193–220.
8. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1984. – 208 с.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
10. Давтян А.А. *Пространства анизотропных потенциалов. Приложения* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1986. – Т. 173. – С. 113–124.
11. Емгушева Г.П., Ногин В.А. *Характеризация функций из анизотропных классов лиувиллевского типа* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 7. – С. 63–66.
12. Dappa H., Trebels W. *On L^1 criteria for quasi-radial Fourier multipliers with applications to some anisotropic function spaces* // Anal. math. – 1983. – V. 9. – № 4. – P. 275–289.
13. Dappa H., Trebels W. *On hypersingular integrals and anisotropic Bessel potential spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 286. – № 1. – P. 419–429.

14. Хамидова Т.А. *Гиперсингулярные интегралы и пространства анизотропных риссовых потенциалов.* – Ростовск. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1988. – 22 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.88, № 9067-В.
15. Samko S.G. *Inversion theorems for potential type integral transforms in* $\mathbb{R}^n$ *and on* S^{n-1} // Integral transforms and special functions. – 1993. – V. 1. – № 2. – P. 145–163.
16. Samko S.G. *Denseness of the spaces* Φ_v *of Lizorkin type in the mixed* $L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$*-spaces* // Studia math. – 1995. – T. 113. – № 3. – S. 199–210.
17. Самко С.Г. *Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве, и о делении на функции* // Матем. заметки. – 1977. – Т. 21. – № 5. – С. 677–689.
18. Самко С.Г. *О плотности в* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *пространств* Φ_v *типа Лизоркина* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31. – № 6. – С. 855–865.
19. Самко С.Г. *О плотности пространств* Φ_v *типа Лизоркина в пространствах* $L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ *со смешанной нормой* // Докл. РАН. – 1991. – Т. 319. – № 3. – С. 567–569.

Ростовский государственный университет

Поступила
10.06.1996