ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.518.68

Л.И. ДАНИЛОВ

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО СТЕПАНОВУ ФУНКЦИЙ

В [1] доказано существование почти периодических (п. п.) по Степанову сечений многозначных п. п. по Степанову отображений со значениями в сепарабельных банаховых пространствах. В доказательстве используются утверждения о непрерывных сечениях многозначных отображений с невыпуклыми образами [2] (см. также [3]). Другой метод доказательства существования п. п. сечений, использующий равномерную аппроксимацию п. п. функций элементарными (принимающими счетное множество значений) п. п. по Степанову функциями, предложен в [4]. В [4]–[7] этот метод применялся для доказательства существования п. п. сечений, удовлетворяющих разнообразным дополнительным условиям. Равномерная аппроксимация оказывается полезной также при рассмотрении ряда других вопросов. В частности, при изучении мерозначных п. п. функций [8], [9], а также при доказательстве теорем суперпозиции [10].

В работе приведены утверждения, связанные с равномерной аппроксимацией п. п. по Степанову функций. В первой части работы вводятся обозначения, собраны необходимые определения и сформулированы некоторые утверждения, используемые в дальнейшем (относительно определений и свойств п. п. функций см. [11], [12]). Во второй части с помощью равномерной аппроксимации доказан почти периодический вариант теоремы Лузина. Ряд утверждений о суперпозиции п. п. функций и многозначных п. п. отображений сформулирован в последней части работы. Приведен также один результат о п. п. сечениях многозначных отображений.

1. Пусть (U,ρ) — метрическое пространство. Через $\overline{A}$ обозначается замыкание множества $A\subset U$; $K(x,\varepsilon)=\{y\in U:\rho(x,y)\le\varepsilon\}$, $x\in U$, $\varepsilon\ge 0$. Определим функцию $\theta:\theta(t)=0$ при $t\le 0$, $\theta(t)=t$ при $0\le t\le 1$ и $\theta(t)=1$ при $t\ge 1$. В пространстве U будет использоваться также метрика $\rho'(x,y)=\theta(\rho(x,y))$, $x,y\in U$.

Функция $f:\mathbb{R}\to U$ измерима, если она почти всюду (пв) совпадает с пределом пв сходящейся последовательности простых функций (принимающих конечное число значений на измеримых по Лебегу множествах); $M(\mathbb{R},U)$ — множество измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ (функции, совпадающие при почти всех (п. в.) $t\in\mathbb{R}$, отождествляются). Пусть $T_j\subset\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, — непересекающиеся измеримые (по Лебегу) множества, $\mathrm{mes}\Big(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j\Big)=0$ (mes — мера Лебега), $x_j\in U$. Функцию, совпадающую с x_j при $t\in T_j$, $j\in\mathbb{N}$, будем обозначать через $\sum x_j\chi_{T_j}(\cdot)$, где χ_{T_j} — характеристические функции множеств T_j. Функция $\sum x_j\chi_{T_j}(\cdot)$ является простой, если $T_j\ne\varnothing$ только для конечного числа индексов j. Если $f_j\in M(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$, то $\sum f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot)$ — измеримая функция, совпадающая с функцией $f_j(t)$ при $t\in T_j$, $j\in\mathbb{N}$. Введенные обозначения будут использоваться не только в нормированных, но и в произвольных метрических пространствах (никаких линейных операций над рассматриваемыми функциями производиться не будет).

Для функций $f,g\in M(\mathbb{R},U)$ обозначим

$$d^{(\rho)}(f,g)=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}\theta(\rho(f(t),g(t)))dt,$$
$$d^{(\rho)}_\infty(f,g)=\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}}\rho(f(\xi),g(\xi)).$$

Фиксируем элемент $x_0 \in U$. Пусть $M_p(\mathbb{R},U)$, $p \geq 1$, — класс функций $f \in M(\mathbb{R},U)$, для которых

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t),x_0)dt < +\infty.$$

Если $f,g \in M_p(\mathbb{R},U)$, то положим

$$d_p^{(\rho)}(f,g) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \biggl(\int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t),g(t))dt \biggr)^{1/p}.$$

Функции $f \in M_p(\mathbb{R},U)$, для которых

$$\lim_{\delta\to+0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{L\subset[\xi,\xi+1],\\ \operatorname{mes} L\leq\delta}} \int_L \rho^p(f(t),x_0)dt = 0,$$

образуют замкнутое подмножество $M_p'(\mathbb{R},U)$ метрического пространства $(M_p(\mathbb{R},U), d_p^{(\rho)})$.

Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},U) = (S(\mathbb{R},U), d^{(\rho)})$ п. п. по Степанову функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $d^{(\rho)}(f(\cdot+\tau), f(\cdot)) < \varepsilon$, относительно плотно. Множество $S(\mathbb{R},U)$ замкнуто в метрическом пространстве $(M(\mathbb{R},U), d^{(\rho)})$. Функция $f \in M_p(\mathbb{R},U)$, $p \geq 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R},U) = (S_p(\mathbb{R},U), d_p^{(\rho)})$ п. п. по Степанову степени $p \geq 1$ функций, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $d_p^{(\rho)}(f(\cdot+\tau), f(\cdot)) < \varepsilon$. При этом $S_p(\mathbb{R},U)$ — замкнутое подмножество множества $M_p'(\mathbb{R},U) \subset (M_p(\mathbb{R},U), d_p^{(\rho)})$; $S(\mathbb{R},U) = S(\mathbb{R},(U,\rho)) = S_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to U$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R},U) = (B(\mathbb{R},U), d_\infty^{(\rho)})$ п. п. по Бору функций, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $d_\infty^{(\rho)}(f(\cdot+\tau), f(\cdot)) < \varepsilon$. Последовательность $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ называется f-возвращающей для функции $f \in S(\mathbb{R},U)$, если $d^{(\rho)}(f(\cdot+\tau_j), f(\cdot)) \to 0$ при $j \to +\infty$. Аналогично (с помощью метрик $d_p^{(\rho)}$ и $d_\infty^{(\rho)}$) определяются f-возвращающие последовательности для функций $f \in S_p(\mathbb{R},U)$ и $f \in B(\mathbb{R},U)$. При этом $B(\mathbb{R},U) \subset S_p(\mathbb{R},U) \subset S_1(\mathbb{R},U) \subset S(\mathbb{R},U)$ и f-возвращающие последовательности не зависят от того, какому именно из рассматриваемых пространств п. п. функция f считается принадлежащей. Для каждой функции $f \in S(\mathbb{R},U)$ определяется множество $\operatorname{Mod} f$, состоящее из тех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ для любой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}$. Если U — банахово пространство и $f \in S_1(\mathbb{R},U)$, то $\operatorname{Mod} f$ совпадает с модулем показателей Фурье функции f.

Для любого $p \geq 1$ справедливо равенство [8]

$$S_p(\mathbb{R},U) = S(\mathbb{R},U) \bigcap M_p'(\mathbb{R},U). \tag{1}$$

Функция $f : \mathbb{R} \to U$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна и $f \in S(\mathbb{R},U)$.

В пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, далее рассматриваются евклидова норма $|\cdot|$ и соответствующая ей метрика $\rho(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Для измеримого множества $T \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa(T) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{mes}([\xi,\xi+1] \setminus T);$$

$S(\mathbb{R})$ — совокупность измеримых множеств $T \subset \mathbb{R}$ таких, что $\chi_T \in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Если $T \in S(\mathbb{R})$, то положим $\operatorname{Mod} T = \operatorname{Mod} \chi_T$. Пусть $T_j \in S(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_j \varkappa(T_j) < +\infty$. Тогда $\bigcap\limits_j T_j \in S(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} \bigcap\limits_j T_j \subset \sum\limits_j \operatorname{Mod} T_j$ (сумма модулей определяется как наименьший модуль (группа по сложению), содержащий все множества $\operatorname{Mod} T_j$) и $\varkappa\Bigl(\bigcap\limits_j T_j\Bigr) \leq \sum\limits_j \varkappa(T_j)$.

Для произвольного модуля (группы по сложению) $\Lambda \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}(\Lambda)$ множество последовательностей $\{T_j\}_{j=1}^{+\infty}$ непересекающихся множеств $T_j \in S(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{Mod} T_j \subset \Lambda$ и

$\lim\limits_{N\to+\infty} \varkappa\Big(\bigcup\limits_{j\le N} T_j\Big)=0$ (в дальнейшем элементы последовательностей из $\mathfrak{M}(\Lambda)$ будут нумероваться также с помощью нескольких индексов).

Справедлива следующая простая лемма, которая применяется при построении п. п. сечений многозначных отображений.

Лемма 1 ([7], [13]). *Пусть* $\{T_j\}\in\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ *и* $f_j\in S(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда* $\sum\limits_j f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot)\in S(\mathbb{R},U)$ *и* $\operatorname{Mod}\sum\limits_j f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot)\subset\sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j+\sum\limits_j \operatorname{Mod} T_j$.

Определим функцию $\operatorname{sign}(\cdot)$: $\operatorname{sign} s=s|s|^{-1}$, если $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, и $\operatorname{sign}0=0$.

Теорема 1 ([6]). *Пусть* $Q\subset S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и*

$$\sup_{f\in Q}\sup_{\tau\in[0,\delta]}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}|f(t+\tau)-f(t)|dt\to 0 \tag{2}$$

при $\delta\to+0$. *Тогда для любых* $\varepsilon>0$ *и* $L>0$ *существует непрерывная периодическая с периодом* L *функция* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *такая, что* $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|<\varepsilon$ *и для любой функции* $f\in Q$ *имеем* $\operatorname{mes}\{t\in\mathbb{R}: f(t)+g(t)=0\}=0$, $\operatorname{sign}(f(\cdot)+g(\cdot))\in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{Mod}\operatorname{sign}(f(\cdot)+g(\cdot))\subset\operatorname{Mod}(f(\cdot)+g(\cdot))$ (*более того, функция* $f+g$ *обладает* σ*-свойством* ([14], с. 502)).

Следствие 1. Пусть $f\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда для любых $a\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ существует множество $T\in S(\mathbb{R})$ (если f — непрерывная функция, то множество T можно выбрать замкнутым) такое, что $\operatorname{Mod}T\subset\operatorname{Mod}f$, $f(t)>a$ при всех $t\in T$ и $f(t)<a+\varepsilon$ при п. в. $t\in\mathbb{R}\setminus T$.

Доказательство следствия 1. Можно считать, что $\operatorname{Mod}f\neq\{0\}$. Определим функцию $\tilde f:\tilde f(t)=f(t)$, если $|f(t)|\le|a|+\varepsilon$, $\tilde f(t)=(|a|+\varepsilon)\operatorname{sign}f(t)$, если $|f(t)|>|a|+\varepsilon$. Имеем $\tilde f\in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\tilde f\subset\operatorname{Mod}f$. Выберем число $L>0$ так, что $2\pi L^{-1}\in\operatorname{Mod}f$. Для функции $\tilde f(\cdot)-a-\frac{\varepsilon}{2}$ в соответствии с теоремой 1 найдем непрерывную периодическую с периодом L функцию $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такую, что $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\operatorname{sign}(\tilde f(\cdot)-a-\frac{\varepsilon}{2}+g(\cdot))\in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\operatorname{sign}(\tilde f(\cdot)-a-\frac{\varepsilon}{2}+g(\cdot))\subset\operatorname{Mod}f$. Осталось положить $T=\{t\in\mathbb{R}:\tilde f(t)-a-\frac{\varepsilon}{2}+g(t)\ge 0\}$. $\square$

Отметим, что существуют функции $f\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такие, что $|f(t)|<1$ при всех $t\in\mathbb{R}$ и для всех $\alpha\in(-1,1)$ имеем $\operatorname{sign}(f(\cdot)-\alpha)\notin S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (и $\operatorname{mes}\{t\in\mathbb{R}:f(t)=\alpha\}=0$) [4].

2. Сформулируем основную теорему о равномерной аппроксимации п. п. по Степанову функций.

Теорема 2 ([4], [6]). *Пусть* (U,ρ) — *метрическое пространство*, $f\in S(\mathbb{R},U)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдутся последовательность* $\{T_j\}\in\mathfrak{M}(\operatorname{Mod}f)$ *и точки* $x_j\in U$, $j\in\mathbb{N}$, *такие, что функция* $f(t)$ *определена при всех* $t\in\bigcup\limits_j T_j$ *и*

$$\sup_{t\in\bigcup\limits_j T_j}\rho\Big(f(t),\sum_j x_j\chi_{T_j}(t)\Big)<\varepsilon.$$

При доказательстве теоремы 2 используется частный случай теоремы 1, когда множество Q состоит из одной функции $f\in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (в этом случае выполняется условие (2)).

Следствием теоремы 2 является почти периодический вариант теоремы Лузина.

Теорема 3. *Пусть* $(U,\|\cdot\|)$ — *банахово пространство* ($\rho(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in U$), $f\in S(\mathbb{R},U)$. *Тогда для любого* $\delta>0$ *существуют множество* $T\in S(\mathbb{R})$ *и функция* $\mathcal{F}\in B(\mathbb{R},U)$ *такие, что* $\varkappa(T)<\delta$, $\operatorname{Mod}T\subset\operatorname{Mod}f$, $\operatorname{Mod}\mathcal{F}\subset\operatorname{Mod}f$ *и* $f(t)=\mathcal{F}(t)$ *при всех* $t\in T$.

Доказательство. Пусть T_j, $j \in \mathbb{N}$, — множества, определяемые в соответствии с теоремой 2 при $\varepsilon = 1$ для функции f, и число $N \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $\varkappa(T') < \frac{\delta}{2}$, где $T' = \bigcup\limits_{j \le N} T_j \in S(\mathbb{R})$. Определим (ограниченную) функцию g: $g(t) = f(t)$, если $t \in T'$, $g(t) = 0$, если $t \in \mathbb{R} \setminus T'$. Из (1) и леммы 1 получаем $g \in S_1(\mathbb{R}, U)$ и $\operatorname{Mod} g \subset \operatorname{Mod} f$. Выберем числа $\delta_j > 0$ и $\alpha_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, так, чтобы выполнялись неравенства $\sum\limits_j \delta_j < \frac{\delta}{2}$ и $\sum\limits_j \alpha_j < +\infty$. Обозначим $g_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} g(\eta) d\eta$ (интеграл Бохнера ([15], с. 189)), $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Имеем $g_\varepsilon \in B(\mathbb{R}, U)$, $\operatorname{Mod} g_\varepsilon \subset \operatorname{Mod} g \subset \operatorname{Mod} f$ и

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} \|g(t) - g_\varepsilon(t)\| dt \to 0$$

при $\varepsilon \to +0$ (последнее следует из теоремы о дифференцируемости интеграла Бохнера ([15], с. 192) и предкомпактности в $(M_1(\mathbb{R}, U), d_1^{(\rho)})$ множества функций $g(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{R}$). Для любого $j \in \mathbb{N}$ найдутся измеримое множество $\widetilde{T}_j \subset \mathbb{R}$ и число $\varepsilon_j > 0$, для которых $\varkappa(\widetilde{T}_j) < \delta_j$ и при всех $t \in \widetilde{T}_j$ функция $g(t)$ определена и $\|g(t) - g_{\varepsilon_j}(t)\| < \frac{1}{5}\alpha_j$. В соответствии с теоремой 2 найдем функции $g^{(j)}(\cdot) = \sum\limits_i x_i^{(j)} \chi_{T_i^{(j)}}(\cdot)$ и $\tilde{g}^{(j)}(\cdot) = \sum\limits_k \tilde{x}_k^{(j)} \chi_{\widetilde{T}_k^{(j)}}(\cdot)$ такие, что $\{T_i^{(j)}\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathfrak{M}(\operatorname{Mod} f)$, $\{\widetilde{T}_k^{(j)}\}_{k=1}^{+\infty} \in \mathfrak{M}(\operatorname{Mod} f)$ и $\|g(t) - g^{(j)}(t)\| < \frac{1}{5}\alpha_j$ для всех $t \in \bigcup\limits_i T_i^{(j)}$, $\|g_{\varepsilon_j}(t) - \tilde{g}^{(j)}(t)\| < \frac{1}{5}\alpha_j$ для всех $t \in \bigcup\limits_k \widetilde{T}_k^{(j)}$. Имеем $\{T_i^{(j)} \bigcap \widetilde{T}_k^{(j)}\}_{i,k=1}^{+\infty} \in \mathfrak{M}(\operatorname{Mod} f)$. Пусть $\widetilde{T}_j \bigcap \left(T_i^{(j)} \bigcap \widetilde{T}_k^{(j)}\right) \neq \emptyset$ и $t \in \widetilde{T}_j \bigcap \left(T_i^{(j)} \bigcap \widetilde{T}_k^{(j)}\right)$. Тогда для всех $\eta \in T_i^{(j)} \bigcap \widetilde{T}_k^{(j)}$ выполняются неравенства

$$\|g(\eta) - g_{\varepsilon_j}(\eta)\| \le \|g(\eta) - g^{(j)}(\eta)\| + \|g^{(j)}(t) - g(t)\| + \\ + \|g(t) - g_{\varepsilon_j}(t)\| + \|g_{\varepsilon_j}(t) - \tilde{g}^{(j)}(t)\| + \|\tilde{g}^{(j)}(\eta) - g_{\varepsilon_j}(\eta)\| < \alpha_j.$$

Обозначим через T_j'' объединение тех множеств $T_i^{(j)} \bigcap \widetilde{T}_k^{(j)}$, $i, k \in \mathbb{N}$, которые имеют непустое пересечение с множеством $\widetilde{T}_j$; $T_j'' \in S(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} T_j'' \subset \operatorname{Mod} f$, $\varkappa(T_j'') \le \varkappa(\widetilde{T}_j) < \delta_j$ и $\|g(t) - g_{\varepsilon_j}(t)\| < \alpha_j$ для всех $t \in T_j''$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть $T'' = \bigcap\limits_j T_j''$; $T'' \in S(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} T'' \subset \operatorname{Mod} f$ и $\varkappa(T'') \le \sum\limits_j \varkappa(T_j'') < \frac{1}{2}\delta$. Пусть $Y(\varepsilon; x) = x$, если $\|x\| < \varepsilon$, и $Y(\varepsilon; x) = \varepsilon \|x\|^{-1} x$, если $\|x\| \ge \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $x \in U$. Для всех $x, y \in U$ справедливо неравенство $\|Y(\varepsilon; x) - Y(\varepsilon; y)\| \le 2\|x - y\|$. Определим последовательно при $j = 1, 2, \ldots$ функции $\mathcal{F}_j(\cdot)$. Положим $\mathcal{F}_1(\cdot) = g_{\varepsilon_1}(\cdot)$. Если функция $\mathcal{F}_j(\cdot)$ при некотором $j \in \mathbb{N}$ уже определена, то положим $\mathcal{F}_{j+1}(t) = \mathcal{F}_j(t) + Y(\alpha_j + \alpha_{j+1}; g_{\varepsilon_{j+1}}(t) - \mathcal{F}_j(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Имеем $\mathcal{F}_j \in B(\mathbb{R}, U)$, $\operatorname{Mod} \mathcal{F}_j \subset \operatorname{Mod} f$, $\|\mathcal{F}_{j+1}(t) - \mathcal{F}_j(t)\| \le \alpha_j + \alpha_{j+1}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{F}_{j+1}(t) = g_{\varepsilon_{j+1}}(t)$ для всех $t \in T''$, $j \in \mathbb{N}$. Если $j \to +\infty$, то последовательность функций $\mathcal{F}_j$ равномерно сходится к некоторой функции $\mathcal{F} \in B(\mathbb{R}, U)$, $\operatorname{Mod} \mathcal{F} \subset \operatorname{Mod} f$, при этом $\mathcal{F}(t) = g(t)$ при всех $t \in T''$. Осталось положить $T = T' \bigcap T''$. Тогда $T \in S(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} T \subset \operatorname{Mod} f$, $\varkappa(T) < \delta$ и $\mathcal{F}(t) = f(t)$ при всех $t \in T$. $\square$

Следствие 1. Пусть $(U, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $f \in S(\mathbb{R}, U)$. Тогда найдутся множества $T_j \subset \mathbb{R}$ и функции $\mathcal{F}_j \in B(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\{T_j\} \in \mathfrak{M}(\operatorname{Mod} f)$, $\operatorname{Mod} \mathcal{F}_j \subset \operatorname{Mod} f$ и $f(t) = \mathcal{F}_j(t)$ при $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Из теоремы 2 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. Пусть $(U, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $f \in S(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $T_j \subset \mathbb{R}$ и функции $\mathcal{F}_j \in B(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\{T_j\} \in \mathfrak{M}(\operatorname{Mod} f)$, $\operatorname{Mod} \mathcal{F}_j \subset \operatorname{Mod} f$, $f(t) = \mathcal{F}_j(t)$ при $t \in T_j$ и

$$\sup_{t, \eta \in \mathbb{R}} \|\mathcal{F}_j(t) - \mathcal{F}_j(\eta)\| < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Следующая лемма дает возможность в условиях теоремы 3 (если функция f не является пв постоянной) считать множества T замкнутыми.

Лемма 2. *Пусть $T \in S(\mathbb{R})$. Тогда для любых $\delta > 0$ и $a > 0$ найдется замкнутое множество $T' \subset T$ такое, что $T' \in S(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} T' \subset \operatorname{Mod} T + a\mathbb{Z}$ и*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{mes}([\xi,\xi+1] \bigcap (T \setminus T')) < \delta.$$

(Если $\operatorname{Mod} T \neq \{0\}$, то число a можно выбрать из множества $\operatorname{Mod} T$.)

Доказательство. Обозначим $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\operatorname{mes}([t-\varepsilon,t+\varepsilon]\bigcap T)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$; $f_\varepsilon \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subset \operatorname{Mod} T$. В силу следствия 1 для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ можно найти замкнутые множества $T_j(\varepsilon) \in S(\mathbb{R})$ такие, что $\operatorname{Mod} T_j(\varepsilon) \subset \operatorname{Mod} T$, $f_\varepsilon(t) > 1 - \frac{1}{2j}$ для всех $t \in T_j(\varepsilon)$ и $f_\varepsilon(t) < 1 - \frac{1}{3j}$ для всех $t \notin T_j(\varepsilon)$. Так как

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} |\chi_T(t) - f_\varepsilon(t)|dt \to 0$$

при $\varepsilon \to +0$, то для любого $j \in \mathbb{N}$ можно найти число $\varepsilon_j > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{mes}([\xi,\xi+1] \bigcap (T \setminus T_j(\varepsilon_j))) < 2^{-j-1}\delta,$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{mes}([\xi,\xi+1] \bigcap (T_j(\varepsilon_j) \setminus T) < 2^{-j}\delta.$$

Из выбора чисел ε_j следует, что для замкнутого множества $T'' = \bigcap\limits_j T_j(\varepsilon_j)$ имеем $T'' \in S(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} T'' \subset \operatorname{Mod} T$, при этом

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{mes}([\xi,\xi+1] \bigcap (T \setminus T'')) < \frac{\delta}{2}$$

и $\operatorname{mes} T'' \setminus T = 0$. Существуют открытые множества $P_j \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, для которых функции $\chi_{P_j}(\cdot)$ периодичны с периодом $2\pi a^{-1}$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{mes}([\xi,\xi+1] \bigcap P_j) < 2^{-j-1}\delta$$

и $[-\frac{2\pi j}{a}, \frac{2\pi j}{a}] \bigcap (T'' \setminus T) \subset P_j$. Обозначим $T''' = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_j P_j$; $\operatorname{Mod} T''' \subset a\mathbb{Z}$, $\varkappa(T''') < \frac{\delta}{2}$. Множество $T' = T'' \bigcap T'''$ удовлетворяет требуемым условиям. $\square$

Приведем еще одно утверждение, обобщающее теорему 3 и доказываемое с помощью теорем 1 и 2.

Теорема 4 ([8]). *Пусть $(U, \|\cdot\|)$ — банахово пространство ($\rho(x,y) = \|x-y\|$, $x,y \in U$), $f, f_i \in S(\mathbb{R},U)$, $i \in \mathbb{N}$, и $d^{(\rho)}(f,f_i) \to 0$ при $i \to +\infty$. Тогда найдутся подпоследовательность f_{i_k}, множества $T_j \subset \mathbb{R}$ и функции $\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_{jk} \in B(\mathbb{R},U)$, $j,k \in \mathbb{N}$, такие, что $\{T_j\} \in \mathfrak{M}\Big(\sum\limits_i \operatorname{Mod} f_i\Big)$, $\operatorname{Mod}\mathcal{F}_j \subset \operatorname{Mod} f \subset \sum\limits_i \operatorname{Mod} f_i$, $\operatorname{Mod}\mathcal{F}_{jk} \subset \sum\limits_i \operatorname{Mod} f_i$, при всех $t \in \bigcup\limits_{l\le j} T_l$, $j \in \mathbb{N}$, справедливы равенства $f(t) = \mathcal{F}_j(t)$ и $f_{i_k}(t) = \mathcal{F}_{jk}(t)$ и при этом $d_\infty^{(\rho)}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_{jk}) \to 0$ при $k \to +\infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$.*

3. В данном разделе сформулирован ряд утверждений о суперпозиции п. п. функций и многозначных отображений, доказательства которых, опирающиеся на теорему 2, приведены в [10].

Пусть (U,ρ_U) и (V,ρ_V) — метрические пространства. Через $f(\cdot|_A)$ обозначается сужение функции $f: U \to V$ на множество $A \subset U$, $C_b(A,V)$ — метрическое пространство ограниченных непрерывных функций $f: A \to V$ с метрикой

$$\mathcal{D}_A(f,g) = \sup_{x\in A} \rho_V(f(x), g(x)),$$

$f,g \in C_b(A,V)$; $C_u(A,V)$ — подмножество пространства $C_b(A,V)$, состоящее из равномерно непрерывных функций.

Для любого множества $A \subset U$ через $M_b(\mathbb{R}; A, V)$ обозначим множество функций $G(\cdot,\cdot) : A \times \mathbb{R} \to V$, для которых $G(\cdot,t) \in C_b(A,V)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и функция $t \to G(\cdot,t)$ со значениями в метрическом пространстве $(C_b(A,V), \mathcal{D}_A)$ измерима. На множестве $M_b(\mathbb{R}; A, V)$ введем метрику

$$d^{(\mathcal{D}_A)}(G_1(\cdot,\cdot), G_2(\cdot,\cdot)) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} \theta(\mathcal{D}_A(G_1(\cdot,t), G_2(\cdot,t)))dt, \quad G_1, G_2 \in M_b(\mathbb{R}; A, V).$$

Пусть $(M(\mathbb{R}; U, V), d')$ — метрическое пространство функций $G(\cdot,\cdot) : U \times \mathbb{R} \to V$ таких, что $G(\cdot|_{K(x_0,j)},\cdot) \in M_b(\mathbb{R}; K(x_0,j), V)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, где $x_0 \in U$, и

$$d'(G_1(\cdot,\cdot), G_2(\cdot,\cdot)) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} d^{(\mathcal{D}_{K(x_0,j)})}(G_1(\cdot|_{K(x_0,j)},\cdot), G_2(\cdot|_{K(x_0,j)},\cdot)), \quad G_1, G_2 \in M(\mathbb{R}; U, V).$$

Функция $G(\cdot,\cdot) \in M(\mathbb{R}; U, V)$ принадлежит пространству п. п. функций $S(\mathbb{R}; U, V)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $d'(G(\cdot,\cdot+\tau), G(\cdot,\cdot)) < \varepsilon$, относительно плотно. Для функций $G \in S(\mathbb{R}; U, V)$ обычным образом определяются G-возвращающие последовательности и $\operatorname{Mod} G$. Функция $G \in M(\mathbb{R}; U, V)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}; U, V)$ тогда и только тогда, когда

$$G(\cdot|_{K(x_0,j)},\cdot) \in S(\mathbb{R}, (C_b(K(x_0,j), V), \mathcal{D}_{K(x_0,j)}))$$

для всех $j \in \mathbb{N}$. При этом $\operatorname{Mod} G = \sum\limits_j \operatorname{Mod} G(\cdot|_{K(x_0,j)},\cdot)$. Через $S_u(\mathbb{R}; U, V)$ обозначается множество функций $G \in S(\mathbb{R}; U, V)$, для которых $G(\cdot|_{K(x_0,j)}, t) \in C_u(K(x_0,j), V)$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\operatorname{cl} U = \operatorname{cl}(U,\rho)$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства (U,ρ). На множестве $\operatorname{cl} U$ вводится метрика Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(A,B) = \operatorname{dist}_\rho(A,B) = \max\Big\{\sup_{x\in A} \rho(x,B), \sup_{x\in B} \rho(x,A)\Big\}, \quad A, B \in \operatorname{cl} U.$$

Множество $\operatorname{cl}' U = \operatorname{cl}(U,\rho')$ состоит из всех непустых замкнутых подмножеств метрического пространства (U,ρ) с метрикой Хаусдорфа $\operatorname{dist}'(\cdot,\cdot) = \operatorname{dist}_{\rho'}(\cdot,\cdot)$, соответствующей метрике ρ'. Для полного метрического пространства (U,ρ) пространства $(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist})$ и $(\operatorname{cl}' U, \operatorname{dist}')$ также полные. Если $A, B \in \operatorname{cl} U \subset \operatorname{cl}' U$, то $\operatorname{dist}'(A,B) = \theta(\operatorname{dist}(A,B))$. Поэтому

$$S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U) = S(\mathbb{R}, (\operatorname{cl} U, \operatorname{dist})) = S_1(\mathbb{R}, (\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}')) \subset S_1(\mathbb{R}, (\operatorname{cl}' U, \operatorname{dist}')).$$

Теорема 5 ([10]). *Пусть U и V — метрические пространства, при этом пространство U полное, $F(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$ и $F(t)$ — компактные множества при п. в. $t \in \mathbb{R}$, $G(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}; U, V)$. Тогда*

$$G(F(\cdot),\cdot) = \bigcup_{x\in F(\cdot)} G(x,\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} V)$$

и $\operatorname{Mod} G(F(\cdot),\cdot) \subset \operatorname{Mod} F(\cdot) + \operatorname{Mod} G(\cdot,\cdot)$.

Теорема 5′ ([10]). *Пусть U и V — метрические пространства (пространство U можно не предполагать полным), $F(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$ и $G(\cdot,\cdot) \in S_u(\mathbb{R}; U, V)$. Тогда $\overline{G(F(\cdot),\cdot)} \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} V)$ и $\operatorname{Mod} \overline{G(F(\cdot),\cdot)} \subset \operatorname{Mod} F(\cdot) + \operatorname{Mod} G(\cdot,\cdot)$.*

Если в условиях теорем 5 и 5′ $F(\cdot) \in S_p(\mathbb{R}, (\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}))$, $p \geq 1$, и $\rho_V(G(x,t), y_0) \leq A\rho_U^{p/q}(x, x_0) + B(t)$ при всех $x \in U$ и п. в. $t \in \mathbb{R}$, где $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, $A \geq 0$, $B(\cdot) \in M'_q(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $q \geq 1$, то $\overline{G(F(\cdot),\cdot)} \in M'_q(\mathbb{R}, \operatorname{cl} V)$ и, следовательно (см. (1)), $\overline{G(F(\cdot),\cdot)} \in S_q(\mathbb{R}, (\operatorname{cl} V, \operatorname{dist}))$.

Лемма 3 ([10]). *Пусть U и V — метрические пространства, $F(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$, $G(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}; U, V)$ и выполнено (хотя бы) одно из следующих условий:*

1) *U — полное пространство и $F(t)$ — компактные множества при п. в. $t \in \mathbb{R}$;*
2) *$G(\cdot,\cdot) \in S_u(\mathbb{R}; U, V)$.*

Предположим также, что $F_j(\cdot) \in M(\mathbb{R},(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}))$, $G_j(\cdot,\cdot) \in M(\mathbb{R}; U, V)$, $\overline{G_j(F_j(\cdot),\cdot)} \in M(\mathbb{R},(\operatorname{cl} V, \operatorname{dist}))$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$ *и* $d^{(\mathrm{dist})}(F,F_j) \to 0$, $d'(G,G_j) \to 0$ *при* $j \to +\infty$. *Тогда*

$$d^{(\mathrm{dist})}(\,\overline{G(F(\cdot),\cdot)},\, \overline{G_j(F_j(\cdot),\cdot)}\,) \to 0$$

при $j \to +\infty$.

Из теоремы 5 и леммы 3 вытекает теорема 6 (в пространстве $\mathbb{R}^n$ вводится евклидова метрика $\rho(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}^n$).

Теорема 6. *Пусть* (V,ρ_V) *— метрическое пространство,* $F(\cdot), F_j(\cdot) \in S_p(\mathbb{R}, \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n))$, $p \geq 1$, $G(\cdot,\cdot), G_j(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n, V)$, $j \in \mathbb{N}$, *и* $d_p^{(\mathrm{dist})}(F,F_j) \to 0$, $d'(G,G_j) \to 0$ *при* $j \to +\infty$. *Предположим, что* $\rho_V(G_j(x,t),y_0) \leq A|x| + B(t)$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *и п. в.* $t \in \mathbb{R}$, *где* $y_0 \in V$, $A \geq 0$, $B(\cdot) \in M_p'(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда* $G(F(\cdot),\cdot), G_j(F_j(\cdot),\cdot) \in S_p(\mathbb{R}, \operatorname{cl} V)$, $j \in \mathbb{N}$, *и* $d_p^{(\mathrm{dist})}(G(F(\cdot),\cdot), G_j(F_j(\cdot),\cdot)) \to 0$ *при* $j \to +\infty$.

Разные частные случаи теорем 5 и 6 приводились ранее в [13], [16], [17].

Теорема 7 ([10])**.** *Пусть* (U,ρ) *— метрическое пространство,* $F(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$, $G(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}; U, \mathbb{R})$. *Обозначим* $E(t) = E(F,G;t) = \inf\limits_{x \in F(t)} G(x,t)$, $Y(t) = Y(F,G;t) = \{x \in F(t) : G(x,t) = E(t)\}$, $Y_\alpha(t) = Y_\alpha(F,G;t) = \{x \in F(t) : G(x,t) < E(t) + \alpha\}$, $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Предположим, что выполнено (хотя бы) одно из следующих двух условий:*

1) U *— полное пространство и* $F(t)$ *— компактные множества при п. в.* $t \in \mathbb{R}$;
2) $G(\cdot,\cdot) \in S_u(\mathbb{R}; U, \mathbb{R})$.

(*В этом случае* $E(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{Mod} E(\cdot) \subset \operatorname{Mod} F(\cdot) + \operatorname{Mod} G(\cdot,\cdot)$.) *Предположим также, что* $Y(t) \neq \emptyset$ *пв и* $\sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} \operatorname{mes}^* \{t \in [\xi, \xi+1] : \operatorname{dist}(Y(t), \overline{Y_\alpha(t)}\,) \geq \varepsilon\} \to 0$ *при* $\alpha \to +0$ *для любого* $\varepsilon > 0$ (mes^* *— внешняя мера*). *Тогда* $Y(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$ *и* $\operatorname{Mod} Y(\cdot) \subset \operatorname{Mod} F(\cdot) + \operatorname{Mod} G(\cdot,\cdot)$.

Замечание 1. Если выполнено условие 1), то $Y(t) \neq \emptyset$ пв и $Y(\cdot), \overline{Y_\alpha(\cdot)} \in M(\mathbb{R},(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}))$, поэтому функции $\operatorname{dist}(Y(\cdot), \overline{Y_\alpha(\cdot)}\,)$, $\alpha > 0$, измеримы и вместо внешней меры mes^* можно использовать меру Лебега mes. При выполнении условия 2) возможны ситуации, когда $Y(t) = \emptyset$ пв, а также когда $Y(t) \neq \emptyset$ пв, но функции $\operatorname{dist}(Y(\cdot), \overline{Y_\alpha(\cdot)}\,)$ не измеримы.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 7 $F(\cdot) \in S_p(\mathbb{R},(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}))$, $p \geq 1$, то $\operatorname{dist}(F(\cdot), \{x_0\}) \in M_p'(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Поэтому $Y(\cdot) \in M_p'(\mathbb{R},(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}))$ и, следовательно, $Y(\cdot) \in S_p(\mathbb{R},(\operatorname{cl} U, \operatorname{dist}))$.

Следствие 1. Пусть U и V — метрические пространства, $F(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$, $G(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}; U, V)$ и выполнено (хотя бы) одно из следующих двух условий:

1) U — полное пространство и $F(t)$ — компактные множества при п. в. $t \in \mathbb{R}$;
2) $G(\cdot,\cdot) \in S_u(\mathbb{R}; U, V)$.

Пусть $H(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} V)$. Обозначим $Y(t) = \{x \in F(t) : G(x,t) \in H(t)\}$, $Y_\alpha(t) = \{x \in F(t) : \rho_V(G(x,t), H(t)) < \alpha\}$, $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что $Y(t) \neq \emptyset$ пв и

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \operatorname{mes}^* \{t \in [\xi, \xi+1] : \operatorname{dist}(Y(t), \overline{Y_\alpha(t)}\,) \geq \varepsilon\} \to 0$$

при $\alpha \to +0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда $Y(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$ и $\operatorname{Mod} Y(\cdot) \subset \operatorname{Mod} F + \operatorname{Mod} G + \operatorname{Mod} H$.

Для доказательства следствия 1 теоремы 7 достаточно ввести новую функцию $G'(x,t) = \rho_V(G(x,t), H(t))$, $x \in U$, $t \in \mathbb{R}$, которая принадлежит пространству $S(\mathbb{R}; U, \mathbb{R})$ (множеству $S_u(\mathbb{R}; U, \mathbb{R})$, если выполнено условие 2)) и $\operatorname{Mod} G' \subset \operatorname{Mod} G + \operatorname{Mod} H$.

Следствие 2. Пусть (U,ρ) — компактное метрическое пространство, $F(\cdot)\in S_1(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$, $G(\cdot,\cdot)\in S_1(\mathbb{R},C_b(U,\mathbb{R}))$, $g(\cdot)\in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $g(t)\in G(F(t),t)$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$. Положим $Y(t)=\{x\in F(t):G(x,t)=g(t)\}$, $Y_\alpha(t)=\{x\in F(t):|G(x,t)-g(t)|<\alpha\}$, $\alpha>0$, $t\in\mathbb{R}$ (тогда $Y(\cdot),\overline{Y_\alpha(\cdot)}\in M_1(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$). Предположим, что

$$d_1^{(\mathrm{dist})}(Y(\cdot),\overline{Y_\alpha(\cdot)}\,)\to 0$$

при $\alpha\to+0$. Тогда $Y(\cdot)\in S_1(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$ и $\operatorname{Mod}Y(\cdot)\subset\operatorname{Mod}F+\operatorname{Mod}G+\operatorname{Mod}g$.

Для функции $g(\cdot)=\min\limits_{x\in F(\cdot)}G(x,\cdot)$ следствие 2 теоремы 7 (если использовать теорему 2) вытекает также из теоремы 6 в [4]. Частный случай следствия 2 при $g(\cdot)=\max\limits_{x\in F(\cdot)}G(x,\cdot)$ и $F(t)=K$ пв, где K — компакт в $(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$, доказан в [18]. В последней работе приведен также пример, показывающий, что (в условиях следствия 2) отображения $t\to\overline{Y_\alpha(t)}$, $\alpha>0$, $t\in\mathbb{R}$, могут не принадлежать пространству $S(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$.

Теорема 8. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $F(\cdot)\in S(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$ и $G(\cdot,\cdot)\in S_u(\mathbb{R};U,\mathbb{R})$. Тогда для любого $\alpha>0$ существует функция $f^\alpha(\cdot)\in S(\mathbb{R},U)$ такая, что $\operatorname{Mod}f^\alpha\subset\operatorname{Mod}F+\operatorname{Mod}G$ и $f^\alpha(t)\in Y_\alpha(F,G;t)$ пв (используются обозначения из теоремы 7). Если пространство U сепарабельное, то для любого $\alpha>0$ найдется счетное множество функций $f_j^\alpha\in S(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$, таких, что $\operatorname{Mod}f_j^\alpha\subset\operatorname{Mod}F+\operatorname{Mod}G$, $f_j^\alpha(t)\in Y_\alpha(F,G;t)$ пв и $\overline{Y_\alpha(F,G;t)}=\overline{\bigcup\limits_j f_j^\alpha(t)}$ пв.*

Теорема 8 следует из теоремы 3 в [6] и равенства (1). Если в условии теоремы 8 $F(\cdot)\in S_p(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$, $p\geq 1$, то все функции $f^\alpha(\cdot)$ и $f_j^\alpha(\cdot)$, $j\in\mathbb{N}$, можно выбрать из пространства $S_p(\mathbb{R},U)$. Теорема 8 обобщает теорему 4 из [4], один частный случай которой (когда $F(t)\equiv K$, где K — компакт в $\mathbb{R}^n$) приведен также в [18].

Литература

1. Долбилов А.М., Шнейберг И.Я. *Почти периодические многозначные отображения и их сечения* // Сиб. матем. журн. – 1991. – Т. 32. – № 2. – С. 172–175.
2. Fryszkowski A. *Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps* // Studia math. – 1983. – T. 76. – № 2. – S. 163–174.
3. Bressan A., Colombo G. *Extensions and selections of maps with decomposable values* // Studia math. – 1988. – T. 90. – S. 69–86.
4. Данилов Л.И. *Почти периодические сечения многозначных отображений* // Изв. отд. матем. и информатики УдГУ. – Ижевск, 1993. – Вып. 1. – С. 16–78.
5. Данилов Л.И. *О многозначных почти периодических отображениях, зависящих от параметра* // Вестн. Удмуртск. ун-та. – 1994. – Вып. 2. – С. 29–44.
6. Данилов Л.И. *О сечениях многозначных почти периодических отображений.* – Ред. журн. “Сиб. матем. журн.” – Новосибирск, 1995. – 39 с. – Деп. в ВИНИТИ 31.07.95, № 2340-В95.
7. Данилов Л.И. *Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений* // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – № 10. – С. 3–24.
8. Данилов Л.И. *О почти периодических мерозначных функциях.* I. – ФТИ УрО РАН. – Ижевск, 1996. – 72 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.05.96, № 1434-В96.
9. Данилов Л.И. *Мерозначные почти периодические функции* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 61. – № 1. – С. 57–68.
10. Данилов Л.И. *О суперпозиции почти периодических многозначных отображений и функций.* – ФТИ УрО РАН. – Ижевск, 1995. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 31.01.95, № 262-В95.
11. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции.* — М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
12. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.

13. Данилов Л.И. *Многозначные почти периодические отображения и их сечения.* – ФТИ УрО РАН. – Ижевск, 1993. – 36 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.09.93, № 2465-В93.
14. Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие.* – М.: Наука, 1973. – 551 с.
15. Иосида К. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1967. – 624 с.
16. Иванов А.Г. *Мерозначные почти периодические функции.* II. – УдГУ. – Ижевск, 1991. – 62 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.04.91, № 1721-В91.
17. Долбилов А.М. *Оператор Немыцкого в пространстве почти периодических функций Степанова* // Вестн. Удмурт. ун-та. – 1992. – Вып. 1. – С. 53–56.
18. Данилов Л.И., Иванов А.Г. *К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 50–59.

Физико-технический институт
Уральского Отделения
Российской Академии Наук

Поступила
15.12.1995