ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 515.124

*Е.Н. СОСОВ*

# О МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВСЕХ $N$-СЕТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПО БУЗЕМАНУ

В метрическом пространстве, удовлетворяющем глобальному условию неположительности кривизны по Буземану, рассматривается пространство всех $N$-сетей $\Sigma_N$ с индуцированной метрикой Хаусдорфа $\alpha$. Для пространства $(\Sigma_N, \alpha)$ находится внутренняя метрика, относительно которой множество $\Sigma_N$ является геодезическим пространством. Доказывается, что при $N > 1$ пространство $(\Sigma_N \setminus \Sigma_{N-1}, \alpha)$ удовлетворяет локальному условию неположительности кривизны по Буземану.

## 1. Необходимые обозначения и определения

Рассмотрим метрическое пространство $X$ с выделенным семейством сегментов $S$ (сегментом $[x, y]$ с концами $x, y \in X$ называется непрерывная кривая, соединяющая точки $x$, $y$, длина которой равна расстоянию $xy$ между этими точками ([1], с. 42)), удовлетворяющее следующим условиям.

$(A)$. Каждый подсегмент произвольного сегмента из $S$ принадлежит $S$.

$(B)$. Для любых $x, y \in X$ существует единственный сегмент $[x, y] \in S$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения.

$R_+$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел; для $\lambda \in [0, 1]$, $x, y \in X$ $\omega_\lambda[x, y]$ — точка сегмента $[x, y] \in S$ такая, что $x\omega_\lambda[x, y] = \lambda xy$.

$B(x, r)$ ($B[x, r]$) — открытый (замкнутый) шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$;

$xW = \inf\limits_{y \in W} xy$ для $x \in X$, $W \subset X$.

$\Sigma_N$ — множество всех непустых подмножеств в $(X, \rho)$, состоящих не более чем из $N$ точек;

$\alpha : \Sigma_N \times \Sigma_N \to R_+$, $\alpha(M, T) = \max\{\max\{xT : x \in M\},\ \max\{tM : t \in T\}\}$ — метрика Хаусдорфа на множестве $\Sigma_N$ ([2], с. 223).

$B_\alpha(M, r)$ — открытый шар с центром в точке $M \in (\Sigma_N, \alpha)$ радиуса $r > 0$;

$S(N)$ — группа всех подстановок множества из $N$ элементов;

$X^N/\sim$ — фактор-пространство пространства $X^N$ по следующему отношению эквивалентности : $(x_1, \dots, x_N) \sim (y_1, \dots, y_N)$, если найдется такое $\sigma \in S(N)$, что $y_1 = x_{\sigma(1)}, \dots, y_N = x_{\sigma(N)}$;

$\widehat{\alpha} : X^N/\sim \times X^N/\sim \to R_+$, $\widehat{\alpha} : ([(x_1, \dots, x_N)], [(y_1, \dots, y_N)]) = \min\{\max[x_1 y_{\sigma(1)}, \dots, x_N y_{\sigma(N)}] : \sigma \in S(N)\}$ — метрика на множестве $X^N/\sim$ [3]. Используя биекцию $f : X^N/\sim \to \Sigma_N$, $f([(x_1, \dots, x_N)]) = \{x_1, \dots, x_N\}$, будем рассматривать метрику $\widehat{\alpha}$ и на множестве $\Sigma_N$.

Кроме условий $(A)$, $(B)$ будем использовать следующее условие глобальной неположительности кривизны по Буземану пространства $(X, \rho)$ ([1], с. 304; [4], с. 63).

$(C)$. Для любых $x, y, z \in X$ $2\omega_{1/2}[z, x]\omega_{1/2}[z, y] \le xy$.

Понадобятся также следующие определения.

Метрическое пространство $(X, \rho)$ называется пространством с внутренней метрикой, если для любых $x, y \in X$ величина $xy$ равна точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки $x$, $y$ [5].

Метрическое пространство $X$ называется геодезическим пространством, если любые две его точки можно соединить сегментом [5]. (В первоначальном варианте в этом определении пространство $X$ считали полным метрическим пространством [6].)

Множество $M \subset X$ называется множеством существования, если $M \cap B[x, xM] \neq \emptyset$ для каждого $x \in X$ [7].

Для множества существования $M$ $P_M : X \to 2^X$, $P_M(x) = M \cap B[x, xM]$ — оператор метрического проектирования [7]. В дальнейшем вместо $\bigcup_{x \in W} P_M(x)$ будем писать $P_M(W)$, где $W \subset X$.

$\Omega_\lambda(M, W) = \bigcup \{\omega_\lambda[x, v] \cup \omega_\lambda[u, y] : x \in M,\ y \in W,\ v \in P_W(x),\ u \in P_M(y)\}$, где $\lambda \in [0, 1]$ и $M$, $W$ — множества существования.

## 2. Постановка задачи и результаты

Согласно теореме 2 из [8] в пространстве $(X, \rho)$, удовлетворяющем условиям $(A)$, $(B)$, множество всех непустых компактных (конечных) множеств с метрикой Хаусдорфа является геодезическим пространством, а в силу предложения 1 из [9] следует, что в том же пространстве с дополнительным условием $(C)$ множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств с метрикой Хаусдорфа удовлетворяет глобальному условию неположительности кривизны по Буземану. Естественно, что аналогичные задачи возникают и для пространства $(\Sigma_N, \alpha)$. Проясняет ситуацию в этом случае

**Теорема.** *Пусть метрическое пространство $(X, \rho)$ удовлетворяет условиям $(A)$, $(B)$. Тогда верны следующие утверждения*:

(i) *на множестве $\Sigma_N$ $\alpha \leq \widehat{\alpha}$, причем $\alpha = \widehat{\alpha}$ при $N \leq 2$;*
(ii) *метрика $\widehat{\alpha}$ является внутренней для пространства $(\Sigma_N, \alpha)$ и $(\Sigma_N, \widehat{\alpha})$ — геодезическое пространство*;
(iii) *при $N > 2$ для каждого $M \in \Sigma_N \setminus \Sigma_{N-2}$ и для любых $W, T \in B_\alpha(M, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{uv : u, v \in M,\ u \neq v\}/8$, $\alpha(W, T) = \widehat{\alpha}(W, T)$, т. е. при $N > 2$ на множестве $\Sigma_N \setminus \Sigma_{N-2}$ метрики $\alpha$, $\widehat{\alpha}$ локально совпадают.*

*Если кроме условий $(A)$, $(B)$ выполняется условие $(C)$, то при $N > 1$ для каждого $M \in (\Sigma_N \setminus \Sigma_{N-1}, \alpha)$ и для любых $W, T, D \in B_\alpha(M, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{uv : u, v \in M,\ u \neq v\}/4$, $2\alpha(\Omega_{1/2}(W, D), \Omega_{1/2}(T, D)) \leq \alpha(W, T)$, т. е. при $N > 1$ пространство $(\Sigma_N \setminus \Sigma_{N-1}, \alpha)$ удовлетворяет локальному условию неположительности кривизны по Буземану.*

**Следствие.** Пусть метрическое пространство $(X, \rho)$ удовлетворяет условиям $(A)$, $(B)$; $M, W \in \Sigma_N$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

(i) $\alpha(M, W) = \max\{uv : u \in M,\ v \in W\}$,
(ii) $P_W(M) = W$ или $P_M(W) = M$,
(iii) $\alpha(M, W) = \widehat{\alpha}(M, W)$.

Тогда $N$-сети $M$, $W$ могут быть соединены сегментом в пространстве $(\Sigma_N, \alpha)$.

**Пример.** Рассмотрим в евклидовой плоскости $R^2$ две 3-сети: $M = \{(0;0), (-a;-a), (-a;a)\}$, $W = \{(0;0), (a;a), (a;-a)\}$, где $a \in R_+$.

Тогда нетрудно найти $\alpha(M, W) = \sqrt{2}a$, $\widehat{\alpha}(M, W) = 2a$, $\Omega_{1/2}(M, W) = \{(0;0), (-a/2;-a/2), (-a/2;a/2), (a/2;a/2), (a/2;-a/2)\} \in \Sigma_5$. Кроме того, $2\alpha(M, T) = 2\alpha(W, T) = \alpha(M, W)$, $2\widehat{\alpha}(M, D) = 2\widehat{\alpha}(W, D) = \widehat{\alpha}(M, W)$, где $T = \{(-a/2;-a/2), (-a/2;a/2), (a/2;a/2), (a/2;-a/2)\} \in \Sigma_4$, $D = \{(0;0), (0;a), (0;-a)\} \in \Sigma_3$. Отсюда нетрудно установить, что в любой окрестности 3-сети $O = \{(0;0)\} \in \Delta$ существуют две 3-сети, несоединимые сегментом в метрике Хаусдорфа и $\alpha \neq \widehat{\alpha}$.

## 3. Доказательства полученных результатов

**Доказательство теоремы.** (i) Первое неравенство почти очевидно. Действительно, для каждого $\sigma \in S(N)$

$$\begin{aligned}\alpha(\{x_1,\dots,x_N\},\{y_1,\dots,y_N\}) &=\\ &= \max\{\max\{x_i\{y_1,\dots,y_N\} : 1 \le i \le N\}, \max\{y_j\{x_1,\dots,x_N\} : 1 \le j \le N\}\} \le\\ &\le \max\{\max\{x_i y_{\sigma(i)} : 1 \le i \le N\}, \max\{y_j x_{\sigma(j)} : 1 \le j \le N\}\}.\end{aligned}$$

Осталось взять минимум по всем $\sigma \in S(N)$ в правой части неравенства и использовать определение метрики $\widehat{\alpha}$. Доказательство второго утверждения этого пункта удобнее отложить до завершения доказательства утверждений следующего пункта.

(ii) Докажем сначала, что $(\Sigma_N, \widehat{\alpha})$ — геодезическое пространство. Выберем произвольно $M = \{x_1,\dots,x_N\}$, $W = \{y_1,\dots,y_N\} \in (\Sigma_N, \widehat{\alpha})$. Тогда $N$-сети $\{\omega_\lambda[x_1, y_{\sigma^*(1)}],\dots,\omega_\lambda[x_N, y_{\sigma^*(N)}]\}$, где $\sigma^*$ — некоторый элемент группы $S(N)$, удовлетворяющий условию

$$\widehat{\alpha}(\{x_1,\dots,x_N\},\{y_{\sigma^*(1)},\dots,y_{\sigma^*(N)}\}) = \max[x_1 y_{\sigma^*(1)},\dots,x_N y_{\sigma^*(N)}],$$

определяют сегмент $[M, W] \subset (\Sigma_N, \widehat{\alpha})$, когда $\lambda$ изменяется на отрезке $[0,1]$. Следовательно, $(\Sigma_N, \widehat{\alpha})$ — геодезическое пространство.

Докажем, что $\widehat{\alpha}$ — внутренняя метрика для пространства $(\Sigma_N, \alpha)$. Пусть $M = \{x_1,\dots,x_N\}$, $W = \{y_1,\dots,y_N\} \in \Sigma_N$, $\sigma \in S(N)$. Рассмотрим непрерывную спрямляемую кривую $\gamma_\sigma = \{[x_1, y_{\sigma(1)}],\dots,[x_N, y_{\sigma(N)}]\} \subset (\Sigma_N, \alpha)$ с концами $M, W \in \Sigma_N$, где $[x_i, y_{\sigma(i)}] \in S$ $(i = 1,\dots,N)$. Очевидно, что эта кривая имеет наименьшую длину среди всех тех непрерывных спрямляемых кривых пространства $(\Sigma_N, \alpha)$, каждая из которых может быть задана множеством $\{\gamma[x_1, y_{\sigma(1)}],\dots,\gamma[x_N, y_{\sigma(N)}]\}$, где $\gamma[x_i, y_{\sigma(i)}]$ — кривая в пространстве $(X, \rho)$ с концами $x_i$, $y_{\sigma(i)}$ $(i = 1,\dots,N)$. Нетрудно заметить, что $\min\{L(\gamma_\sigma) : \sigma \in S(N)\} = \widehat{\alpha}(M, W)$, где $L(\gamma_\sigma)$ — длина кривой $\gamma_\sigma$ в метрике $\alpha$. Таким образом, метрика $\widehat{\alpha}$ является внутренней для пространства $(\Sigma_N, \alpha)$.

Для того чтобы на множестве $\Sigma_2$ доказать равенство $\alpha = \widehat{\alpha}$, достаточно теперь доказать, что пространство $(\Sigma_2, \alpha)$ геодезическое. Воспользуемся способом, предложенным в доказательстве следствия 1 из [8]. Пусть $M = \{x, y\} \in \Sigma_2$, $W = \{u, v\} \in \Sigma_2$ и для определенности $xu = \max[xu, xv, yu, yv]$. Тогда непосредственной проверкой устанавливается, что 2-сети $\{\omega_\lambda[x, v], \omega_\lambda[y, u]\}$ определяют сегмент $[M, W] \subset (\Sigma_2, \alpha)$, когда $\lambda$ изменяется на отрезке $[0,1]$. Таким образом, при выполнении условий $(A)$, $(B)$ пространство $(\Sigma_2, \alpha)$ геодезическое.

(iii) Пусть теперь $N$-сети $M$, $W$, $T$ выбраны в соответствии с условиями п. (iii) теоремы. Тогда из неравенства $\alpha(M, T) = \max\{\max\{xT : x \in M\}, \max\{tM : t \in T\}\} < \varepsilon$, неравенства треугольника и определения $\varepsilon$ следует, что для каждого $t \in T$ найдется единственный элемент $x(t) \in M$ такой, что $tx(t) < \varepsilon$, а также для каждого $x \in M$ найдется такой элемент $u \in T$, что $ux < \varepsilon$. Учтем также, что $M \in \Sigma_N \setminus \Sigma_{N-2}$. Тогда получим, что для каждого $x \in M$ в шаре $B(x, \varepsilon)$ содержатся один или два элемента из $N$-сети $T$. Аналогичное рассуждение справедливо и для $N$-сети $W$. Для каждого $x \in M$ подсети $N$-сетей $T$ и $W$, принадлежащие открытому шару $B(x, \varepsilon)$, можно соединить сегментом, поскольку было доказано, что пространство $(\Sigma_2, \alpha)$ геодезическое. Очевидно, точки этого сегмента приналежат шару $B(x, 2\varepsilon)$. Нетрудно проверить, что, объединяя точки всех построенных таким образом сегментов, получим сегмент $[T, W] \subset (\Sigma_N, \alpha)$. Отсюда и из утверждений п. (ii) следует, что $\alpha(W, T) = \widehat{\alpha}(W, T)$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $N$-сети $M$, $W$, $T$, $D$ выбраны в соответствии с условиями теоремы. Тогда из неравенства $\alpha(M, T) < \varepsilon$, неравенства треугольника и определения $\varepsilon$ следует, что для каждого $t \in T$ найдется единственный элемент $x(t) \in M$ такой, что $tx(t) < \varepsilon$, а также для каждого $x \in M$ найдется такой элемент $u \in T$, что $ux < \varepsilon$. Учтем, что $M \in \Sigma_N \setminus \Sigma_{N-1}$. Тогда получим, что для каждого $x \in M$ в шаре $B(x, \varepsilon)$ содержится точно один элемент $t(x) \in T$. Аналогичное рассуждение справедливо и для $N$-сетей $W$, $D$. Соответствующие элементы обозначим $w(x) \in W$, $d(x) \in D$. Тогда $2\omega_{1/2}[w(x), d(x)]\omega_{1/2}[t(x), d(x)] \le w(x)t(x)$ для каждого $x \in M$. Нетрудно проверить, что $2\alpha(\Omega_{1/2}(W, D), \Omega_{1/2}(T, D)) \le \alpha(W, T)$. $\square$

**Доказательство следствия.** Докажем, что из (i) следует (ii) методом от противного. Пусть выполняется условие (i), а (ii) не имеет места. Тогда найдутся $w \in W \backslash P_W(M)$, $z \in M \backslash P_M(W)$. Из этих включений, определений метрики Хаусдорфа и оператора метрической проекции следует $\alpha[M, W] = \max\{\max\{xW : x \in M\}, \max\{tM : t \in W\}\} < \max\{\max\{xw : x \in M\}, \max\{tz : t \in W\}\} \leq \max\{uv : u \in M, v \in W\}$. Отсюда и из условия (i) получаем противоречие. Таким образом, из (i) следует (ii).

Докажем, что из (ii) следует (iii). Пусть для определенности $P_W(M) = W$. Отсюда и из биективности множеств $X^N/\sim$, $\Sigma_N$ следует, что найдутся такие $(x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N) \in X^N$, что $M = \{x_1, \ldots, x_N\}$, $W = \{y_1, \ldots, y_N\}$, $y_1 \in P_W(x_1), \ldots, y_N \in P_W(x_N)$. Тогда $\widehat{\alpha}(M, W) \leq \max\{x_1y_1, \ldots, x_Ny_N\} = \alpha[M, W]$. Отсюда и из утверждения (i) теоремы следует (iii).

Из утверждения (ii) теоремы следует, что (iii) влечет заключение следствия. □

## Литература


1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
2. Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Топология гиперпространств и ее приложения* // Матем. кибернетика. – 1989. – № 4. – С. 1–48.
4. Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics.* — New York–Basel: Marsel Dekker Inc., 1987. – 159 p.
5. Берестовский В.Н. *Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову* // Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 3–18.
6. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Евклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 178–179.
7. Власов Л.П. *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах* // УМН. – 1973. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 3–66.
8. Sosov E.N. *On Hausdorff intrinsic metric* // Lobachevskii J. of Math. – 2001. – V. 8. – P. 185–189.
9. Foertsch T. *Isometries of spaces of convex compact subsets of $CAT(0)$-spaces* // arXiv:math.MG/0404380 v1 21 Apr 2004.



*Научно-исследовательский институт*
*математики и механики*
*им. Н.Г. Чеботарева*
*при Казанском государственном университете*



*Поступила*
09.08.2004