И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.852

Р. ГАБАСОВ, Ф.М. КИРИЛЛОВА

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ МЕТОДАМИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Статья посвящена изложению одного подхода к решению базовой задачи теории управления системами с запаздыванием — синтезу стабилизирующих обратных связей. Подход опирается на конструктивную теорию оптимального управления [1], разработанную авторами и их коллегами. Стабилизация динамических систем была первой задачей, на основе которой стала строиться теория управления (регулирования). До начала 50-х гг. XX века она оставалась центральной задачей теории управления. С появлением теории оптимального управления интерес к проблеме стабилизации стал менее заметным, но в последние годы она вновь привлекает внимание многих ученых, поскольку практическое значение проблемы стабилизации не уменьшилось и появились новые возможности решения классической задачи с помощью методов, созданных в теории управления за последние пятьдесят лет. Системы с запаздыванием представляют непосредственное обобщение обыкновенных динамических систем. Современный этап их развития начался в конце 40-х гг. XX века и почти совпал с началом современного этапа теории управления. Несмотря на значительные усилия ученых, многие задачи управления остаются для систем с запаздыванием до сих пор мало исследованными. К таким задачам относится и задача стабилизации систем с запаздыванием с помощью ограниченных обратных связей [2], [3]. В данной статье сначала излагается метод решения задачи стабилизации динамических систем с запаздыванием в состоянии и управлении. Метод основан на позиционных решениях вспомогательных задач оптимального управления. Затем исследуется проблема синтеза наблюдателей систем с запаздыванием и после этого решается задача стабилизации систем с запаздыванием в классе обратных связей по выходу.

1. Ограниченные стабилизирующие обратные связи по состоянию

1.1. Рассмотрим динамическую систему, поведение которой при $t \geq t_*$ описывается уравнением

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^i(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{1i}(t)x^{(i)}(t-\beta) = u(t). \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ — скаляр, характеризующий положение системы в момент времени t; $x^{(i)}(t)$ — i-я производная; $u(t)$, $t \geq t_*$, — скалярная кусочно-непрерывная функция (управление); $a_i(t)$, $a_{1i}(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \geq t_*$, — ограниченные кусочно-непрерывные скалярные функции; β, $0 < \beta < \infty$, — запаздывание.

Как известно, в теории систем с запаздыванием (1.1) отрезок непрерывной n-мерной кривой

$$x_t(\cdot) = (x^i(s)), \quad s \in [t-\beta, t], \quad i = \overline{0, n-1},$$

называется состоянием системы (1.1) в момент t. Пусть $X_t(\cdot)$ — множество состояний в момент t.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры” при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф02Р-008).

Определение 1.1. Функционал

$$u = u(t, x_t(\cdot)), \quad x_t(\cdot) \in X_t(\cdot), \quad t \geq t_*, \quad u(t, 0) = 0, \quad t \geq t_*, \tag{1.2}$$

называется ограниченной стабилизирующей обратной связью (по состоянию), если при заданном L, $0 < L < \infty$,

1) справедливо неравенство

$$|u(t, x_t(\cdot))| \leq L, x_t(\cdot) \in X_t(\cdot), \quad t \geq t_*; \tag{1.3}$$

2) нулевое решение $x(t) = 0$, $t \geq t_*$, замкнутой системы

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{1i}(t) x^{(i)}(t - \beta) = u(t, x_t(\cdot)) \tag{1.4}$$

асимптотически устойчиво в $X_{t_*}(\cdot)$.

Синтез эффективных (с большой областью притяжения $X_{t_*}(\cdot)$ и определенным качеством переходных процессов в (1.4)) ограниченных стабилизирующих обратных связей (1.2), (1.3) представляет весьма серьезную математическую проблему. Ее решение вряд ли возможно без использования современных вычислительных устройств дискретного действия. В связи с этим в данной статье задача стабилизации системы (1.1) решается в классе дискретных обратных связей.

Пусть $h = \beta/M > 0$ — период квантования времени (вообще говоря, малое число), $T_h = \{t_*, t_* + h, t_* + 2h, \dots\}$.

Определение 1.2. Функционал

$$u = u(t, x_t(\cdot)), \quad x_t(\cdot) \in X_t(\cdot), \quad t \in T_h, \tag{1.5}$$

называется дискретной обратной связью (с периодом квантования h), если траектория замкнутой нелинейной системы (1.4) совпадает с траекторией линейной системы (1.1) с тем же начальным состоянием и управлением

$$u(t) = u(t_* + kh, x_{t_*+kh}(\cdot)), \quad t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Проблема аналитического конструирования ограниченных дискретных стабилизирующих обратных связей (1.5) не проще аналогичной проблемы, поставленной для (1.2). Идея описываемой ниже реализации обратной связи (1.5) в режиме реального времени идентична той, что предложена в [4]–[6] для обыкновенных систем. В каждый текущий момент $\tau \in T_h$, $\tau > t_*$, по доступному состоянию $x_t(\cdot)$ строится оптимальное программное управление $u^0(t|\tau, x_\tau(\cdot))$, $t \in T(\tau)$, вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления (см. п. 1.2). При этом сопровождающая задача не решается заново, а двойственным методом корректируется решение, полученное в предыдущий момент $(\tau - h)$. Как показано в [7], эта процедура чрезвычайно эффективна — время на ее выполнение составляет несколько процентов от времени, за которое используемый микропроцессор интегрирует систему (1.1) на промежутке $T(\tau)$. Если время коррекции не превосходит h единиц реального времени, в котором записано уравнение (1.1), то можно говорить о реализации обратной связи (1.5) в режиме реального времени. На промежутке времени $[\tau, \tau + h]$ в систему (1.4) подается сигнал $u^*(t) = u^0(\tau \mid \tau, x^*_\tau, x^*_\tau(\cdot)) = u^0(\tau, x^*_\tau(\cdot)) = u(\tau, x_\tau(\cdot))$, $t \in [\tau, \tau + h]$. В результате система (1.4) в момент $\tau + h$ оказывается в состоянии $x^*_{\tau+h}(\cdot)$, и описанная процедура реализации обратной связи (1.5) повторяется. Для начального момента $\tau = t_*$ разработана специальная процедура [7].

С точки зрения приложений вполне достаточно вместо асимптотического свойства $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, обеспечить свойство $\|x(t)\| \to o(h)$, $t \to \infty$, естественное при дискретизации управлений.

1.2. Пусть θ, $0 < \theta = Nh < \infty$, — некоторое число (параметр метода), $u(t)$, $t \geq t_*$, — дискретное программное управление: $u(t) = u(t_* + kh)$, $t \in [t_* + kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $x^*_\tau(\cdot)$ — состояние системы (1.4) в текущий момент $\tau \in T_h$. В классе дискретных управлений $u(t)$, $t \in T(\tau)$, и кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, $t \in [\tau + \theta - \beta, \tau + \theta]$, рассмотрим задачу оптимального управления, сопровождающую задачу стабилизации системы (1.1),

$$B(\tau, x^*_\tau(\cdot)) = \min \int_\tau^{\tau+\theta+\beta} |u(t)| dt,$$
$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{1i}(t) x^{(i)}(t-\beta) = u(t), \tag{1.6}$$
$$x_\tau(\cdot) = x^*_\tau(\cdot), \quad u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{1i}(t) x^{(i)}(t-\beta), \quad t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta],$$
$$x^{(i)}(\tau+\theta) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, \tau+\theta+\beta].$$

Быстрые алгоритмы решения задач типа (1.6) для обыкновенных систем предложены в [7]. Они допускают обобщение и на системы с запаздыванием. Обозначим через $u^0(t \mid \tau, x^*_\tau(\cdot))$, $t \in T(\tau)$, — оптимальное программное управление задачи (1.6), X^0_τ — множество состояний $x^*_\tau(\cdot)$, для которых задача (1.6) имеет решение.

Определение 1.3. Функционал

$$u^0(\tau, x_\tau(\cdot)) = u^0(\tau \mid \tau, x_\tau(\cdot)), \quad x_\tau(\cdot) \in X^\theta_\tau(\cdot), \quad \tau \in T_h, \tag{1.7}$$

называется оптимальным стартовым управлением типа дискретной обратной связи задачи (1.6).

Теорема 1.1. *При достаточно малых $h > 0$ обратная связь*

$$u(t, x_t(\cdot)) = u^0(t, x_t(\cdot)), \quad x_t(\cdot) \in X^\theta_t(\cdot), \quad t \in T_h,$$

является ограниченной стабилизирующей дискретной обратной связью для системы (1.1).

Доказательство теоремы в основных чертах повторяет доказательство аналогичного утверждения из [6]. Пусть замкнутая система в момент τ находится в состоянии $x_\tau(\cdot)$. Значение функции Беллмана задачи (1.6) на позиции $(\tau, x_\tau(\cdot))$ равно $B(\tau, x_\tau(\cdot))$. На промежутке $[\tau, \tau+h]$ подадим в систему (1.6) управление $u^*(t) = u^0(\tau, x_\tau(\cdot))$, $t \in [\tau, \tau+h]$, после чего она в момент $\tau + h$ окажется в состоянии $x^*_{\tau+h}(\cdot)$. Из ограничений задачи (1.6) видно, что управление $u(t) = u^0(t \mid \tau, x^*_\tau(\cdot))$, $t \in T(\tau)$; $u(t) = u^0(t - \beta | \tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]$, порождает траекторию $x^0(t)$, $t \in [\tau, \tau+\theta+\beta]$ со свойством $x^0(t) \equiv 0$, $t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]$. Для позиции $(\tau+h, x^*_{\tau+h}(\cdot))$ рассмотрим управление $u(t) = u^0(t \mid \tau, x^*_\tau(\cdot))$, $t \in [\tau+h, \tau+\theta]$; $u(\tau+\theta) = u^0_h(\tau+\theta-\beta)$; $u(t) = u^0(t+\beta)$, $t \in [\tau+\theta+h, \tau+\theta+\beta]$; $u(\tau+\theta+\beta) = 0$, где $u^0_h(\tau+\theta-\beta)$ — такое число, что $|u^0_h(\tau+\theta-\beta)| \cdot h = \int_{\tau+\theta-\beta}^{\tau+\theta-\beta+h} |u^0(t)| dt$. Это управление почти допустимо, на нем выполняются все ограничения задачи (1.6), кроме $x(\tau+\theta+h) = 0$. Последнее выполняется с точностью $o(h)$: $\|x(\tau+\theta+h)\| = o(h)$. На рассматриваемом управлении критерий качества задачи (1.6) равен $B(\tau, x^*_\tau(\cdot))$. Поэтому в худшем случае будем иметь $B(\tau+h, x^*_{\tau+h}(\cdot)) \leq B(\tau, x^*(\tau)) + o(h)$. При достаточно малых $h > 0$ найдется такое число q (не зависящее от τ), при котором $B(\tau+qh, x^*_{\tau+qh}(\cdot)) < B(\tau, x_\tau(\cdot))$. Таким образом, функция Беллмана строго убывает в моменты $t_* + qh$, $q = 1, 2, \dots$, если $\|x_\tau(\cdot)\| \neq o(h)$. Поскольку она при весьма общих предположениях определенно положительна и обладает бесконечно малым высшим пределом, то $x(t_* + qh) \to o(h)$, $q = 1, 2, \dots$ Используя ограниченность управления, нетрудно показать, что $\|x(t)\| \to o(h)$, $t \to \infty$.

Дополнительные свойства обратной связи (1.7), характеризующие размеры области притяжения $X^\theta_{t_*}(\cdot)$ и качество переходных процессов в (1.4), аналогичны тем, которые приведены в [5], [6] для обыкновенных систем.

Реализация обратной связи (1.7) с помощью регуляторов аналогична описанной в [6].

1.3. Рассмотрим теперь более общую систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + B(t)u(t), \tag{1.8}$$

в которой $x(t)$, $u(t)$ — n-векторы, $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $t \geq t_*$, — ограниченные кусочно-непрерывные $n \times n$-матричные функции, $|\det\ B(t)| > \alpha > 0$, $t \geq t_*$.

Состояние системы (1.8) имеет вид $x_t(\cdot) = x(s)$, $t - \beta \leq s \leq t$. Понятия стабилизирующей ограниченной дискретной обратной связи вводятся аналогично предыдущему случаю.

Сопровождающая задача оптимального управления теперь примет вид

$$\begin{gathered}
B(\tau, x^*_\tau(\cdot)) = \min_u \int_\tau^{\tau+\theta+\beta} \|u(t)\| dt, \\
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + B(t)u(t), \quad x_\tau(\cdot) = x^*_\tau(\cdot), \\
u(t) = B^{-1}(t)A(t)x(t-\beta), \quad t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]; \quad x(\tau+\theta) = 0, \\
\|u(t)\| \leq L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, \tau+\theta+\beta].
\end{gathered}$$

Здесь $x^*_\tau(\cdot)$ — состояние системы (1.8) в момент τ; $u(t)$, $t \in [\tau, \tau+\theta]$, — дискретное управление; $u(t)$, $t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]$, — кусочно-непрерывное управление.

Исследование задачи построения ограниченной стабилизирующей дискретной обратной связи проводится как в п. 1.2.

1.4. Перейдем к системе с запаздыванием, стабилизация которой сложнее предыдущих задач. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + b(t)u(t). \tag{1.9}$$

Здесь $u(t)$ — скаляр, значение управления в момент t, $b(t)$, $t \geq t_*$, — ограниченная кусочно-непрерывная n-вектор-функция, остальные элементы обладают теми же свойствами, что и в (1.8).

Сложность задачи стабилизации системы (1.9) определяется сложностью процедуры управления такими системами, в которых на n переменных $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ приходится только одна переменная управления $u(t)$.

Сопровождающая задача теперь имеет вид

$$\begin{gathered}
B(\tau, x^*_\tau(\cdot)) = \min_u \int_\tau^{\tau+\theta+\beta} |u(t)| dt, \qquad (1.10) \\
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + b(t)u(t), \quad x_\tau(\cdot) = x^*_\tau(\cdot), \\
A_1(t)x(t-\beta) + b(t)u(t) = 0, \quad t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]; \\
x(\tau+\theta) = 0, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, \tau+\theta+\beta].
\end{gathered}$$

Здесь $u(t)$, $t \in [\tau, \tau+\theta]$, — дискретное управление; $u(t)$, $t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]$, — кусочно-непрерывное управление.

Замечание 1.1. Сложность задачи (1.10) определяется ограничением на $[\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]$. При фактическом решении разумно заменить его на $-e\varepsilon \leq A_1(t)x(t-\beta)+b(t)u(t) \leq e\varepsilon$, $t \in [\tau+\theta, \tau+\theta\beta]$, где $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число.

1.5. Рассмотрим, наконец, динамическую систему с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t-\beta), \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R.$$

Пусть $u_t(\cdot) = (u(s),\ t - \beta \leq s < t)$, $U_t(\cdot) = \{u_t(\cdot) : |u(s)| \leq L,\ t-\beta \leq s \leq t\}$. Состоянием системы (1.10) в момент t будем называть пару $(x(t), u_t(\cdot))$. Тогда $(t, x(t), u_t(\cdot))$ — позиция в момент t; $x(t) \in X_t \subset R^n$.

Определение 1.4. Функционал

$$u = u(t, x(t), u(\cdot)), \quad x(t) \in X_t, \quad u_t(\cdot) \in U_t(\cdot), \quad t \geq t_*, \quad u(t, 0) = 0, \quad t \geq t_*,$$

называется стабилизирующей обратной связью, если нулевое решение уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t, x(t), u_t(\cdot)) \tag{1.11}$$

асимптотически устойчиво в X_{t_*} для всех $u_{t_*}(\cdot) \in U_{t_*}(\cdot)$.

Понятия ограниченной дискретной обратной связи вводятся по аналогии с предыдущими случаями.

С целью реализации ограниченных стабилизирующих дискретных обратных связей рассмотрим в классе дискретных управлений $u(t)$, $t \in T(\tau)$, следующую сопровождающую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered} B(\tau, x^*(\tau), u_\tau(\cdot)) = \min \int_\tau^{\tau+\theta-\beta} |u(t)| dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t-\beta), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \quad u_\tau(\cdot) = u^*_\tau(\cdot), \\ x(\tau+\theta) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t \in [t+\theta-\beta, \tau+\theta], \\ |u(t)| \leq L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, \tau+\theta]. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Стабилизирующая обратная связь, построенная по оптимальному стартовому управлению типа дискретной связи задачи (1.12), обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения замкнутой системы (1.11) при $x(t) \to 0$, $t \to \infty$.

1.6. Выше рассматривался только один тип сопровождающих задач оптимального управления. При использовании других типов задач оптимального управления можно строить стабилизирующие обратные связи, обеспечивающие другие качественные свойства переходных процессов в замкнутых системах.

2. Наблюдатели систем с запаздыванием

В современной теории управления наблюдатели динамических систем используются при синтезе обратных связей по выходу. Они преобразуют доступные сигналы измерительных устройств в оценки состояний динамических систем, на базе которых регуляторы вырабатывают управляющие воздействия. С неуклонным ростом размерности математических моделей исследуемых в наши дни физических систем значение наблюдателей возрастает, поскольку, как правило, с повышением точности моделирования количество доступных выходных сигналов не меняется. В [8] рассмотрена задача синтеза нелинейных наблюдателей обыкновенных динамических систем. Ниже аналогичная задача решается для систем с запаздыванием.

2.1. Пусть на промежутке времени $t \geq t_*$ поведение динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta), \tag{2.1}$$

где, как и выше, $x(t)$ — n-вектор, $A(t)$, $A_1(t)$, $t \geq t_*$, — ограниченные кусочно-непрерывные $n \times n$-матричные функции, β, $0 < \beta < \infty$, — запаздывание.

Будем считать, что вся доступная информация о поведении системы (2.1) исчерпывается заданием ограниченного множества $X_{t_*}(\cdot)$ возможных начальных состояний $x_{t_*}(\cdot) = x(s)$, $t_* - \beta \leq s \leq t_*$, и сигналом $y(t)$, $t \geq t_*$, измерительного устройства

$$y(t) = c'(t)x(t) \tag{2.2}$$

с непрерывной n-вектор-функцией $c(t)$, $t \geq t_*$.

Пусть τ, $\tau \geq t_*$, — текущий момент времени, $x_\tau(\cdot)$ — текущее состояние системы (2.1), $y_\tau[\cdot] = y(s)$, $t_* \leq s \leq \tau$, — сигнал устройства (2.2), записанный к моменту τ, $Y_\tau[\cdot]$ — множество возможных сигналов $y_\tau[\cdot]$.

Определение 2.1. Динамическую систему

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z_{t_*} = \varphi(\cdot), \tag{2.3}$$

назовем наблюдателем системы (2.1), если для любых $y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot]$, $t \geq t_*$, решения $x_t(\cdot)$, $z_t(\cdot)$, $t \geq t_*$, уравнений (2.1), (2.3) удовлетворяют соотношению

$$\|z_t(\cdot) - x_t(\cdot)\| \to 0, \quad t \to \infty, \quad \|x_t(\cdot)\| = \max_{t-\beta \leq s \leq t} \|x(s)\|. \tag{2.4}$$

Наблюдатели (2.3) будем строить с помощью системы управления

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + A_1(t)z(t-\beta) + B(t)u(t), \quad z_{t_*}(\cdot) = \varphi_{t_*}(\cdot), \tag{2.5}$$

в которой $B(t)$, $t \geq t_*$, — ограниченная кусочно-непрерывная $n \times n$-матричная функция, $u(t)$ — значение n-вектора управления в момент t; $\det B(t) \geq \alpha > 0$, $t \geq t_*$.

В терминах системы управления (2.5) задача построения наблюдателя (2.3) сводится к синтезу обратной связи

$$u = u(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z_t(\cdot) \in Z_t(\cdot), \quad y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot], t \geq t_*, \tag{2.6}$$

и начального состояния $\varphi_{t_*}(\cdot)$, при которых замкнутая система

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + A_1(t)z(t-\beta) + B(t)u(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z_{t_*}(\cdot) = \varphi_{t_*}, \tag{2.7}$$

является наблюдателем системы (2.1).

Обратная связь (2.6) определена на оси непрерывного времени $t \geq t_*$, т. е. может менять свои значения в любой момент времени $t \geq t_*$. Как и выше, будем строить дискретные обратные связи, которые могут менять свои значения только в дискретные моменты времени $t \in T_h = \{t_*, t^* + h, t^* + 2h, \dots\}$, где $h > 0$ — период квантования времени. При достаточно малых h (что предполагается в дальнейшем) качество дискретных обратных связей мало отличается от качества непрерывных аналогов.

При синтезе обратных связей большое значение имеет геометрическое ограничение

$$\|u(t, x_t(\cdot), y_t[\cdot])\| \leq L, \quad z_t(\cdot) \in Z_t(\cdot), \quad y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot], t \in T_h. \tag{2.8}$$

Ниже обратные дискретные связи будем строить с учетом ограничения (2.8).

Траектория нелинейной замкнутой системы (2.7), полученной после замыкания системы (2.1) дискретной обратной связью (2.6), представляет траекторию линейной системы (2.1) с начальным условием $z_{t_*}(\cdot) = \varphi_{t_*}(\cdot)$ и управлением

$$u(t) = u(t_* + kh, z_{t_*+kh}(\cdot), y_{t_*+kh}[\cdot]), \quad t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

После перехода к дискретным обратным связям естественно соотношение (2.4) заменить на следующее:

$$\|z_t(\cdot) - x_t(\cdot)\| \to o(h), \quad t \to \infty.$$

Пусть $\tau \in T_h$ — текущий момент времени, $\tau \geq (M+1)h$, $Mh = \beta$; $z^*_\tau(\cdot)$ — текущее состояние наблюдателя (2.7), $y_\tau[\cdot]$ — сигнал устройства (2.2), записанный к моменту τ, $0 = \mu_0(\tau) < \mu_1(\tau) < \dots < \mu_{Mn}(\tau)$ — некоторые числа, кратные h; выполняется условие наблюдаемости

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} c'(\tau - \mu_i(\tau))F(\tau - \mu_i(\tau), t_*), & \displaystyle\int_{t_*-(k+1)h}^{t_*-kh} c'(\tau - \mu_i(\tau)) \times \\ \times F(\tau - \mu_i(\tau), s+\beta)A_1(s+\beta)ds, & k = \overline{0, M-1}, \quad i = \overline{0, Mn} \end{pmatrix} = (M+1)n,$$

где $F(t,s)$, $t \geq s$, — фундаментальная $n \times n$-матрица решений уравнения (2.1); $x_k(\tau) \in R^n$, $k = \overline{-1, M-1}$, — решение системы уравнений

$$c'(\tau - \mu_i(\tau))F(\tau - \mu_i(\tau), t_*)x_{-1} + \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_*-(k+1)h}^{t_*-kh} c'(\tau - \mu_i(\tau)) \times$$
$$\times F(\tau - \mu_i(\tau), s+\beta)A_1(s+\beta)ds\, x_k = y(\tau - \mu_i(\tau)), \quad i = \overline{0, Mn};$$
$$\widehat{x}(t) = F(t, t_*)x_{-1}(\tau) + \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_*-(k+1)h}^{t_*-kh} F(t, s+\beta)A_1(s+\beta)ds\, x_k(\tau), \quad t \geq t_*.$$

В классе дискретных управлений $u(t)$, $t \in [\tau, \tau+\theta]$, и кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, $t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta]$, рассмотрим вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} B(\tau, z^*_\tau(\cdot), y_\tau[\cdot]) = \min \int_\tau^{\tau+\theta+\beta} \|u(t)\| dt, \\ \dot{z}(t) = A(t)z(t) + A_1(t)z(t-\beta) + B(t)u(t), \quad z_\tau(\cdot) = z^*_\tau(\cdot), \\ B(t)u(t) + A_1(t)z(t-\beta) - A_1(t)\widehat{x}(t-\beta) = 0, \quad t \in [\tau+\theta, \tau+\theta+\beta], \\ z(\tau+\theta) = \widehat{x}(\tau+\theta), \quad \|u(t)\| \leq L, \quad t \in [\tau, \tau+\theta+\beta]. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь $B(t)$, $t \in [\tau, \tau+\theta+\beta]$, — ограниченная кусочно-непрерывная $n \times n$-матричная функция, обеспечивающая управляемость системы (2.9), $\det B(t) \geq \alpha > 0$, $t \geq t_*$, $u(t)$ — n-вектор управления, $\theta = Nh$ — параметр метода. Обзначим через $u^0(t|\tau, z^*_\tau(\cdot), y_\tau[\cdot])$, $t \in [\tau, \tau+\theta+\beta]$, оптимальное программное управление задачи (2.9), $Z_\tau(\cdot)$ — множество всех состояний, для которых задача (2.9) имеет решение для всех $y_\tau[\cdot] \in Y_\tau[\cdot]$.

Определение 2.2. Функция

$$\begin{gathered} u^0(\tau, z_\tau(\cdot), y_\tau[\cdot]) = u^0(\tau \mid \tau, z_\tau(\cdot), y_\tau[\cdot]), \\ z_\tau(\cdot) \in Z_\tau(\cdot), \quad y_\tau[\cdot] \in Y_\tau[\cdot], \quad \tau \in T_h, \end{gathered}$$

называется оптимальным стартовым управлением типа дискретной обратной связи задачи (2.9).

Для решения задачи (2.9) можно обобщить быстрые алгоритмы, разработанные в [7], [9] для обыкновенных систем.

Теорема 2.1. *Обратная связь*

$$\begin{gathered} u(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]) = u^0(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \\ z_t(\cdot) \in Z_t(\cdot), \quad y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot], \quad t \in T_h, \end{gathered}$$

и состояние $z_{t_*}(\cdot) \in Z_{t_*}(\cdot)$ *синтезируют наблюдатель* (2.7).

Доказательство теоремы 2.1, с одной стороны, основано на доказательстве аналогичной теоремы для обыкновенных наблюдателей [8], а с другой — на доказательстве стабилизирующих свойств оптимальных обратных связей для систем с запаздыванием (см. п. 1.1).

Замечание 2.1. Начальное состояние $\varphi_{t_*}(\cdot)$ системы (2.1) считалось произвольной непрерывной (кусочно-непрерывной) функцией из $X_{t_*}(\cdot)$. Часто оно принадлежит более узкому классу функций. Например, $\varphi(t_*) = \varphi_0 \in R^n$, $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in [t_* - \beta, t_*]$. В таких случаях задача синтеза наблюдателя упрощается.

Замечание 2.2. При длительных процессах наблюдения можно использовать скользящее наблюдение [10], при котором процессы наблюдения ведутся на промежутках $[\tau - \mu, \tau]$ заданной продолжительности. Необходимые изменения в описанные выше процедуры очевидны.

Замечание 2.3. Совокупность $x_i(t)$, $i = \overline{-1, M-1}$, не обязательно строить в каждый момент $\tau \in T_h$. В предельном случае (см. выше) можно найти ее только один раз.

2.2. Рассмотрим теперь проблему наблюдения систем с запаздыванием в условиях постоянно действующих возмущений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + d(t)w(t).$$

Здесь $w(t)$, $t \geq t_*$, — неизвестное скалярное ограниченное возмущение.

Задача синтеза наблюдателей для обыкновенных систем с возмущениями исследована в [8]. Там она решена в классе возмущений, генерируемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с неизвестным начальным состоянием. В этом случае задача сводилась к стандартной задаче наблюдения состояния обыкновенной динамической системы.

Если использовать приведенные выше результаты по наблюдению систем с запаздыванием, то, следуя схеме [8], можно расширить класс возможных возмущений и в качестве возмущений рассматривать решения (выходные сигналы) нестационарных систем с запаздыванием с неизвестной функцией $\varphi(\cdot)$ начального состояния

$$w(t) = q'(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = D(t)y(t) + D_1(t)y(t-\beta), \quad y_{t_*}(\cdot) = \psi_{t_*}(\cdot).$$

3. Стабилизация систем с запаздыванием по выходным сигналам

3.1. Рассмотрим систему управления с запаздыванием в фазовых переменных

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + B(t)u(t). \tag{3.1}$$

Здесь $x(t)$, $u(t)$ — n-векторы, $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $t \geq t_*$, — ограниченные кусочно-непрерывные $n \times n$-матричные функции, β, $0 < \beta < \infty$, — запаздывание, $\det B(t) \geq \alpha > 0$, $t \geq t_*$.

Пусть начальное состояние $x_{t_*}(\cdot) = \varphi_{t_*}(\cdot)$ неизвестно, но известно ограниченное множество $X_{t_*}(\cdot)$, которому оно принадлежит. Информация о поведении $x(t)$, $t \geq t_*$, системы (3.1) в процессе управления поступает от измерительного устройства (2.2).

Предположим, что $y_t[\cdot] = y(s)$, $t_* \leq s \leq \tau$, — информация, записанная к моменту τ, $Y_t[\cdot]$ — множество возможных сигналов $y_t[\cdot]$.

Определение 3.1. Функционал

$$u = u(t, y_t[\cdot]), \quad y_t \in Y_t[\cdot], \quad t \geq t_*, \quad u(t, 0) = 0, \quad t \geq t_*, \tag{3.2}$$

называется стабилизирующей обратной связью по выходу, если нулевое решение $x(t) = 0$, $t \geq t_*$, замкнутой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + B(t)u(t, y_t[\cdot]), \quad y(t) = c'(t)x(t), \tag{3.3}$$

асимптотически устойчиво в $X_{t_*}(\cdot)$.

Один из практических способов построения стабилизирующих обратных связей по выходу (3.2), (3.3) состоит во включении в канал $y_t[\cdot] \to u$ наблюдателя, задача которого — строить по выходным сигналам $y_t[\cdot]$ оценки $z_t(\cdot)$ состояний $x_t(\cdot)$, используемые далее регулятором для выработки управляющего воздействия $u = u(t) = u(t, z_t(\cdot))$. Такой подход отличается от метода создания гарантирующих управлений [11], в котором оценки состояний не строятся, а доступная информация $y_t[\cdot]$ используется непосредственно для вычисления гарантированных оценок функционалов множеств, необходимых для точного решения задачи оптимального управления.

Следуя [8], динамическую систему управления

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + A_1(t)z(t-\beta) + D(t)v(t), \quad z_{t_*}(\cdot) = z_0(\cdot), \tag{3.4}$$

назовем базой наблюдателя, если найдется такая обратная связь

$$v = v(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z_t(\cdot) \in Z(\cdot), \quad y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot], \quad t \geq t_*,$$

при которой решения $z(t)$, $t \geq t_*$, замкнутой системы (наблюдателя)

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + A_1(t)z(t-\beta) + D(t)v(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z_{t_*}(\cdot) = z_0(\cdot),$$

обладают свойством

$$z_t(\cdot) \to x_t(\cdot), \quad t \to \infty, \tag{3.5}$$

при всех $y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot]$, $t \geq t_*$.

В (3.4) $D(t), \det D(t) \geq \alpha > 0, t \geq t_*,$ — ограниченная кусочно-непрерывная $n \times n$-матричная функция, предел в (3.5) понимается в смысле нормы $\|x_t(\cdot)\| = \max \|x(s)\|$, $t - \beta \leq s \leq t$, $\|x\| = \max |x_i|$, $i = \overline{1, n}$.

Будем говорить, что начальное состояние $z_0(\cdot)$ и обратные связи

$$u = u(t, z_t(\cdot)), \quad v = v(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z_t(\cdot) \in Z_t(\cdot), \quad y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot], \quad t \geq t_*, \tag{3.6}$$

реализуют стабилизирующую обратную связь по выходу (2.2), (3.2), если решения $(x_t(\cdot), z_t(\cdot))$, $t \geq t_*$, системы уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\beta) + B(t)u(t, z_t(\cdot)), \quad x_{t_*}(\cdot) = \varphi_{t_*}, \\ \dot{z}(t) = A(t)z(t) + A_1(t)z(t-\beta) + D(t)v(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot]), \quad z(t_0) = z_0; \quad y(t) = c'(t)x(t), \end{gathered} \tag{3.7}$$

обладают свойством

$$x(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{3.8}$$

для всех $\varphi_{t_*}(\cdot) \in X_{t_*}$.

При конструировании систем управления наиболее часто встречающиеся нелинейности связаны с насыщением. Поэтому большое значение с точки зрения приложений имеют ограничения

$$\|u(t, z_t(\cdot))\| \leq L, \|v(t, z_t(\cdot), y_t[\cdot])\| \leq M, z_t(\cdot) \in Z_t(\cdot), \quad y_t[\cdot] \in Y_t[\cdot], \quad t \geq t_*.$$

Обратные связи, удовлетворяющие этим ограничениям, будем называть ограниченными.

Как и выше, будем считать, что обратная связь может менять значение выходных сигналов только в дискретные моменты времени $t \in T_h = \{t_*, t_* + h, t_* + 2h, \dots\}$. Тогда траектории нелинейных уравнений (3.7), замкнутых дискретными обратными связями (3.6), совпадают с траекториями линейных уравнений (3.1), (3.4) с теми же начальными состояниями, но находящимися под действием программных управлений (реализаций обратных связей (3.6))

$$\begin{gathered} u(t) = u(t_* + kh, z_{t_*+kh}(\cdot)), \quad v(t) = v(t_* + kh, z_{t_*+kh}(\cdot), \quad y_{t_*+kh}[\cdot]), \\ t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{gathered}$$

Переход к дискретным управлениям делает естественным замену свойства (3.8) на новое

$$\|x(t)\| \to o(h), \quad t \to \infty,$$

которое при малых h (что предполагается) с практической точки зрения равносильно (3.8).

3.2. Пусть $\tau \in T_h$ — текущий момент времени, $\tau \geq (N+1)h$, $Nh = \beta$; $z^*_\tau(\cdot)$ — текущее состояние наблюдателя (3.4), $y_\tau[\cdot]$ — сигнал устройства (2.2), записанный к моменту τ, $\mu_i(\tau)$, $i = \overline{0, Nn}$, $0 = \mu_0(\tau) < \mu_1(\tau) < \dots < \mu_{Nn}(\tau)$, — некоторые числа, кратные h; $0 < \theta_u = N_u h < \infty$, $\theta_v = N_v h < \infty$ — параметры метода. Допустим, что выполняются условия наблюдаемости

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} c'(\tau - \mu_i(\tau))F(\tau - \mu_i(\tau), t_*), \quad \displaystyle\int_{t_*-(k+1)h}^{t_*-kh} c'(\tau - \mu_i(\tau)) \times \\ \times F(\tau - \mu_i(\tau), s+\beta)A_1(s+\beta)ds, \quad k = \overline{0, N-1}; \quad i = \overline{0, Nn} \end{pmatrix} = (N+1)n,$$

где $F(t,s)$, $t \geq s$, — фундаментальная $n\times n$-матрица решений уравнения (3.1) с $u(t)=0$, $t\geq t_*$; $x_k(\tau)\in R^n$, $k=\overline{-1,N-1}$, — решение системы

$$c'(\tau-\mu_i(\tau))F(\tau-\mu_i(\tau),t_*)+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_*-(k+1)h}^{t_*-kh}c'(\tau-\mu_i(\tau))\times$$
$$\times F(\tau-\mu_i(\tau),s+\beta)A_1(s+\beta)ds\,x_k=y(\tau-\mu_i(\tau)),\quad i=\overline{0,Nn},$$
$$\widehat{x}(t)=F(t,t_*)x_{-1}(\tau)+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_*-(k+1)h}^{t_*-kh}F(t,s+\beta)A_1(s+\beta)ds\,x_k(\tau),\quad t\geq t_*.$$

В классе дискретных управлений $v(t)$, $t\in[\tau,\tau+\theta_v]$, кусочно-непрерывных управлений $v(t)$, $t\in[\tau+\theta_v,\tau+\theta_v+\beta]$, рассмотрим задачу оптимального управления, сопровождающую процесс наблюдения

$$\begin{gathered}B_v(\tau,z^*_\tau(\cdot),y_\tau[\cdot])=\min\int_\tau^{\tau+\theta_v+\beta}\|v(t)\|dt,\\ \dot z(t)=A(t)z(t)+A_1(t)z(t-\beta)+D(t)v(t),\quad z_{\tau(\cdot)}=z^*_\tau(\cdot),\\ D(t)v(t)+A_1(t)z(t-\beta)-A_1(t)\widehat{x}(t-\beta)=0,\quad t\in[\tau+\theta_v,\tau+\theta_v+\beta],\\ z(\tau+\theta_v)=\widehat{x}(\tau+\theta_v),\quad \|v(t)\|\leq M,\quad t\in[\tau,\tau+\theta_v+\beta].\end{gathered}\tag{3.9}$$

Обозначим через $v^0(t\mid\tau,z^*_\tau(\cdot),\,y_\tau[\cdot])$, $t\in[\tau,\tau+\theta_v+\beta]$, оптимальное программное решение задачи (3.9), $Z_\tau(\cdot)$ — множество всех состояний $Z^*_\tau(\cdot)$, для которых задача (3.9) имеет решение при всех $y_\tau[\cdot]\in Y_\tau[\cdot]$.

Определение 3.2. Функция

$$\begin{gathered}v^0(\tau,z_\tau,z^*_\tau(\cdot),y_\tau[\cdot])=v^0(\tau\mid\tau,z^*_\tau(\cdot),y_\tau[\cdot]),\\ z^*_\tau(\cdot)\in Z_\tau(\cdot),\quad y_\tau[\cdot]\in Y_\tau[\cdot],\quad \tau\in T_h,\end{gathered}\tag{3.10}$$

называется оптимальным стартовым управлением типа дискретной обратной связи задачи (3.9).

Алгоритмы реализации обратной связи (3.10) аналогичны описанным в [7].

Положим

$$v(\tau,z_\tau(\cdot),y_\tau[\cdot])=v^0(\tau,z_\tau(\cdot),y_\tau[\cdot]),\quad z_\tau(\cdot)\in Z_\tau(\cdot),\quad y_\tau[\cdot]\in Y_\tau[\cdot],\quad \tau\in T_h,\tag{3.11}$$

возьмем $z_0(\cdot)\in Z_{t_*}(\cdot)$ и подадим сигнал $v(t)=v(\tau,z^*_\tau(\cdot),y_\tau[\cdot])$, $t\in[\tau,\tau+h]$, на вход наблюдателя (3.4). В результате в момент $\tau+h$ наблюдатель перейдет в состояние $z^*_{\tau+h}(\cdot)$.

В классе дискретных управлений $u(t)$, $t\in[\tau,\tau+\theta_u]$, и кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, $t\in[\tau+\theta_u,\tau+\theta_u+\beta]$, рассмотрим задачу оптимального управления, сопровождающую процесс стабилизации

$$\begin{gathered}B_u(\tau,z^*_\tau(\cdot))=\min\int_\tau^{\tau+\theta_u+\beta}\|u(t)\|dt,\\ \dot x(t)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-\beta)+B(t)u(t),\quad x_\tau(\cdot)=z^*_\tau(\cdot),\\ B(t)u(t)+A_1(t)x(t-\beta)=0,\quad t\in[\tau+\theta_u,\tau+\theta_u+\beta],\\ x(\tau+\theta)=0,\quad \|u(t)\|\leq L,\quad t\in[\tau,\tau+\theta_v+\beta].\end{gathered}\tag{3.12}$$

Пусть $u^0(\tau,z^*_\tau(\cdot))$, $t\in[\tau,\tau+\theta_u+\beta]$, — оптимальное программное управление задачи (3.12), $X_\tau(\cdot)$ — множество всех $z^*_\tau(\cdot)$, для которых задача (3.12) имеет решение.

Функцию

$$u^0(\tau,z_\tau(\cdot))=u^0(\tau\mid\tau,z_\tau(\cdot)),\quad z_\tau(\cdot)\in X_\tau(\cdot),\quad \tau\in T_h,\tag{3.13}$$

назовем оптимальным стартовым управлением типа дискретной обратной связи задачи (3.12).

Реализация (3.13) аналогична реализации (3.11).

Положим

$$u(\tau, z_\tau(\cdot)) = u^0(\tau, z_\tau(\cdot)), \quad z_\tau(\cdot) \in X_\tau(\cdot), \quad \tau \in T_h, \tag{3.14}$$

и управление

$$u^*(t) = u(\tau, z^*_\tau(\cdot)), \quad t \in [\tau, \tau + h],$$

подаем на вход системы (3.1). После этого система (3.1) перейдет в неизвестное положение $x^*(\tau + h)$, которое породит доступный в момент $\tau + h$ сигнал $y(\tau + h)$. Этот сигнал вместе с $y_\tau[\cdot]$ образует сигнал $y_{\tau+h}[\cdot]$.

Таким образом, для произвольного текущего момента времени описан шаг процесса стабилизации системы с запаздыванием (3.1) по выходу (2.2).

Можно при весьма общих условиях показать, что построенные обратные связи (3.11), (3.14) и начальное состояние $z_0(\cdot)$ реализуют ограниченную стабилизирующую дискретную обратную связь по выходу. Стабилизация динамических систем с запаздыванием в управлении (см. п. 1.5) по выходным сигналам (2.2) осуществляется с помощью наблюдателя обыкновенных систем [8] и стабилизатора по состоянию для систем с запаздыванием в управлении (см. п. 1.1).

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 5. *Нелинейные задачи.* – Минск: Изд-во “Университетское”, 1998. – 501 с.
2. Красовский Н.Н. *О стабилизации динамических систем дополнительными силами* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1. – № 1. – С. 5–16.
3. Осипов Ю.С. *О стабилизации управляемых систем с запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1. – № 5. – С. 605–618.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Стабилизация динамических систем методами оптимального управления* // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – № 1. – С. 18–23.
5. Габасов Р., Ружицкая Е.А. *Стабилизация динамических систем с обеспечением дополнительных свойств переходных процессов* // Кибернет. и системн. анализ. – 2001. – № 3. – С. 139–151.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Стабилизация нелинейных систем при больших начальных возмущениях* // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45. – № 4. – С. 5–8.
7. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 838–859.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Синтез нелинейных наблюдателей динамических систем методами оптимального управления* // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46. – № 4. – С. 5–8.
9. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Алгоритмы программной и позиционной оптимизации систем управления с промежуточными фазовыми ограничениями* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – № 10. – С. 1485–1504.
10. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. *Скользящее наблюдение за поведением динамических систем* // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45. – № 2. – С. 12–16.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Конструктивный метод гарантированной оптимизации нелинейных динамических систем* // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44. – № 4. – С. 5–8.

Белорусский государственный университет
Институт математики Национальной
Академии наук Беларуси

Поступила
02.09.2002