

Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ, Д.Н. ТУМАКОВ

## ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КВАДРАНТЕ И В ПОЛУПЛОСКОСТИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ДВУХ КВАДРАНТОВ

В данной статье исследованы переопределенные задачи Коши для двумерного уравнения Гельмгольца в квадранте и в составленной из двух квадрантов полуплоскости. В случае полуплоскости вещественный коэффициент уравнения имеет разрыв вдоль общей границы квадрантов. Основная цель исследования — получить необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют граничные функции в переопределенных задачах.

В работе использован метод интегрального преобразования Фурье в пространствах распределений медленного роста. Условия разрешимости задач Коши и условия на бесконечности (условия излучения) сформулированы на языке образов Фурье граничных функций. С помощью условий разрешимости получены утверждения о существовании и единственности решений задач Дирихле и Неймана в рассматриваемых областях. При этом фундаментальные решения уравнения Гельмгольца, функции Грина и потенциалы простого или двойного слоев непосредственно не используются. Показано, как можно применить полученные результаты при исследовании задач сопряжения электромагнитных полей (на примере задачи дифракции электромагнитной волны на стыке двух квадрантов, заполненных диэлектриком без потерь).

Переопределенные задачи Коши для полуплоскости, полуполосы (при нулевых граничных условиях на параллельных сторонах) и полосы, а также их приложения в электродинамике рассматривались ранее в [1]–[4]. Данная статья продолжает исследования в этом направлении. Двумерные задачи дифракции электромагнитных волн на прямоугольных диэлектрических клиньях исследовались в случае сред с потерями в [5]–[8] и др.

### 1. Постановка задач. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  – первый и четвертый квадранты плоскости  $(x, z)$  (см. рис. 1). В правой полуплоскости  $x > 0$  будем рассматривать уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z)u(x, z) = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом  $k(z) = \{z > 0 : k_1; z < 0 : k_2\}$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — вещественные числа. Пусть для определенности  $k_2 > k_1$ . Обозначим  $\tilde{k} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}$ .

Задача Коши для полуплоскости состоит в следующем. Нужно найти в  $Q_1 \cup Q_2$  решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0+0, z) = u_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0+0, z) = u_1(z), \quad -\infty < z < +\infty, \quad (2)$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Фонда НИОКР РТ.

и условиям сопряжения на линии разрыва коэффициента

$$u(x, 0 + 0) = u(x, 0 - 0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0), \quad 0 < x < +\infty. \quad (3)$$

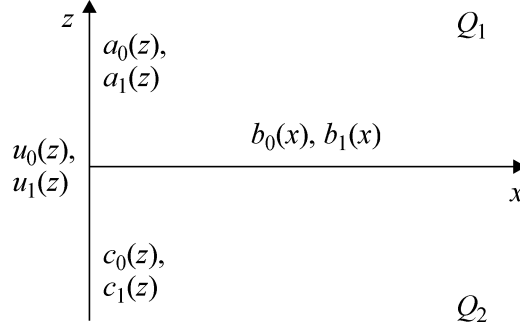


Рис. 1

Сужения граничных функций  $u_j(z)$  на полуосях  $z > 0$  и  $z < 0$  будем обозначать  $a_j(z)$  и  $c_j(z)$  соответственно, здесь и далее  $j = 1$  или  $j = 2$ .

При исследовании задачи Коши для полуплоскости, составленной из двух квадрантов, применим следующий план действий. Введем вспомогательные функции

$$b_0(x) = u(x, 0 + 0) = u(x, 0 - 0), \quad b_1(x) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0), \quad 0 < x < +\infty,$$

и будем искать функцию  $u(x, z)$  как решение задач Коши в отдельных квадрантах  $Q_1$  и  $Q_2$ . Граничные условия этих задач запишем в виде

$$u(0, z) = a_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, z) = a_1(z), \quad z > 0; \quad u(x, 0) = b_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = b_1(x), \quad x > 0 \quad (4)$$

и

$$u(0, z) = c_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, z) = c_1(z), \quad z < 0; \quad u(x, 0) = b_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = b_1(x), \quad x > 0 \quad (5)$$

соответственно. Получим условия, связывающие граничные функции в задачах Коши для квадрантов (эти условия представляют собой самостоятельный интерес), а затем исключим из них функции  $b_j(x)$ .

Условимся использовать следующие обозначения. При преобразовании Фурье переменные  $x, z$  переходят в переменные  $\xi, \zeta$  соответственно; для оригиналов используются строчные буквы, а для изображений (образов Фурье) — прописные (напр., функции  $f(x)$  соответствует ее образ Фурье  $F(\xi)$ ). Множитель  $1/\sqrt{2\pi}$  перед интегралом Фурье присутствует.

Функции  $a_j(z), c_j(z), b_j(x)$  дополним нулем до односторонних (равных нулю на полуоси) функций, при этом  $u_j(z) = a_j(z) + c_j(z)$ . По теореме Винера–Пэли образы Фурье односторонних функций являются предельными значениями функций, аналитических в верхней или нижней полуплоскости. Это свойство образов Фурье существенно в дальнейшем, но для упрощения формул вместо  $A_j^+(\zeta), B_j^+(\xi), C_j^-(\zeta)$  будем писать соответственно  $A_j(\zeta), B_j(\xi), C_j(\zeta)$ .

Пусть  $k_m, m = 0, 1, 2$ , — вещественные числа. Обозначим через

$$\gamma_m(\xi) = \{ \xi < -k_m : i\sqrt{\xi^2 - k_m^2}; \quad -k_m < \xi < k_m : \sqrt{k_m^2 - \xi^2}; \quad \xi > k_m : -i\sqrt{\xi^2 - k_m^2} \}$$

предельное значение из верхней полуплоскости на вещественной оси однозначной ветви аналитической функции  $\gamma_m(\xi) = \sqrt{k_m^2 - \xi^2}$ , выбранной в разрезанной по отрезку  $[-k_m, k_m]$  комплексной плоскости  $\xi$  так, что на верхнем берегу разреза ее значения положительны (достаточно считать, что  $\gamma_m(0) = k_m$ ).

Квадранты комплексных плоскостей переменных  $\xi$  и  $\zeta$  (точка сверху показывает, что вещественная переменная продолжена в комплексную область) будем обозначать римскими цифрами I, II, III и IV. Полуоси вещественной и мнимой осей комплексной плоскости будем обозначать  $R^-$ ,  $R^+$ ,  $I^-$ ,  $I^+$ .

В задаче Коши для полуплоскости достаточно предполагать, что функция  $u(x, z)$  принадлежит  $L_{1,loc}$  и корректно определены ее следы  $u_0(z), u_1(z) \in L_{1,loc}$  на прямой  $x = 0$ . Но чтобы использовать технику преобразования Фурье, будем считать, что искомое решение задачи Коши — функция медленного роста на бесконечности, и, более того, будем рассматривать  $u(x, z)$ ,  $u_0(z)$ ,  $u_1(z)$  как распределения медленного роста на бесконечности. При гладких граничных функциях построенные ниже решения совпадут с классическими.

Необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять граничные функции в переопределенной задаче Коши для уравнения Гельмгольца в однородной полуплоскости, были получены ранее в [1], [2]. В данном случае при  $k_1 = k_2 = k_0$  эти условия могут быть сформулированы в следующем виде.

**Теорема 1.** *Решение  $u(x, z)$  уравнения (1) при  $k_1 = k_2 = k_0$  удовлетворяет граничным условиям (2) тогда и только тогда, когда образы Фурье граничных распределений удовлетворяют условиям*

$$U_1(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)U_0(\zeta) = 0, \quad \zeta < -k_0; \quad U_1(\zeta) + i\gamma_0(\zeta)U_0(\zeta) = 0, \quad \zeta > k_0. \quad (6)$$

При этом

$$(k^2 - \xi^2 - \zeta^2)U(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[U_1(\zeta) - i\xi U_0(\zeta)]. \quad (7)$$

Если из уравнения (7) найти распределение  $U(\xi, \zeta)$  и по нему восстановить оригинал  $u(x, z)$ , то обратное преобразование Фурье даст решение задачи Коши в виде суммы элементарных гармоник (плоских волн). Было установлено, что условия на бесконечности (условия излучения) естественным образом дополняют условия (6).

Будем говорить, что решение задачи (1), (2) является уходящим на бесконечность или является приходящим с бесконечности решением, если в его разложении по плоским волнам нет приходящих с бесконечности или, соответственно, нет уходящих на бесконечность гармоник. Для уходящих на бесконечность решений условия (6) нужно дополнить условием

$$U_1(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)U_0(\zeta) = 0, \quad -k_0 < \zeta < k_0,$$

а для приходящих с бесконечности решений в этой формуле следует взять другой знак.

Для левой полуплоскости  $x < 0$  легко получить аналогичный результат.

**Следствие 1.** *Необходимые и достаточные условия на граничные распределения для уходящих на бесконечность решений задачи Коши в полуплоскости  $x > 0$  (или для приходящих с бесконечности решений в полуплоскости  $x < 0$ ) имеют вид*

$$U_1(\zeta) - \operatorname{sgn}(\zeta + k_0)i\gamma_0(\zeta)U_0(\zeta) = 0, \quad -\infty < \zeta < +\infty, \quad (8)$$

а в двух противоположных случаях —

$$U_1(\zeta) + \operatorname{sgn}(\zeta - k_0)i\gamma_0(\zeta)U_0(\zeta) = 0, \quad -\infty < \zeta < +\infty. \quad (9)$$

## 2. Задачи Коши в квадрантах. Условия на граничные функции

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца в квадранте  $Q_1$ . Будем искать ее решения в классе распределений медленного роста на бесконечности.

**Теорема 2.** *Распределение  $u(x, z)$  является решением задачи Коши (1), (4) тогда и только тогда, когда граничные распределения удовлетворяют условиям*

$$A_1(-\gamma_1(\dot{\xi})) - i\dot{\xi}A_0(-\gamma_1(\dot{\xi})) + B_1(\dot{\xi}) + i\gamma_1(\dot{\xi})B_0(\dot{\xi}) = 0, \quad \dot{\xi} \in I, \quad (10)$$

$$A_1(\gamma_1(\dot{\xi})) - i\dot{\xi}A_0(\gamma_1(\dot{\xi})) + B_1(\dot{\xi}) - i\gamma_1(\dot{\xi})B_0(\dot{\xi}) = 0, \quad \dot{\xi} \in II. \quad (11)$$

При этом образ Фурье  $U(\xi, \zeta)$  удовлетворяет уравнению

$$(k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2)U(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[A_1(\zeta) - i\xi A_0(\zeta) + B_1(\xi) - i\zeta B_0(\xi)]. \quad (12)$$

**Доказательство.** Пусть  $u(x, z)$  — решение задачи Коши. Продолжим это распределение нулем на всю плоскость. Перейдем к образам Фурье по обоим переменным. Получим, что образ Фурье искомого решения удовлетворяет уравнению (12). Так как распределение  $U(\xi, \zeta)$  аналитически продолжимо по каждому аргументу с вещественной оси в верхнюю комплексную полуплоскость, т. е. с остова границ биполуплоскостей в биполуплоскость  $\text{Im } \dot{\xi} > 0, \text{Im } \dot{\zeta} > 0$ , то уравнение (12) также можно продолжить в эту биполуплоскость. Поэтому если  $k_1^2 - \dot{\xi}^2 - \dot{\zeta}^2 = 0$  при каких-либо  $\dot{\xi}, \dot{\zeta}$  из биполуплоскости  $\text{Im } \dot{\xi} > 0, \text{Im } \dot{\zeta} > 0$ , то и правая часть уравнения

$$(k_1^2 - \dot{\xi}^2 - \dot{\zeta}^2)U(\dot{\xi}, \dot{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[A_1(\dot{\zeta}) - i\dot{\xi}A_0(\dot{\zeta}) + B_1(\dot{\xi}) - i\dot{\zeta}B_0(\dot{\xi})] \quad (13)$$

обращается в нуль при таких  $\dot{\xi}$  и  $\dot{\zeta}$ .

Рассмотрим все возможные пары значений  $\dot{\xi}, \dot{\zeta}$ . Если  $\dot{\xi} \in I$ , то  $\gamma_1(\dot{\xi}) \in IV$  и  $\dot{\zeta} = -\gamma_1(\dot{\xi}) \in II$ . Если  $\dot{\xi} \in II$ , то  $\dot{\zeta} = \gamma_1(\dot{\xi}) \in I$ . Если же  $\dot{\xi}$  принадлежит положительной мнимой полуоси, т. е.  $\dot{\xi} = i\eta, \eta \in (0, +\infty)$ , то  $\gamma_1(\dot{\xi})$  принадлежит вещественной оси, но не принадлежит квадрантам I и II.

Предположим теперь, что выполнены равенства (10), (11). Тогда из уравнения (12) можно найти методом выхода в комплексную плоскость распределение  $U(\xi, \zeta)$ , причем такое, что ему соответствует распределение  $u(x, z)$  с носителем в первом квадранте, — решение задачи Коши.  $\square$

Если в (10) обозначить  $\dot{\zeta} = -\gamma_1(\dot{\xi})$  (при этом  $\dot{\xi} = \gamma_1(\dot{\zeta})$ ), то получим

$$A_1(\dot{\zeta}) - i\gamma_1(\dot{\zeta})A_0(\dot{\zeta}) + B_1(\gamma_1(\dot{\zeta})) - i\dot{\zeta}B_0(\gamma_1(\dot{\zeta})) = 0, \quad \dot{\zeta} \in II. \quad (14)$$

Если в (11) обозначить  $\dot{\zeta} = \gamma_1(\dot{\xi})$ , то

$$A_1(\dot{\zeta}) + i\gamma_1(\dot{\zeta})A_0(\dot{\zeta}) + B_1(-\gamma_1(\dot{\zeta})) - i\dot{\zeta}B_0(-\gamma_1(\dot{\zeta})) = 0, \quad \dot{\zeta} \in I. \quad (15)$$

Эти два равенства равносильны равенствам (10), (11).

Для задачи Коши для уравнения Гельмгольца в квадранте  $Q_2$  имеет место аналогичное утверждение.

**Теорема 3.** *Распределение  $u(x, z)$  является решением задачи Коши (1), (5) тогда и только тогда, когда граничные функции удовлетворяют условиям*

$$C_1(\gamma_2(\dot{\xi})) - i\dot{\xi}C_0(\gamma_2(\dot{\xi})) - B_1(\dot{\xi}) + i\gamma_2(\dot{\xi})B_0(\dot{\xi}) = 0, \quad \dot{\xi} \in I, \quad (16)$$

$$C_1(-\gamma_2(\dot{\xi})) - i\dot{\xi}C_0(-\gamma_2(\dot{\xi})) - B_1(\dot{\xi}) - i\gamma_2(\dot{\xi})B_0(\dot{\xi}) = 0, \quad \dot{\xi} \in II. \quad (17)$$

При этом образ Фурье  $U(\xi, \zeta)$  удовлетворяет уравнению

$$(k^2 - \xi^2 - \zeta^2)U(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[C_1(\zeta) - i\xi C_0(\zeta) - B_1(\xi) + i\zeta B_0(\xi)].$$

**Доказательство** проводится точно так же, как в случае первого квадранта. Отличие в том, что распределение  $U(\xi, \zeta)$  аналитически продолжимо по аргументу  $\xi$  с вещественной оси в верхнюю комплексную полуплоскость, а по  $\zeta$  — в нижнюю комплексную полуплоскость.  $\square$

Равенствам (16), (17) равносильны два других равенства:

$$\begin{aligned} C_1(\dot{\zeta}) + i\gamma_2(\dot{\zeta})C_0(\dot{\zeta}) - B_1(-\gamma_2(\dot{\zeta})) + i\dot{\zeta}B_0(-\gamma_2(\dot{\zeta})) &= 0, & \dot{\zeta} \in IV, \\ C_1(\dot{\zeta}) - i\gamma_2(\dot{\zeta})C_0(\dot{\zeta}) - B_1(\gamma_2(\dot{\zeta})) + i\dot{\zeta}B_0(\gamma_2(\dot{\zeta})) &= 0, & \dot{\zeta} \in III. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** В решении задачи Коши для уравнения Гельмгольца в квадранте  $Q_1$  отсутствуют приходящие с бесконечности гармоники тогда и только тогда, когда

$$A_1(-\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(-\gamma_1(\xi)) + B_1(\xi) + i\gamma_1(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-k_1, 0). \quad (18)$$

**Схема доказательства.** Рассмотрим уравнение (13). Разложим его решение на простые дроби вида

$$\frac{1}{\dot{\xi} \pm \gamma_1(\dot{\zeta})}, \quad \frac{1}{\dot{\zeta} \pm \gamma_1(\dot{\xi})}$$

и перейдем в полученном равенстве на остов границ биполуплоскостей. Выполним обратное преобразование Фурье по двум переменным распределения  $U(\xi, \zeta)$ . Выделив в представлении решения  $u(x, z)$  задачи Коши интегралы, содержащие затухающие и распространяющие гармоники, придем к условию (18).  $\square$

Точно так же можно получить

**Следствие 3.** В решении задачи Коши для уравнения Гельмгольца в квадранте  $Q_2$  отсутствуют приходящие с бесконечности гармоники тогда и только тогда, когда

$$A_1(\gamma_2(\xi)) - i\xi A_0(\gamma_2(\xi)) - B_1(\xi) + i\gamma_2(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-k_2, 0). \quad (19)$$

Равенства (10), (11) и другие подобные им равенства можно распространить на границы соответствующих квадрантов. Тогда условия на граничные распределения могут быть записаны в виде равенств на полуосях  $R^-, R^+, I^-, I^+$ . Отметим, что решение задачи Коши в квадранте  $Q_1$ , например, существует, если продолженные на полуоси равенства (10), (11) выполняются хотя бы на сколь угодно малых участках границ квадрантов II и I. Но условия излучения (18), (19), если нужно получить уходящие на бесконечность решения задач Коши, должны выполняться на всех соответствующих интервалах.

### 3. Задача Коши для полуплоскости. Исключение вспомогательных распределений

Можно указать два основных приема, с помощью которых из условий на граничные распределения исключаются распределения  $b_j(x)$ .

Выразим распределения  $B_j(\xi)$  на вещественной оси через распределения  $A_j(\dot{\zeta})$ . Пусть в равенствах (10), (11) и (16), (17) переменная  $\dot{\xi} \rightarrow \xi$ , где  $\xi \in (-\infty, 0)$  или  $\xi \in (0, +\infty)$ .

Из (10), (11) следует

$$A_1(-\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(-\gamma_1(\xi)) + B_1(\xi) + i\gamma_1(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \quad (20)$$

$$A_1(\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(\gamma_1(\xi)) + B_1(\xi) - i\gamma_1(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, 0). \quad (21)$$

В (21) при  $\xi \in (-\infty, -k_1)$  заменим  $\xi$  на  $-\xi$ . Так как при этом  $\gamma_1(-\xi) = -\gamma_1(\xi)$ , то

$$A_1(-\gamma_1(\xi)) + i\xi A_0(-\gamma_1(\xi)) + B_1(-\xi) + i\gamma_1(\xi)B_0(-\xi) = 0, \quad \xi \in (k_1, +\infty).$$

Объединим это равенство с условием излучения (18), в котором  $\xi$  заменим на  $-\xi$ . Тогда

$$A_1(-\gamma_1(\xi)) + i\xi A_0(-\gamma_1(\xi)) + B_1(-\xi) + i\gamma_1(\xi)B_0(-\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty). \quad (22)$$

Складывая и вычитая (20) и (22), получим

$$2A_1(-\gamma_1(\xi)) + B_1^C(\xi) + i\gamma_1(\xi)B_0^C(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \quad (23)$$

$$-2i\xi A_0(-\gamma_1(\xi)) + iB_1^S(\xi) + i\gamma_1(\xi)iB_0^S(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (24)$$

здесь  $B_j^c(\xi)$ ,  $B_j^s(\xi)$  — cos- и sin-образы Фурье распределений  $b_j(x)$ .

**Теорема 4.** *Задача Дирихле и задача Неймана для уравнения Гельмгольца в квадранте имеют единственное решение, уходящее на бесконечность или приходящее с бесконечности.*

**Доказательство.** Рассмотрим задачу Дирихле в классе уходящих на бесконечность решений. Пусть на границе квадранта  $Q_1$  заданы граничные условия

$$u(0, z) = a_0(z), \quad z > 0, \quad u(x, 0) = b_0(x), \quad x > 0.$$

Будем искать решение задачи Дирихле в форме решения задачи Коши. Из (24) sin-образ Фурье распределения  $b_1(x)$  однозначно определяется через образы Фурье распределений  $b_0(x)$  и  $a_0(z)$ .

Распределение  $a_1(z)$  также можно выразить через  $b_0(x)$  и  $a_0(z)$ . Действительно, легко получить равенство

$$-2i\zeta B_0(-\gamma_1(\zeta)) + iA_1^S(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)iA_0^S(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (0, +\infty)$$

(достаточно поменять в (24) обозначения осей координат и граничных распределений на разных сторонах квадранта). Тогда единственное решение задачи можно найти по его образу Фурье (12).

В случае задачи Неймана нужно использовать равенство (23) и аналогичное ему.  $\square$

Такие же рассуждения проведем для равенств (16), (17). При  $\dot{\xi} \rightarrow \xi$  получим

$$C_1(\gamma_2(\xi)) - i\xi C_0(\gamma_2(\xi)) - B_1(\xi) + i\gamma_2(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \quad (25)$$

$$C_1(-\gamma_2(\xi)) - i\xi C_0(-\gamma_2(\xi)) - B_1(\xi) - i\gamma_2(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, 0). \quad (26)$$

В (26) при  $\xi \in (-\infty, -k_2)$ , а также в условии излучения (19) заменим  $\xi$  на  $-\xi$ . Тогда

$$C_1(\gamma_2(\xi)) + i\xi C_0(\gamma_2(\xi)) - B_1(-\xi) + i\gamma_2(\xi)B_0(-\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty). \quad (27)$$

Складывая и вычитая (25) и (27), получим

$$2C_1(\gamma_2(\xi)) - B_1^C(\xi) + i\gamma_2(\xi)B_0^C(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \quad (28)$$

$$-2i\xi C_0(\gamma_2(\xi)) - iB_1^S(\xi) + i\gamma_2(\xi)iB_0^S(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty). \quad (29)$$

Из систем линейных уравнений (23), (28) и (24), (29) следует, что при  $\xi \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
B_0^C(\xi) &= 2i \frac{A_1(-\gamma_1(\xi)) + C_1(\gamma_2(\xi))}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)}, \\
B_1^C(\xi) &= -2 \frac{\gamma_2(\xi)A_1(-\gamma_1(\xi)) - \gamma_1(\xi)C_1(\gamma_2(\xi))}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)}, \\
B_0^S(\xi) &= -2i\xi \frac{A_0(-\gamma_1(\xi)) + C_0(\gamma_2(\xi))}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)}, \\
B_1^S(\xi) &= 2\xi \frac{\gamma_2(\xi)A_0(-\gamma_1(\xi)) - \gamma_1(\xi)C_0(\gamma_2(\xi))}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Тогда по граничным распределениям  $a_j(z)$ ,  $c_j(z)$  однозначно определяются вспомогательные распределения  $b_j(x)$ .

Наконец, пусть в формулах (14), (15)  $\dot{\zeta} \rightarrow \zeta$ ,  $\zeta \in (-\infty, 0)$  или  $\zeta \in (0, +\infty)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
A_1(\zeta) - i\gamma_1(\zeta)A_0(\zeta) + B_1(\gamma_1(\zeta)) - i\zeta B_0(\gamma_1(\zeta)) &= 0, \quad \zeta \in (-\infty, 0), \\
A_1(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)A_0(\zeta) + B_1(-\gamma_1(\zeta)) - i\zeta B_0(-\gamma_1(\zeta)) &= 0, \quad \zeta \in (0, +\infty)
\end{aligned}$$

или

$$A_1(\zeta) + \operatorname{sgn} \zeta i\gamma_1(\zeta)A_0(\zeta) + B_1(-\operatorname{sgn} \zeta \gamma_1(\zeta)) - i\zeta B_0(-\operatorname{sgn} \zeta \gamma_1(\zeta)) = 0, \quad \zeta \in (-\infty, +\infty). \tag{31}$$

В случае квадранта  $Q_2$  нетрудно получить аналогичные равенства

$$\begin{aligned}
C_1(\zeta) - i\gamma_2(\zeta)C_0(\zeta) - B_1(\gamma_2(\zeta)) + i\zeta B_0(\gamma_2(\zeta)) &= 0, \quad \zeta \in (-\infty, 0), \\
C_1(\zeta) + i\gamma_2(\zeta)C_0(\zeta) - B_1(-\gamma_2(\zeta)) + i\zeta B_0(-\gamma_2(\zeta)) &= 0, \quad \zeta \in (0, +\infty),
\end{aligned}$$

или

$$C_1(\zeta) + \operatorname{sgn} \zeta i\gamma_2(\zeta)C_0(\zeta) - B_1(-\operatorname{sgn} \zeta \gamma_2(\zeta)) + i\zeta B_0(-\operatorname{sgn} \zeta \gamma_2(\zeta)) = 0, \quad \zeta \in (-\infty, +\infty). \tag{32}$$

**Теорема 5.** *Задача Коши для уравнения Гельмгольца (1) в полуплоскости, составленной из двух квадрантов, имеет единственное решение в классе уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда образы Фурье граничных функций удовлетворяют условиям (31), (32) и (30).*

Можно с помощью равенств (30) полностью исключить распределения  $B_j(\xi)$  из условий (31) и (32), но такой путь приводит к сложным выражениям. Равенства (30) удобно использовать только при обосновании разрешимости граничных задач для уравнения Гельмгольца в квадрантах.

**Теорема 6.** *Задача Дирихле и задача Неймана для уравнения Гельмгольца (1) в полуплоскости, составленной из двух квадрантов, имеют единственные решения в классе уходящих на бесконечность решений.*

Действительно, если заданы, например, граничные распределения  $a_0(z)$ ,  $c_0(z)$ , то из второй пары равенств (30) однозначно определяются вспомогательные распределения  $b_j(x)$ . Тогда из условий (31), (32) можно найти функции  $a_1(z)$ ,  $c_1(z)$ .  $\square$

#### 4. Исключение вспомогательных функций. Второй способ

В равенствах (10), (11) и (16), (17) перейдем на положительную мнимую полуось  $\Gamma^+$ . Если  $\xi \rightarrow i\eta \in \Gamma^+$ , то при  $\eta \in (0, +\infty)$

$$A_1(-\delta_1(\eta)) + \eta A_0(-\delta_1(\eta)) + B_1(i\eta) + i\delta_1(\eta)B_0(i\eta) = 0, \quad (33)$$

$$A_1(\delta_1(\eta)) + \eta A_0(\delta_1(\eta)) + B_1(i\eta) - i\delta_1(\eta)B_0(i\eta) = 0, \quad (34)$$

$$C_1^-(\delta_2(\eta)) + \eta C_0(\delta_2(\eta)) - B_1(i\eta) + i\delta_2(\eta)B_0(i\eta) = 0, \quad (35)$$

$$C_1(-\delta_2(\eta)) + \eta C_0(-\delta_2(\eta)) - B_1(i\eta) - i\delta_2(\eta)B_0(i\eta) = 0, \quad (36)$$

где  $\delta_j(\eta) = \sqrt{k_j^2 + \eta^2}$ ,  $j = 1, 2$  (значения функций  $\delta_j(\eta)$  вещественные, причем  $\delta_j(\eta) > k_j$ ).

Исключим распределения  $B_j(i\eta)$  следующим образом: найдем выражения  $B_j(i\eta)$  из (34), (36) и подставим их в (33) и (35). Получим пару равенств

$$\begin{aligned} A_1(-\delta_1(\eta)) + \eta A_0(-\delta_1(\eta)) + \frac{\delta_1(\eta) - \delta_2(\eta)}{\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)} [A_1(\delta_1(\eta)) + \eta A_0(\delta_1(\eta))] + \\ + \frac{2\delta_1(\eta)}{\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)} [C_1(-\delta_2(\eta)) + \eta C_0(-\delta_2(\eta))] = 0, \quad \eta \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} C_1(\delta_2(\eta)) + \eta C_0(\delta_2(\eta)) - \frac{\delta_1(\eta) - \delta_2(\eta)}{\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)} [C_1(-\delta_2(\eta)) + \eta C_0(-\delta_2(\eta))] + \\ + \frac{2\delta_2(\eta)}{\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)} [A_1(\delta_1(\eta)) + \eta A_0(\delta_1(\eta))] = 0, \quad \eta \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (38)$$

В равенствах (11) и (17) перейдем на  $R^-$ . Если  $\xi \rightarrow \xi \in (-\infty, 0)$ , то

$$A_1(\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(\gamma_1(\xi)) + B_1(\xi) - i\gamma_1(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, 0),$$

$$C_1(-\gamma_2(\xi)) - i\xi C_0(-\gamma_2(\xi)) - B_1(\xi) - i\gamma_2(\xi)B_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, 0).$$

Отсюда найдем  $B_j(\xi)$  и подставим их в условия излучения (18) и (19). Получим

$$\begin{aligned} A_1(-\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(-\gamma_1(\xi)) + \frac{\gamma_1(\xi) - \gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)} [A_1(\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(\gamma_1(\xi))] + \\ + \frac{2\gamma_1(\xi)}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)} [C_1(-\gamma_2(\xi)) - i\xi C_0(-\gamma_2(\xi))] = 0, \quad \xi \in (-k_1, 0) \end{aligned} \quad (39)$$

(здесь значения  $\gamma_1(\xi)$  и  $\gamma_2(\xi)$  вещественные),

$$\begin{aligned} C_1(\gamma_2(\xi)) - i\xi C_0(\gamma_2(\xi)) - \frac{\gamma_1(\xi) - \gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)} [C_1(-\gamma_2(\xi)) - i\xi C_0(-\gamma_2(\xi))] + \\ + \frac{2\gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)} [A_1(\gamma_1(\xi)) - i\xi A_0(\gamma_1(\xi))] = 0, \quad \xi \in (-k_2, 0) \end{aligned} \quad (40)$$

(здесь значения  $\gamma_2(\xi)$  вещественные, а  $\gamma_1(\xi)$  вещественные при  $\xi \in (-k_1, 0)$  и мнимые при  $\xi \in (-k_2, -k_1)$ ).

**Теорема 7.** *Распределение  $u(x, z)$  является уходящим на бесконечность решением задачи Коши (1)–(3) тогда и только тогда, когда его следы на прямой  $x = 0$  удовлетворяют условиям (37)–(40).*

Легко проверить, что при  $k_1 = k_2 = k_0$  условия (37)–(40) совпадают с условием (8). Объединим равенства (37) и (39), (38) и (40) следующим образом. Умножим обе части (37) на  $\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)$  и, используя формулы

$$A_j(\zeta) = \frac{1}{2}A_j^c(\zeta) + \frac{i}{2}A_j^s(\zeta), \quad A_j(-\zeta) = \frac{1}{2}A_j^c(\zeta) - \frac{i}{2}A_j^s(\zeta),$$



перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \delta_1(\eta)[A_1^c(\delta_1(\eta)) + \eta A_0^c(\delta_1(\eta))] - i\delta_2(\eta)[A_1^s(\delta_1(\eta)) + \eta A_0^s(\delta_1(\eta))] + \\ + 2\delta_1(\eta)[C_1(-\delta_2(\eta)) + \eta C_0(-\delta_2(\eta))] = 0, \quad \eta \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Введем новую переменную  $\zeta = \delta_1(\eta)$ , при этом  $\eta = i\gamma_1(\zeta)$  и  $\delta_2(\eta) = \omega_{21}(\zeta) = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + \zeta^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_1^c(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)A_0^c(\zeta) - i\frac{\omega_{21}(\zeta)}{\zeta}[A_1^s(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)A_0^s(\zeta)] + \\ + 2[C_1(-\omega_{21}(\zeta)) + i\gamma_1(\zeta)C_0(-\omega_{21}(\zeta))] = 0 \quad (41) \end{aligned}$$

при  $\zeta \in (k_1, +\infty)$ . Из (38) с помощью замены переменной  $\zeta = \delta_2(\eta)$ , при этом  $\eta = i\gamma_2(\zeta)$  и  $\delta_1(\eta) = \omega_{12}(\zeta) = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 + \zeta^2}$ , получим

$$\begin{aligned} C_1^s(\zeta) + i\gamma_2(\zeta)C_0^s(\zeta) - i\frac{\zeta}{\omega_{12}(\zeta)}[C_1^c(\zeta) + i\gamma_2(\zeta)C_0^c(\zeta)] - \\ - 2i\frac{\zeta}{\omega_{12}(\zeta)}[A_1(\omega_{12}(\zeta)) + i\gamma_2(\zeta)A_0(\omega_{12}(\zeta))] = 0 \quad (42) \end{aligned}$$

при  $\zeta \in (k_2, +\infty)$ .

Выполним аналогичные преобразования для равенств (39) и (40). Используем следующие замены переменных: в первом случае  $\zeta = \gamma_1(\xi)$ , при этом  $\xi = -\gamma_1(\zeta)$  и  $\gamma_2(\xi) = \omega_{21}(\zeta) = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + \zeta^2}$ , а во втором случае  $\zeta = \gamma_2(\xi)$ , при этом  $\xi = -\gamma_2(\zeta)$  и  $\gamma_1(\xi) = \omega_{12}(\zeta) = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 + \zeta^2}$ . Тогда получим точно такие же равенства, как (41) и (42), но при  $\zeta \in (0, k_1)$  и при  $\zeta \in (0, k_2)$  соответственно. Таким образом, оба эти равенства выполняются на всей полуоси  $(0, +\infty)$ .

Преобразуем образы Фурье во вторых строках равенств (41), (42)

$$C_j(-\omega_{21}(\zeta)) = \frac{1}{2}C_j^c(\omega_{21}(\zeta)) - \frac{i}{2}C_j^s(\omega_{21}(\zeta)), \quad \zeta \in (0, +\infty),$$

и

$$A_j(\omega_{12}(\zeta)) = \frac{1}{2}A_j^c(\omega_{12}(\zeta)) + \frac{i}{2}A_j^s(\omega_{12}(\zeta)), \quad \zeta \in (\tilde{k}, +\infty)$$

(в этом случае  $\omega_{12}(\zeta)$  — вещественное число). Но если  $\zeta \in (0, \tilde{k})$ , то значение  $\omega_{12}(\zeta)$  мнимое и

$$A_j(\omega_{12}(\zeta)) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega_{12}(\zeta)A_j^c(\tau)}{\tau^2 - \omega_{12}^2(\zeta)} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau A_j^s(\tau)}{\tau^2 - \omega_{12}^2(\zeta)} d\tau.$$

Оставим в качестве искоемых cos- и sin-образы Фурье  $A_1^c(\zeta)$ ,  $A_0^c(\zeta)$ ,  $C_1^s(\zeta)$  и  $C_0^s(\zeta)$ , а все остальные выразим через них с помощью формул

$$A_j^s(\zeta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta A_j^c(\tau)}{\tau^2 - \zeta^2} d\tau, \quad C_j^c(\zeta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau C_j^s(\tau)}{\tau^2 - \zeta^2} d\tau. \quad (43)$$

Тогда получим

**Следствие 4.** Распределение  $u(x, z)$  является уходящим на бесконечность решением задачи Коши (1)–(3) тогда и только тогда, когда его следы на границе области удовлетворяют условиям

$$A_1^c(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)A_0^c(\zeta) - i[C_1^s(\omega_{21}(\zeta)) + i\gamma_1(\zeta)C_0^s(\omega_{21}(\zeta))] +$$

$$+ i \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega_{21}(\zeta) [A_1^c(\tau) + i\gamma_1(\zeta) A_0^c(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2} d\tau - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau [C_1^s(\tau) + i\gamma_1(\zeta) C_0^s(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2 + k_1^2 - k_2^2} d\tau = 0, \quad (44)$$

$$C_1^s(\zeta) + i\gamma_2(\zeta) C_0^s(\zeta) - i \frac{\zeta}{\omega_{12}(\zeta)} [1 - \chi_{(\tilde{k}, k_2)}(\zeta)] [A_1^c(\omega_{12}(\zeta)) + i\gamma_2(\zeta) A_0^c(\omega_{12}(\zeta))] +$$

$$+ i \frac{\zeta}{\omega_{12}(\zeta)} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau [C_1^s(\tau) + i\gamma_2(\zeta) C_0^s(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2} d\tau - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta [A_1^c(\tau) + i\gamma_2(\zeta) A_0^c(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2 - k_1^2 + k_2^2} d\tau = 0 \quad (45)$$

при  $\zeta \in (0, +\infty)$ . Здесь  $\chi_{(\tilde{k}, k_2)}(\zeta) = \{1, \zeta \in (\tilde{k}, k_2); 0, \zeta \notin (\tilde{k}, k_2)\}$ .

Отметим, что исходные равенства (37)–(40) могли быть предварительно преобразованы к другому виду. Например, вместо (37), (38) можно было бы написать

$$A_1(-\delta_1(\eta)) + \eta A_0(-\delta_1(\eta)) + A_1(\delta_1(\eta)) + \eta A_0(\delta_1(\eta)) +$$

$$+ C_1(\delta_2(\eta)) + \eta C_0(\delta_2(\eta)) + C_1(-\delta_2(\eta)) + \eta C_0(-\delta_2(\eta)) = 0, \quad (46)$$

$$\delta_2(\eta) [A_1(-\delta_1(\eta)) + \eta A_0(-\delta_1(\eta)) - A_1(\delta_1(\eta)) - \eta A_0(\delta_1(\eta))] -$$

$$- \delta_1(\eta) [C_1(\delta_2(\eta)) + \eta C_0(\delta_2(\eta)) - C_1(-\delta_2(\eta)) - \eta C_0(-\delta_2(\eta))] = 0. \quad (47)$$

Первое равенство, например, легко получить как сумму равенств (33), (34). Линейные комбинации условий (39) и (40) рассматривать сложнее, поскольку они заданы на разных интервалах.

Если в (46), (47) перейти к  $\cos$ - и  $\sin$ -образам Фурье, то получим (после соответствующих замен переменных)

$$A_1^c(\zeta) + i\gamma_1(\zeta) A_0^c(\zeta) + C_1^c(\omega_{21}(\zeta)) + i\gamma_1(\zeta) C_0^c(\omega_{12}(\zeta)) = 0, \quad \zeta \in (k_1, +\infty),$$

$$\omega_{12}(\zeta) [C_1^s(\zeta) + i\gamma_2(\zeta) C_0^s(\zeta)] + \zeta [A_1^s(\omega_{12}(\zeta)) + i\gamma_2(\zeta) A_0^s(\omega_{21}(\zeta))] = 0, \quad \zeta \in (k_2, +\infty),$$

или

$$A_1^c(\zeta) + i\gamma_1(\zeta) A_0^c(\zeta) - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau [C_1^s(\tau) + i\gamma_1(\zeta) C_0^s(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2 - k_1^2 + k_2^2} d\tau, \quad \zeta \in (k_1, +\infty), \quad (48)$$

$$\omega_{12}(\zeta) [C_1^s(\zeta) + i\gamma_2(\zeta) C_0^s(\zeta)] - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta [A_1^c(\tau) + i\gamma_2(\zeta) A_0^c(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2 + k_1^2 - k_2^2} d\tau, \quad \zeta \in (k_2, +\infty). \quad (49)$$

Равенствами (48), (49) можно заменить часть равенств (44), (45).

## 5. Задача дифракции электромагнитной волны на стыке двух квадрантов

Пусть плоскость  $xz$  разделена на три части: левую полуплоскость  $H$  ( $x < 0$ ), первый квадрант  $Q_1$  и четвертый квадрант  $Q_2$  (см. рис. 1). Пусть каждая область заполнена диэлектриком, свойства сред характеризуют вещественные волновые числа  $k_0, k_1$  и  $k_2$ . Пусть на границу раздела сред  $x = 0$  из полуплоскости  $H$  набежит ТЕ-поляризованная электромагнитная волна. Нужно определить рассеянное поле в каждой из областей  $H, Q_1$  и  $Q_2$ . Потенциальные функции падающего и искомого поля должны быть решениями уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(x, z)u(x, z) = 0$$

(с постоянным в каждой из рассматриваемых областей коэффициентом), удовлетворяющими условиям излучения. На границе раздела сред должны выполняться условия сопряжения полей.

Выберем в качестве искомого функции предельные значения на оси  $z$  справа (из областей  $Q_1$  и  $Q_2$ ) потенциальной функции искомого поля

$$u_0(z) = u(0 + 0, z), \quad u_1(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(0 + 0, z), \quad -\infty < z < +\infty.$$

Пусть  $u^0(x, z)$  — потенциальная функция набегающей волны. Выберем зависимость компонент поля от времени в виде  $\exp(i\omega t)$ . В силу равенств (8), (9) образы Фурье предельных значений потенциальных функций на оси  $z$  слева удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0-0, \zeta) - \operatorname{sgn}(\zeta + k_0) i \gamma_0(\zeta) u(0-0, \zeta) = 0, \quad \zeta \in (-\infty, +\infty)$$

и

$$\frac{\partial u^0}{\partial x}(0-0, \zeta) + \operatorname{sgn}(\zeta - k_0) i \gamma_0(\zeta) u^0(0-0, \zeta) = 0, \quad \zeta \in (-\infty, +\infty)$$

соответственно. Тогда из условий сопряжения полей на прямой  $x = 0$

$$u^0(0-0, \zeta) + u(0-0, \zeta) = u(0+0, \zeta), \quad \frac{\partial u^0}{\partial x}(0-0, \zeta) + \frac{\partial u}{\partial x}(0-0, \zeta) = \frac{\partial u}{\partial x}(0+0, \zeta)$$

следует

$$U_1(\zeta) - \operatorname{sgn}(\zeta + k_0) i \gamma_0(\zeta) U_0(\zeta) = -2i \chi_{(-k_0, k_0)}(\zeta) U_0^0(\zeta), \quad \zeta \in (-\infty, +\infty). \quad (50)$$

Здесь  $\chi_{(-k_0, k_0)}(\zeta) = \{1, \zeta \in (-k_0, k_0); 0, \zeta \notin (-k_0, k_0)\}$  — характеристическая функция множества  $(-k_0, k_0)$ . С другой стороны, функции  $u_j(z)$  должны быть такими, чтобы была корректно поставлена задача Коши для правой полуплоскости. Следовательно, имеет место

**Теорема 8.** *Задача дифракции ТЕ-волны на стыке квадратов эквивалентна системе уравнений (50), (37)–(40).*

Напомним, что  $A_j(\zeta)$ ,  $C_j(\zeta)$  — образы Фурье односторонних функций, суммы которых равны  $u_j(z)$ . Систему уравнений (50), (37)–(40) можно преобразовать так, чтобы уменьшилось число уравнений и число искомых функций.

Прежде всего, можно выразить  $U_1(\zeta)$  через  $U_0(\zeta)$  на основании равенства (50) и учесть, что

$$A_j(\zeta) = \frac{1}{2} U_j(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_j(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau, \quad C_j(\zeta) = \frac{1}{2} U_j(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_j(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau. \quad (51)$$

Заметим, что в формулах Сохоцкого (51) знаки не такие, как в ([9], § 2) (это связано с тем, что в нашем случае выбран другой знак у односторонних функций  $c_j(z)$ ).

Отметим также, что  $A_j(\zeta)$ ,  $C_j(\zeta)$  — предельные значения на вещественной оси функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Поэтому условия на искомые функции легко интерпретировать как условия задачи линейного сопряжения на вещественной оси (краевой задачи Римана) для пары аналитических функций. Специфика этой задачи в следующем: во-первых, в краевом условии участвуют два сдвига  $\omega_{12}(\zeta)$  и  $\omega_{21}(\zeta)$ ; во-вторых, в общем случае  $A_j(\zeta)$ ,  $C_j(\zeta)$  — предельные значения на вещественной оси аналитических функций  $A_j(\zeta)$ ,  $C_j(\zeta)$  соответственно в смысле сходимости в пространстве распределений медленного роста на бесконечности.

При конструировании алгоритмов численного решения задачи дифракции целесообразно, на наш взгляд, перейти к  $\cos$ - и  $\sin$ -образам Фурье искомых функций. При этом можно в качестве новых искомых функций выбрать  $A_1^c(\zeta)$ ,  $A_0^c(\zeta)$ ,  $C_1^s(\zeta)$ ,  $C_0^s(\zeta)$ .

Обозначим правую часть (50) через  $v(\zeta)$ . Равенство (50) преобразуем в два равенства

$$\begin{aligned} A_1(\zeta) + C_1(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)[A_0(\zeta) + C_0(\zeta)] &= v(\zeta), \quad \zeta \in (0, +\infty), \\ A_1(-\zeta) + C_1(-\zeta) - i\gamma_0(\zeta)[A_0(-\zeta) + C_0(-\zeta)] &= v(-\zeta), \quad \zeta \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Складывая и вычитая, получим

$$\begin{aligned} A_1^c(\zeta) + C_1^c(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)[A_0^c(\zeta) + C_0^c(\zeta)] &= v(\zeta) + v(-\zeta), \quad \zeta \in (0, +\infty), \\ A_1^s(\zeta) + C_1^s(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)[A_0^s(\zeta) + C_0^s(\zeta)] &= -i[v(\zeta) - v(-\zeta)], \quad \zeta \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Наконец, с помощью формул (43) придем к уравнениям

$$A_1^c(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)A_0^c(\zeta) - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau[C_1^s(\tau) - i\gamma_0(\zeta)C_0^s(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2} d\tau = v(\zeta) + v(-\zeta), \quad \zeta \in (0, +\infty), \quad (52)$$

$$C_1^s(\zeta) - i\gamma_0(\zeta)C_0^s(\zeta) - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta[A_1^c(\tau) - i\gamma_0(\zeta)A_0^c(\tau)]}{\tau^2 - \zeta^2} d\tau = -i[v(\zeta) - v(-\zeta)], \quad \zeta \in (0, +\infty). \quad (53)$$

Следовательно, полная система интегральных уравнений задачи дифракции электромагнитной волны на стыке квадрантов состоит из уравнений (52), (53), (44), (45). При численных расчетах удобно использовать метод Галёркина, разлагая искомые функции (распределения) по функциям Эрмита, четным для  $A_j(\zeta)$  и нечетным для  $C_j(\zeta)$ . Пока не выяснено, целесообразно ли при этом использовать равенства (48), (49).

В частном случае при  $k_2 = k_0$  имеем скалярную задачу дифракции электромагнитной волны на квадранте. Задача сопряжения решений уравнения Гельмгольца в четырех квадрантах также может быть исследована с помощью полученных условий разрешимости задачи Коши для полуплоскости, состоящей из двух квадрантов.

### Литература

1. Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. *On solving diffraction problems for the junctions of open waveguides in the classes of distributions* // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. Int. Conf. ММЕТ\*98. – Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998. – V. 2. – P. 801–803.
2. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. *The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications* // Advances in Equations and Inequalities / Ed. J.M. Rassias. – Hardronic Press, 1999. – P. 127–146.
3. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций* // Препринт 2000-1. Казанск. матем. о-во. – 2000. – 50 с.
4. Махер А., Плещинский Н.Б. *Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскостной среде и ее приложения* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 1. – С. 45–56.
5. Meister E., Latz N. *Ein System singulärer Integralgleichungen aus der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Keilen* // Z. angew. Math. und Mech.. – 1964. – Bd. 44. – S. 47–49.
6. Курилко В.И. *Рассеяние электромагнитных волн прямоугольным диэлектрическим клином* // Изв. вузов. Радиофизика. – 1966. – Т. 9. – №5. – С. 980–986.
7. Kraut E.A., Lehman G.W. *Diffraction on electromagnetic waves by a right-angle dielectric wedge* // J. Math. Phys. – 1969. – V. 10. – № 8. – P. 1340–1348.
8. Александрова А.А., Хижняк Н.А. *Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине* // Журн. теор. физ. – 1974. – Т. 44. – Вып. 11. – С. 2241–2249.
9. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки*. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

Казанский государственный  
университет

Поступила  
05.04.2002