Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 86–91 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0023*

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ОПЕРАТОР БЛОЧНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. Доказан эрмитов аналог известного операторного неравенства треугольника для алгебр фон Неймана. В полуконечном случае показано, что оператор блочного проектирования является линейным положительным сжатием на широком классе идеальных пространств измеримых по Сигалу операторов. Получены приложения этих результатов.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, неравенство треугольника, нормальный полуконечный след, идеальное пространство измеримых операторов, оператор блочного проектирования.

УДК: 517.983 : 517.986

Abstract. We prove a Hermitian analog of the well-known operator triangle inequality for von Neumann algebras. In the semifinite case we show that a block projection operator is a linear positive contraction on a wide class of solid spaces of Segal measurable operators. We describe some applications of the obtained results.

Keywords: von Neumann algebra, triangle inequality, normal semifinite trace, solid space of measurable operators, block projection operator.

Введение

В работе доказаны неравенства, уточняющие операторные “неравенства треугольника” в случае эрмитовых операторов и являющиеся их аналогами для йордановых алгебр. Из наших результатов следуют новые доказательства неравенств, известных ранее для слабого спектрального порядка Харди–Литтлвуда. Установлено, что формула (3) определяет линейное положительное сжатие $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ для нормированных идеальных пространств $\mathcal{X} \subset S(\mathcal{M})$, обладающих свойствами (A) и (B). При доказательстве этого факта применена новая комбинаторная лемма 2. Получено усиление одного результата автора (1998) и обобщен результат Ф. Хиай и Х. Косаки (1999) в важном частном случае оператора Y специального вида (см. следствие 5).

1. Одно неравенство для эрмитовых операторов

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, $\mathcal{M}^{+}$ и $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых элементов, положительных

Поступила 19.09.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

элементов и проекторов соответственно. Пусть $|X| = (X^*X)^{1/2}$ для $X \in \mathcal{M}$, $\mathbb{I}$ — единица $\mathcal{M}$ и $P^\perp = \mathbb{I} - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, $Y \in \mathcal{M}^+$ такие, что $-Y \le X \le Y$. Тогда $2|X| \le Y + UYU$ для некоторого унитарного $U \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$.*

Схема доказательства. Если $X = X_+ - X_-$ — разложение Жордана на положительную и отрицательную части элемента $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, то $X_+, X_- \in \mathcal{M}^+$, $P := s_r(X_+) + s_r(X)^\perp \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и $PX_- = P^\perp X_+ = 0$, $P^\perp X_- = X_-$. Здесь $s_r(Z)$ — носитель оператора $Z \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$. Для пары $\{-X, Y\}$ имеем $-Y \le -X \le Y$, поэтому

$$-PYP \le PXP \le PYP, \quad -P^\perp YP^\perp \le -P^\perp XP^\perp \le P^\perp YP^\perp. \tag{1}$$

Поскольку $U = P - P^\perp \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ унитарен и $|X| = UX = XU = PXP - P^\perp XP^\perp$, то, сложив почленно неравенства (1), имеем

$$|X| \le PYP + P^\perp YP^\perp = \frac{Y + UYU}{2}.$$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана. Для любых $A, B \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ найдется такой унитарный $U \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, что

$$|A + B| \le \frac{|A| + |B| + U(|A| + |B|)U}{2}. \tag{2}$$

Схема доказательства. Неравенства $-|A| \le A \le |A|$, $-|B| \le B \le |B|$ дают

$$-|A| - |B| \le A + B \le |A| + |B|.$$

Применяя теорему 1 к операторам

$$X = A + B \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}, \quad Y = |A| + |B| \in \mathcal{M}^+,$$

получим (2). $\square$

Следствие 2. Пусть τ — произвольный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и $X, Y \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$. Тогда $\tau(|X + Y|) \le \tau(|X|) + \tau(|Y|)$. Если $Y \in \mathcal{M}^+$ и $-Y \le X \le Y$, то существует такой $Z \in \mathcal{M}^+$, что $|X| \le Z$ и $\tau(Y) = \tau(Z)$.

Замечание 1. Аналог неравенства (2) верен для любого конечного набора операторов из $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$. Неравенство (2) верно для любых (не обязательно эрмитовых) операторов тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{M}$ коммутативна.

2. Идеальные пространства на полуконечных алгебрах фон Неймана

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и относительно операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [1]. Для семейства $\mathcal{K} \subset S(\mathcal{M})$ обозначим через $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^{\mathrm{sa}}$ его подмножества положительных операторов и эрмитовых операторов соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M})^{\mathrm{sa}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M})^+$, будем обозначать через $\le$; запись $X_i \uparrow X$ означает, что $X_i \le X_j$ при $i \le j$ и $X = \sup_i X_i$. Если $X \in S(\mathcal{M})$, то $|X| = (X^*X)^{1/2} \in S(\mathcal{M})^+$. Пусть $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ — банахово пространство всех τ-интегрируемых операторов [1] из $S(\mathcal{M})$ с нормой $\|X\|_1 = \tau(|X|)$.

Утверждения теоремы 1, следствий 1 и 2 переносятся с аналогичными доказательствами и на $*$-алгебру $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов. В частности, из наших результатов следуют новые доказательства неравенств, известных ранее для слабого спектрального порядка

Харди–Литтлвуда (см. лемму 1 [2] и предложение 2.1 [3]). Теорема 1, следствия 1 и 2 были анонсированы в [4]. Они уточняют операторные "неравенства треугольника" ([5], [6]) в случае эрмитовых операторов и являются их аналогами для йордановых алгебр. Из вышесказанного вытекает

Следствие 3 (ср. с [5], [6])**.** Для каждого конечного набора $\{X_k\}_{k=1}^n$ из $S(\mathcal{M})^{\rm sa}$ существует унитарный оператор $U \in \mathcal{M}^{\rm sa}$ такой, что

$$|X_1+\dots+X_n| \le \frac{|X_1|+\dots+|X_n|+U(|X_1|+\dots+|X_n|)U}{2}.$$

Определение. Нормированное пространство $\mathcal{E}\subset S(\mathcal{M})$ называется *нормированным идеальным пространством* (НИП) на $(\mathcal{M},\tau)$, если

(i) $X\in\mathcal{E}\Rightarrow X^*\in\mathcal{E}$ и $\|X^*\|_{\mathcal{E}}=\|X\|_{\mathcal{E}}$;
(ii) $X\in S(\mathcal{M})$, $Y\in\mathcal{E}$ и $|X|\le|Y|\Rightarrow X\in\mathcal{E}$ и $\|X\|_{\mathcal{E}}\le\|Y\|_{\mathcal{E}}$.

Следствие 4. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ, $\mathcal{E}$ — НИП на $(\mathcal{M},\tau)$ и $A,B,C,X,Y\in S(\mathcal{M})^{\rm sa}$. Если $A,C\in\mathcal{E}$ и $A\le B\le C$, то $B\in\mathcal{E}$ и $\|B\|_{\mathcal{E}}\le\big\|\,|A|+|C|\,\big\|_{\mathcal{E}}$. Если $Y\in\mathcal{E}^+$ и $-Y\le X\le Y$, то $X\in\mathcal{E}$ и $\|X\|_{\mathcal{E}}\le\|Y\|_{\mathcal{E}}$.

Схема доказательства. Имеем $-|A|\le A\le B\le C\le|C|$, поэтому

$$-|A|-|C|\le B\le|A|+|C|.$$

Найдется (ср. с теоремой 1) такой унитарный $U\in\mathcal{M}^{\rm sa}$, что

$$|B|\le\frac{|A|+|C|+U(|A|+|C|)U}{2}.$$

Следовательно,

$$2\|B\|_{\mathcal{E}}\le\big\|\,|A|+|C|+U(|A|+|C|)U\big\|_{\mathcal{E}}\le 2\big\|\,|A|+|C|\,\big\|_{\mathcal{E}}.$$

В [7] с использованием одного нетривиального неравенства из [8] показано, что оператор блочного проектирования

$$\varPhi(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P_kXP_k,\quad \{P_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}^{\rm pr},\quad P_kP_m=0\ \ (k\ne m), \tag{3}$$

является положительным линейным сжатием в $\mathcal{M}$ и в $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Этот факт был применен для описания крайних точек выпуклых вполне симметричных подмножеств в $L_1(\mathcal{M},\tau)+\mathcal{M}$. Из теории интерполяции линейных операторов следует, что (3) задает положительный линейный непрерывный оператор $\varPhi:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ для всех банаховых симметричных подпространств $\mathcal{X}\subset S(\mathcal{M})$, интерполяционных между $L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\mathcal{M}$.

В данной статье доказано, что формула (3) определяет линейное положительное сжатие $\varPhi:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ для широкого класса нормированных подпространств $\mathcal{X}\subset S(\mathcal{M})$. Метод является новым даже для алгебры $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, снабженной каноническим следом $\tau=\mathrm{tr}$. В этом случае оператор $\varPhi$ был исследован в [9] (гл. II, § 5; гл. III, теорема 4.2; § 7, п. 6°; теорема 8.7).

Определяют ([10], гл. IV, § 3), что в НИП $\mathcal{E}$ норма

— *порядково непрерывна* или в $\mathcal{E}$ выполнено условие (A), если

$X_n\downarrow 0\ \Rightarrow\ \|X_n\|_{\mathcal{E}}\to 0$;

— *монотонно полна* или в $\mathcal{E}$ выполнено условие (B), если

$0\le X_n\uparrow$, $X_n\in\mathcal{E}$ $(n\in\mathbb{N})$, $\sup\limits_n\|X_n\|_{\mathcal{E}}<\infty\ \Rightarrow\ \exists X\in\mathcal{E}:X_n\uparrow X$.

Теорема 2. *Пусть* $\langle\mathcal{E},\|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ *— НИП на* $(\mathcal{M},\tau)$ *со свойствами* (A) *и* (B)*. Тогда формула* (3) *определяет линейный положительный непрерывный оператор* $\varPhi:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ *с* $\|\varPhi\|_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}}\le 1$.

Доказательство теоремы опирается на две леммы. Легко доказывается

Лемма 1. *Пусть* $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ *— НИП на* $(\mathcal{M}, \tau)$, $X \in \mathcal{E}$ *и* $V, W \in \mathcal{M}$. *Тогда* $VXW \in \mathcal{E}$ *и* $\|VXW\|_{\mathcal{E}} \le \|V\|\,\|W\|\,\|X\|_{\mathcal{E}}$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– произвольная алгебра и* $X, V_k, Y_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$. *Положим*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k X Y_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ *существуют* 2^{n-1} *наборов* $t_j^{(n)} = \{t_{jk}^{(n)}\}_{k=1}^n$ *с* $t_{jk}^{(n)} \in \{-1, 1\}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 2^{n-1}}$, *таких, что*

$$2^{n-1} S_n = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} H_j^{(n)} X Z_j^{(n)}, \quad H_j^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^{n} t_{jk}^{(n)} V_k, \quad Z_j^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^{n} t_{jk}^{(n)} Y_k. \tag{4}$$

Доказательство. Воспользуемся математической индукцией. Для $n = 1$ имеем $t_1^{(1)} = \{1\}$. Пусть 2^{n-1} наборов $t_j^{(n)}$ длины n удовлетворяют (4). Шаг индукции заключается в получении из каждого $t_j^{(n)}$ двух новых наборов длины $n+1$ путем приписывания на $(n+1)$-ю позицию -1 и 1 соответственно и учета равенства $2^n S_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} S_n + 2^n V_{n+1} X Y_{n+1}$. При этом слагаемые вида $V_{n+1} X Y_k$ или $V_k X Y_{n+1}$, $k = \overline{1, n}$, появляются парами и с противоположными знаками. □

Схема доказательства теоремы 2. Пусть $X \in \mathcal{E}$, тогда $X^* \in \mathcal{E}$ в силу п. (i) определения НИП. Поэтому $\operatorname{Re} X, \operatorname{Im} X \in \mathcal{E}^{\mathrm{sa}}$. Если $Z \in \mathcal{E}^{\mathrm{sa}}$ и $Z = Z_+ - Z_-$, то $|Z| = Z_+ + Z_-$ и $Z_+, Z_- \in \mathcal{E}^+$ в силу (ii). Итак, существует представление

$$X = X_1 - X_2 + iX_3 - iX_4, \quad X_m \in \mathcal{E}^+, \quad m = \overline{1, 4}, \quad i \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1.$$

Достаточно установить $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$-сходимость ряда из (3) для $X \in \mathcal{E}^+$. В силу леммы 2 с $V_k = Y_k = P_k$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют 2^{n-1} наборов $t_j^{(n)} = \{t_{jk}^{(n)}\}_{k=1}^n$ с $t_{jk}^{(n)} \in \{-1, 1\}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 2^{n-1}}$, удовлетворяющих условию (4). Поскольку $|Z_j^{(n)}| = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k$, имеем $\|Z_j^{(n)}\| \le 1$ и

$$\|2^{n-1} S_n\|_{\mathcal{E}} \le \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \|Z_j^{(n)} X Z_j^{(n)}\|_{\mathcal{E}} \le \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \|X\|_{\mathcal{E}} = 2^{n-1} \|X\|_{\mathcal{E}} \tag{5}$$

в силу неравенства треугольника и леммы 1. Поделив на 2^{n-1}, получаем $\|S_n\|_{\mathcal{E}} \le \|X\|_{\mathcal{E}}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $0 \le S_n \uparrow$. Поскольку в НИП X норма монотонно полна, то существует $S \in \mathcal{E}$, для которого $S_n \uparrow S \; (= \Phi(X))$. Так как $S - S_n \downarrow 0$, в силу условия (A) получаем $\|S - S_n\|_{\mathcal{E}} \to 0$ при $n \to \infty$. Итак, для $X \in \mathcal{E}^+$ имеем $\Phi(X) \in \mathcal{E}^+$ и

$$\|\Phi(X)\|_{\mathcal{E}} \le \|X\|_{\mathcal{E}}. \tag{6}$$

Поскольку (5) выполнено для произвольных $X \in \mathcal{E}$, то и (6) выполнено для таких $X \in \mathcal{E}$ в силу приведенных выше рассуждений. Поэтому $\|\Phi\|_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}} \le 1$.

Следствие 5. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Пусть $X \in S(\mathcal{M})^+$, $Y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k P_k \in S(\mathcal{M})^{\mathrm{sa}}$, $b_k \in \mathbb{R}$, ряд сходится τ-почти всюду. Если $\operatorname{Re}(XY) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $X^{1/2} Y X^{1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|X^{1/2} Y X^{1/2}\|_1 \le \|\operatorname{Re}(XY)\|_1$.

Схема доказательства. Имеем $\tau(P_kXP_k)=\tau(X^{1/2}P_kX^{1/2})$ для всех $k\in\mathbb{N}$,

$$\Phi(\mathrm{Re}\,(XY))=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,P_kXP_k,\quad |\Phi(\mathrm{Re}\,(XY))|=\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\,P_kXP_k,$$

$X^{1/2}YX^{1/2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_kX^{1/2}P_kX^{1/2}$, ряды $\|\cdot\|_1$-сходятся. Поэтому

$$\|X^{1/2}YX^{1/2}\|_1=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}b_k\,X^{1/2}P_kX^{1/2}\right\|_1\le\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}|b_k|\,X^{1/2}P_kX^{1/2}\right\|_1=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}|b_k|\,P_kXP_k\right\|_1=\|\Phi(\mathrm{Re}\,(XY))\|_1\le\|\mathrm{Re}\,(XY)\|_1.$$

Замечание 2. Следствие 5 усиливает теорему 3 [11] и в важном частном случае (не обязательно ограниченного) оператора Y указанного вида обобщает результат [12]. Формула (3) задает линейное положительное сжатие $\Phi:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$ для всех банаховых подпространств $\mathcal{Z}\subset S(\mathcal{M})$, интерполяционных между двумя НИП $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ на $(\mathcal{M},\tau)$, обладающими свойствами (A) и (B).

Замечание 3. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, $\{P_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $\sum\limits_{k=1}^{n}P_k=\mathbb{I}$. Тогда

$$\mathcal{N}=\left\{\sum_{k=1}^{n}P_kXP_k:X\in\mathcal{M}\right\}$$

— подалгебра фон Неймана в $\mathcal{M}$ и формула

$$\Phi(X)=\sum_{k=1}^{n}P_kXP_k\quad(X\in\mathcal{M})$$

определяет условное ожидание $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$.

Литература

[1] Segal I.E. *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (3), 401–457 (1953). Русск. перевод: Математика (сб. переводов) **6** (1), 65–132 (1962).

[2] Chilin V.I., Medzhitov A.M., Sukochev F.A. *Isometries of non-commutative Lorentz spaces*, Math. Z. **200** (4), 186–226 (1989).

[3] Chilin V.I., Sukochev F.A. *Weak convergence in non-commutative symmetric spaces*, J. Operator Theory **31** (1), 35–65 (1994).

[4] Бикчентаев А.М. *Об одном неравенстве для эрмитовых операторов*, Алгебра и анализ. Матер. конф., посв. 100-летию Б.М. Гагаева (Казанск. матем. о-во, Казань, 1997), с. 35–36.

[5] Akemann C.A., Anderson J., Pedersen G.K. *Triangle inequalities in operator algebras*, Linear Multilinear Algebra **11** (2), 167–178 (1982).

[6] Чилин В.И. *Неравенство треугольника в алгебрах локально измеримых операторов*, Математический анализ и алгебра, Сб. науч. тр. ТашГУ, Ташкент, 77–81 (1986).

[7] Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A. *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*, Integral Equations Oper. Theory **15** (2), 186–226 (1992).

[8] Kaftal V., Weiss G. *Compact derivations relative to semifinite von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **62** (2), 202–220 (1985).

[9] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* (Наука, М., 1965).

[10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*, 4-е изд., испр. (Невский Диалект, СПб., 2004).

[11] Бикчентаев А.М. *Об одном свойстве L_p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана*, Матем. заметки **64** (2), 185–190 (1998).

[12] Hiai F., Kosaki H. *Comparison of various means for operators*, J. Funct. Anal. **163** (2), 300–323 (1999).

А.М. Бикчентаев

ведущий научный сотрудник, НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Профессора Нужина, д. 1/37, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@ksu.ru

A.M. Bikchentaev

Leading Researcher, Research Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan (Volga region) Federal University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@ksu.ru