ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 533.539

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Исследование спектральных задач теории диэлектрических волноводов и разработка численных методов их решения привлекают большое внимание (см., напр., [1]–[4]). В работах [5]–[7] предложены численные методы поиска собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов на основе представления их амплитуд в виде суперпозиции потенциалов простого и двойного слоя. В последние годы при решении ряда спектральных задач электродинамики успешно применяется представление полей в виде потенциалов простого слоя (см., напр., [8]–[10]). Это позволяет существенно экономить машинное время.

Данная работа посвящена исследованию численного метода поиска постоянных распространения собственных поверхностных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с гладким контуром поперечного сечения, основанного на представлении искомых функций в виде потенциалов простого слоя. В предположении близости показателей преломления волновода и окружающей среды задача сведена к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений. На основе известной процедуры регуляризации (см., напр., [11], с. 14) построена система метода Галёркина. Нули определителя матрицы этой системы принимаются в качестве приближенного решения задачи. Для исследования сходимости метода использованы результаты работы [12]. Аналогичный подход при обосновании методов расчета микрополосковых линий применялся в [8], [9].

1. Задача определения постоянных распространения собственных поверхностных волн цилиндрического диэлектрического волновода в предположении близости показателей преломления волновода и окружающей среды сводится [1] (п. 2) к отысканию таких значений параметра β, при которых существуют нетривиальные решения $u(x,y)$ граничной задачи

$$\Delta u + \chi_1^2 u = 0, \quad (x,y) \in S, \tag{1}$$

$$\Delta u + \chi_2^2 u = 0, \quad (x,y) \notin \overline{S}, \tag{2}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad (x,y) \in C, \tag{3}$$

$$u \quad \text{экспоненциально убывает при} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty. \tag{4}$$

Здесь S — ограниченная область с границей C, $\chi_i^2 = k_0^2 n_i^2 - \beta^2$, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ε_0 — электрическая постоянная, μ_0 — магнитная постоянная, ω — частота электромагнитных колебаний, n_1, n_2 — показатели преломления волновода и окружающей среды, $\partial u/\partial \nu$ — правильная нормальная производная, f^+ (f^-) — предельное значение функции f изнутри (извне) контура C.

Будем разыскивать решения задачи (1)–(4) в классе функций, непрерывных в $\overline{S}$ и $R^2 \setminus S$ и дважды непрерывно дифференцируемых в $R^2 \setminus C$. В дальнейшем будем считать, что контур C является дважды непрерывно дифференцируемой кривой, $k_0 > 0$, $n_1 > n_2$.

Хорошо известно, что в простейшем случае, когда контур C — окружность, нетривиальные решения рассматриваемой задачи могут существовать лишь при $k_0 n_2 \le \beta \le k_0 n_1$, более того, соответствующие значения постоянных распространения β легко вычисляются при этом как корни трансцендентного уравнения (см., напр., [13]). В настоящей статье исследуется случай контура C произвольной формы.

Как обычно, будем предполагать, что $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ (см., напр., [14], с. 265). Рассмотрим многозначные функции $\chi_j(\beta) = \sqrt{k_0^2 n_j^2 - \beta^2}$ комплексного параметра β. На комплексной плоскости проведем разрезы, соединяющие точки разветвления $k_0 n_j$, $-k_0 n_j$ функций χ_j, через бесконечно удаленную точку. Условимся всюду в дальнейшем выбирать однозначные ветви функций χ_j такие, что $\mathrm{Im}\,\chi_j > 0$ при $\beta > k_0 n_j$.

Аналогично теореме 3.40 [15] доказывается

Теорема 1. *Для любых $k_0 > 0$, $n_1 > n_2$ нетривиальные решения задачи (1)–(4) могут существовать лишь при вещественных β, лежащих на отрезке $k_0 n_2 \le \beta \le k_0 n_1$.*

Будем искать решения уравнений (1) и (2) в виде потенциалов простого слоя [15] с непрерывными плотностями φ_1, φ_2 соответственно:

$$u(M) = \int_C \Phi_1(\beta; M, M_0)\varphi_1(M_0)dl_{M_0}, \quad M \in S, \tag{5}$$

$$u(M) = \int_C \Phi_2(\beta; M, M_0)\varphi_2(M_0)dl_{M_0}, \quad M \notin \overline{S}. \tag{6}$$

Здесь[1]

$$\Phi_j(\beta; M, M_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_j r_{MM_0}), \quad j = 1, 2, \quad M = (x, y), \quad M_0 = (x_0, y_0).$$

Функция $u(x, y)$, задаваемая (6), удовлетворяет условию (4) при любом $\beta \in G = (k_0 n_2,\, k_0 n_1)$. Используя граничные условия (3) и предельные свойства потенциалов простого слоя [15], получаем задачу: найти такие $\beta \in G$, при которых существуют нетривиальные непрерывные решения φ_1, φ_2 системы интегральных уравнений

$$\int_C (\Phi_1(\beta; M, M_0)\varphi_1(M_0) - \Phi_2(\beta; M, M_0)\varphi_2(M_0))dl_{M_0} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi_1(M) + \varphi_2(M)) + \int_C \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu_M}(\beta; M, M_0)\varphi_1(M_0) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu_M}(\beta; M, M_0)\varphi_2(M_0)\right)dl_{M_0} = 0, \quad M \in C. \tag{8}$$

Аналогично теореме 2 [17] доказывается

Лемма 1. *Если для некоторого $\beta \in G$ у задачи (1)–(4) может существовать лишь тривиальное решение, то для того же β у системы (7), (8) может существовать лишь тривиальное решение.*

Следует отметить, что в работе [17] исследование проводится в классе непрерывных по Гёльдеру плотностей. При этом нормальная производная на контуре понимается в обычном смысле. Исследование в классе непрерывных плотностей проводится аналогично, если под нормальной производной на контуре C понимать правильную нормальную производную.

Из леммы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Если при некотором $\beta \in G$ система (7), (8) имеет нетривиальное решение, то ему соответствует нетривиальное решение задачи (1)–(4).*

[1]Для специальных функций приняты обозначения [16].

2. Пусть контур C задан параметрически $r = r(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Переходя к переменной интегрирования t, выделяя явно логарифмическую особенность ядер $\Phi_1(M, M_0)$, $\Phi_2(M, M_0)$, преобразуем систему (7), (8) к виду

$$Sx^{(1)} + R^{(1,1)}(\beta)x^{(1)} + R^{(1,2)}(\beta)x^{(2)} = 0, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{9}$$

$$x^{(2)} + R^{(2,1)}(\beta)x^{(1)} + R^{(2,2)}(\beta)x^{(2)} = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{10}$$

Здесь

$$Sx^{(1)} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{t - t_0}{2}\right| x^{(1)}(t_0)dt_0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$R^{(i,j)}(\beta)x^{(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)x^{(j)}(t_0)dt_0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$x^{(1)}(t_0) = (\varphi_1(M_0) - \varphi_2(M_0))|r'(t_0)|, \quad x^{(2)}(t_0) = \varphi_1(M_0) + \varphi_2(M_0),$$

$$h^{(1,1)}(\beta; t, t_0) = 2\pi(G^{(1,1)}(\beta; t, t_0) + G^{(1,2)}(\beta; t, t_0)),$$

$$h^{(1,2)}(\beta; t, t_0) = 2\pi(G^{(1,1)}(\beta; t, t_0) - G^{(1,2)}(\beta; t, t_0))|r'(t_0)|,$$

$$h^{(2,1)}(\beta; t, t_0) = 4\pi(G^{(2,1)}(\beta; t, t_0) + G^{(2,2)}(\beta; t, t_0)),$$

$$h^{(2,2)}(\beta; t, t_0) = 4\pi(G^{(2,1)}(\beta; t, t_0) - G^{(2,2)}(\beta; t, t_0))|r'(t_0)|,$$

$$G^{(1,j)}(\beta; t, t_0) = \Phi_j(\beta; M, M_0) + \frac{1}{2\pi}\ln\left|\sin\frac{t - t_0}{2}\right|,$$

$$G^{(2,j)}(\beta; t, t_0) = \frac{\partial}{\partial \nu_M}\Phi_j(\beta; M, M_0), \quad M = M(t), \quad M_0 = M_0(t_0).$$

Используя известные свойства функций Ханкеля (см., напр., [16]), нетрудно убедиться, что справедлива

Лемма 2. *Функции $h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)$, $i, j = 1, 2$, аналитические в интервале $G = (k_0n_2, k_0n_1)$ по вещественному параметру β для каждой точки $(t, t_0) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.*

Каждая из функций $h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)$, $i, j = 1, 2$, рассматриваемая первоначально при вещественных значениях $\beta \in G$, для каждой точки $(t, t_0) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ допускает единственное аналитическое продолжение по комплексному параметру β в комплексную плоскость с разрезами, соединяющими бесконечно удаленную точку с точками k_0n_1, k_0n_2. Таким образом, для любого интервала $G' \subset G$ в комплексной плоскости с разрезами существует окрестность Λ такая, что k_0n_2, $k_0n_1 \notin \Lambda$ и справедлива

Лемма 3. *Функции $h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)$, $i, j = 1, 2$, аналитические в области Λ для каждой точки $(t, t_0) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.*

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что справедлива

Лемма 4. *Функции $h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)$, $i, j = 1, 2$, при любом $\beta \in \Lambda$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями $(t, t_0) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.*

При построении и исследовании численного метода систему (9)–(10) удобно трактовать как операторное уравнение в некотором гильбертовом пространстве. Известно (см., напр., [11], с. 10), что оператор $S : L_2 \to W_2^1$ непрерывно обратим, обратный оператор $S^{-1} : W_2^1 \to L_2$ определяется по формуле

$$S^{-1}(y; t) = \frac{c_0(y)}{\ln 2} + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k(y) e^{ikt}, \quad y \in W_2^1, \tag{11}$$

где $c_k(y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y(t_0)e^{-ikt_0}dt_0$ — коэффициенты Фурье функции y, и

$$\|S^{-1}\| = 2. \tag{12}$$

Отметим, что при любом $\beta \in \Lambda$ в силу леммы 4 операторы $R^{(2,1)}(\beta)$, $R^{(2,2)}(\beta) : L_2 \to L_2$, $R^{(1,1)}(\beta)$, $R^{(1,2)}(\beta) : L_2 \to W_2^1$ вполне непрерывны. Таким образом, система (9), (10) эквивалентна операторному уравнению

$$A(\beta)y \equiv (I + B(\beta))y = 0, \tag{13}$$

где

$$y = (y^{(1)},\ y^{(2)}), \quad y^{(1)} = Sx^{(1)} \in W_2^1, \quad y^{(2)} = x^{(2)} \in L_2,$$

оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $H = W_2^1 \times L_2$, определяется при помощи равенства

$$By = (R^{(1,1)}S^{-1}y^{(1)} + R^{(1,2)}y^{(2)},\ R^{(2,1)}S^{-1}y^{(1)} + R^{(2,2)}y^{(2)}), \tag{14}$$

I — единичный оператор.

Обозначим через $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda,\ \exists A(\beta)^{-1} : H \to H\}$ множество регулярных точек оператора $A(\beta)$, $\sigma(A) = \Lambda \backslash \rho(A)$ — множество сингулярных точек оператора $A(\beta)$. В силу полной непрерывности оператора $B(\beta)$, при любом $\beta \in \Lambda$ оператор $A(\beta)$ фредгольмов и, следовательно, каждая сингулярная точка является характеристическим числом этого оператора. Используя известные свойства интегральных операторов со слабо сингулярными ядрами (см., напр., [11]), легко показать, что любому собственному вектору $y \in H$ оператора A отвечает нетривиальное решение φ_1, φ_2 задачи (7), (8) из пространства непрерывных функций.

Приближенное решение $y_n = (y_n^{(1)},\ y_n^{(2)})$ уравнения (13) будем искать в виде

$$y_n^{(j)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \ \ n \in N, \ \ j = 1, 2.$$

Коэффициенты $\alpha_k^{(j)}$ будем определять с помощью метода Галёркина:

$$\int_0^{2\pi} (Ay_n)^{(k)}(t)e^{-ijt}dt = 0, \ \ j = -n, \ldots, n, \ \ k = 1, 2. \tag{15}$$

В силу (11) имеем

$$S^{-1}(y_n^{(1)}; t) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\ln 2} + 2\sum_{k=-n}^{n} |k|\alpha_k^{(1)}e^{ikt},$$

поэтому равенства (15) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_j^{(1)} + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk}^{(1,1)}(\beta)d_j\alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk}^{(1,2)}(\beta)\alpha_k^{(2)} = 0, \ \ j = -n, \ldots, n, \tag{16}$$

$$\alpha_j^{(2)} + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk}^{(2,1)}(\beta)d_j\alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk}^{(2,2)}(\beta)\alpha_k^{(2)} = 0, \ \ j = -n, \ldots, n. \tag{17}$$

Здесь $d_j = \{1/\ln 2$ при $j = 0,\ 2|j|$ при $j \neq 0\}$,

$$h_{jk}^{(l,m)}(\beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{(l,m)}(\beta; t, t_0)e^{-ijt}e^{ikt_0}dt\,dt_0.$$

Пусть H_n^T — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n. Обозначим через H_n подпространство H элементов $(y_n^{(1)},\, y_n^{(2)})$, $y^{(1)},\, y^{(2)} \in H_n^T$. Введем в рассмотрение оператор проектирования $p_n : H \to H_n$: $p_n y = (\Phi_n y^{(1)},\, \Phi_n y^{(2)})$, $y = (y^{(1)},\, y^{(2)}) \in H$, где

$$\Phi_n(\varphi; t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\varphi) e^{ikt}$$

— оператор Фурье. Ясно, что

$$\|p_n\| = 1. \tag{18}$$

Система линейных алгебраических уравнений (16), (17) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n(\beta) y_n \equiv p_n A(\beta) y_n \equiv (I + p_n B(\beta)) y_n \equiv (I + B_n(\beta)) y_n = 0.$$

Здесь $A_n : H_n \to H_n$, I — единичный оператор в пространстве H_n.

Обозначим через $\rho(A_n) = \{\beta : \beta \in \Lambda,\ \exists A_n(\beta)^{-1} : H_n \to H_n\}$ множество регулярных точек оператора $A_n(\beta)$, $\sigma(A_n) = \Lambda \setminus \rho(A_n)$ — множество сингулярных точек оператора $A_n(\beta)$, совпадающее, в силу конечномерности оператора, с множеством его характеристических чисел. Приближенные значения β_n постоянных распространения β будем искать как характеристические числа оператора $A_n(\beta)$, т. е. как нули определителя матрицы системы (16), (17).

3. Относительно сходимости описанного в предыдущем пункте метода справедлива

Теорема 3. *Множества $\sigma(A)$ и $\sigma(A_n)$ состоят из изолированных точек. Пусть $\beta_0 \in \sigma(A)$, тогда существует такая последовательность $\{\beta_n\}_{n \in N}$, $\beta_n \in \sigma(A_n)$, что $\beta_n \to \beta_0$, $n \in N$. Пусть $\beta_n \in \sigma(A_n)$, $\beta_n \to \beta_0 \in \Lambda$, $n \in N' \subseteq N$, тогда $\beta_0 \in \sigma(A)$.*

Здесь и далее через N', N'', N''' обозначены бесконечные подмножества множества натуральных чисел N. Под сходимостью $z_n \to z$, $n \in N'$, понимается сходимость при $n \to \infty$, когда индекс n пробегает множество N'.

Справедливость теоремы 3 вытекает из теоремы 1 [12] и следующих лемм, в которых фактически проверяются условия этой теоремы.

Лемма 5. *Оператор $p_n : H \to H_n$ обладает свойствами:*

$$\|p_n y\|_H \to \|y\|_H, \quad n \in N \quad \forall y \in H;$$
$$\|p_n(\alpha y + \alpha' y') - (\alpha p_n y + \alpha' p_n y')\|_H \to 0, \quad n \in N \quad \forall y, y' \in H, \quad \alpha, \alpha' \in C.$$

Первое свойство выполняется в силу очевидных предельных соотношений $\|\Phi_n x\| \to \|x\|$, $n \in N$, $x \in L_2$, W_2^1. Второе — следствие линейности оператора p_n.

Лемма 6. *Оператор-функции $A(\beta)$, $A_n(\beta)$ голоморфны в области Λ.*

Доказательство. Оператор-функции $R^{(2,1)}(\beta)$, $R^{(2,2)}(\beta)$, $R^{(1,1)}(\beta)$, $R^{(1,2)}(\beta)$ являются голоморфными в области Λ в силу леммы 3 (см. [9], с. 71). Отсюда и из (12)–(14) заключаем, что $A(\beta)$ является голоморфной в области Λ оператор-функцией. Следовательно, таким же свойством обладает и $A_n(\beta) = p_n A(\beta)$. □

Лемма 7. *Верна оценка $\|A(\beta)\| \le c(\beta)$, $\beta \in \Lambda$, где*

$$c(\beta) = 1 + 2(c_{11}^2(\beta) + d_{11}^2(\beta))^{\frac{1}{2}} + (c_{12}^2(\beta) + d_{12}^2(\beta))^{\frac{1}{2}} + 2c_{21}(\beta) + c_{22}(\beta)$$

— непрерывная в области Λ функция. Здесь

$$c_{ij}^2(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)|^2 dt\, dt_0, \quad i, j = 1, 2,$$
$$d_{1j}^2(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h^{(1,j)}(\beta; t, t_0) \right|^2 dt\, dt_0, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\|A(\beta)\| \le 1 + \|R^{(1,1)}(\beta)\|\,\|S^{-1}\| + \|R^{(1,2)}(\beta)\| + \|R^{(2,1)}(\beta)\|\,\|S^{-1}\| + \|R^{(2,2)}(\beta)\|,$$

равенства (12) и очевидных (в силу леммы 4) оценок

$$\begin{aligned} &\|R^{(2,j)}(\beta)\| \le c_{2,j}(\beta), && R^{(2,j)}(\beta): L_2 \to L_2,\\ &\|R^{(1,j)}(\beta)\|^2 \le c_{1,j}^2(\beta) + d_{1,j}^2(\beta), && R^{(1,j)}(\beta): L_2 \to W_2^1, \quad j = 1, 2. \quad \square \end{aligned}$$

Из определения оператора $A_n(\beta)$ и равенства (18) вытекает

Лемма 8. *Верна оценка* $\|A_n(\beta)\| \le \|A(\beta)\|$, $n \in N$, $\beta \in \Lambda$.

Лемма 9. *Для любого* $\beta \in \Lambda$ *последовательность операторов* $\{A_n(\beta)\}_{n\in N}$ *собственно сходится к оператору* $A(\beta)$.

Доказательство. В соответствии с определением [12] для доказательства леммы нужно показать, что для любого $\beta \in \Lambda$ выполнены условия:

1. из того, что последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$, $y_n \in H_n$ P-сходится к $y \in H$, вытекает, что последовательность $\{A_n y_n\}_{n\in N}$ P-сходится к Ay;

2. из равномерной ограниченности $\{y_n\}_{n\in N}$, $\|y_n\| \le \text{const}$, $n \in N$, и P-компактности последовательности $\{A_n y_n\}_{n\in N}$ следует, что последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$ P-компактна.

P-сходимость $\{y_n\}_{n\in N}$ к $y \in H$ означает, что $\|y_n - p_n y\| \to 0$, $n \in N$, и справедливость первого условия вытекает, таким образом, из оценки $\|A_n y_n - p_n A y\| \le \|A_n\|\,\|y_n - p_n y\| + \|p_n\|\,\|A\|\,\|p_n y - y\|$, $n \in N$, лемм 7, 8, равенства (18) и очевидного предельного соотношения $\|p_n y - y\| \to 0$, $n \in N$.

Проверим второе условие. P-компактность последовательности $\{A_n y_n\}_{n\in N}$ означает, что для любого $N' \subseteq N$ существует такое $N'' \subseteq N'$, что последовательность $\{A_n y_n = y_n + B_n y_n\}_{n\in N''}$ P-сходится к $z \in H$. Если $\|y_n\| \le \text{const}$, $n \in N''$, то существует слабо сходящаяся подпоследовательность $\{y_n\}_{n\in N'''}$, $N''' \subset N''$. Вполне непрерывный оператор B переводит ее в сильно сходящуюся: $\|By_n - u\| \to 0$, $n \in N'''$, $u \in H$. Отсюда в силу неравенства $\|B_n y_n - p_n u\| \le \|p_n\|\,\|By_n - u\|$ и равенства (18) заключаем, что последовательность $\{B_n y_n\}_{n\in N'''}$ P-сходится к $u \in H$. Таким образом, $\{y_n\}_{n\in N'''}$ P-сходится к $y = z - u \in H$, и второе условие выполнено. $\square$

Лемма 10. *Нормы* $\|A_n(\beta)\|$ *ограничены равномерно по* n *и* β *на каждом компакте* $\Lambda_0 \subset \Lambda$.

Справедливость этой леммы очевидным образом вытекает из лемм 8 и 7.

Лемма 11. *Для любых* $k_0 > 0$, $n_1 > n_2$ *в интервале* $G = (k_0 n_2,\ k_0 n_1)$ *существуют такие* β, *при которых задача* (1)–(4) *имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Если $\beta \in G$, то $\chi_1 > 0$, $\chi_2 = i\rho_2$, $\rho_2 > 0$. Пусть u — решение задачи (1)–(4). Применяя в областях S, $S_R = \{(x,y) \notin \overline{S} : r < R\}$ формулу Грина, учитывая условия (1)–(3), получаем равенство

$$\rho_2^2 \int_{S_R} |u|^2 ds + \int_{S_R} |\nabla u|^2 ds + \int_S |\nabla u|^2 ds = \int_{C_R} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} dl + \chi_1^2 \int_S |u|^2 ds. \tag{19}$$

Из (19), (4) следует, что существует такое R_0, что для любого $R \ge R_0$ верно неравенство

$$\rho_2^2 \int_{S_R} |u|^2 ds + \int_{S_R} |\nabla u|^2 ds + \frac{1}{2} \int_S |\nabla u|^2 ds \le \chi_1^2 \int_S |u|^2 ds. \tag{20}$$

Применим теоремы вложения (см., напр., [18])

$$\int_S |u|^2 ds \le c_{S,1} \Big(\int_S |\nabla u|^2 ds + \int_C |u|^2 dl \Big), \tag{21}$$

$$\int_C |u|^2 dl \le c_{S,2} \Big(\int_{S_R} |\nabla u|^2 ds + \int_{S_R} |u|^2 ds \Big). \tag{22}$$

Здесь $c_{S,1}$, $c_{S,2}$ — постоянные, которые могут зависеть лишь от области S. Подставив (21), (22) в (20), получаем неравенство

$$(\rho_2^2 - \chi_1^2 c_{1,S} c_{2,S}) \int_{S_R} |u|^2 ds + \left(\frac{1}{2} - \chi_1^2 c_{1,S}\right) \int_S |\nabla u|^2 ds + (1 - \chi_1^2 c_{1,S} c_{2,S}) \int_{S_R} |\nabla u|^2 ds \leq 0. \quad (23)$$

Потребуем, чтобы в (23) все множители при интегралах были положительны. Это условие будет выполнено, если

$$\beta > \max_{i=1,2,3} \beta_i. \quad (24)$$

Здесь

$$\beta_1^2 = \frac{k_0^2 n_2^2}{1 + c_S} + \frac{k_0^2 n_1^2 c_S}{1 + c_S}, \quad \beta_2^2 = k_0^2 n_1^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{c_{1,S}},$$
$$\beta_3^2 = k_0^2 n_1^2 - \frac{1}{c_S}, \quad c_S = c_{1,S} c_{2,S}.$$

Ясно, что для любых $k_0 > 0$, $n_1 > n_2$ множество β из интервала G, для которых выполняется (24), не пусто. Каждому такому β может соответствовать лишь тривиальное решение задачи (1)–(4). Действительно, из (23) следует

$$\int_{S_R} |u|^2 ds = 0.$$

Таким образом, $u(M) = 0$, $M \in S_R$ и, следовательно, $u(M) = 0$, $M \in R^2$. $\square$

Лемма 12. *Множество* $\rho(A)$ *не пусто, т. е.* $\sigma(A) \neq \Lambda$.

Справедливость этой леммы непосредственно следует из фредгольмовости оператора A, лемм 11 и 1.

Таким образом, все условия теоремы 1 [12] в рассматриваемом нами случае выполняются, и утверждения теоремы 3 доказаны.

Описанный метод применялся для решения задач о собственных волнах диэлектрических волноводов, как в упрощенной постановке, рассматриваемой в данной работе, так и в полной электродинамической постановке (см., напр., [1]), приводящей к нелинейным спектральным задачам, для систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Численные эксперименты, часть из которых описана в [19], [20], показали высокую эффективность метода. Так, для определения постоянных распространения основных волн волноводов различных сечений оказалось достаточным брать не более трех членов тригонометрического ряда.

Автор благодарит Н.Б. Плещинского за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. *Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения (обзор)* // Радиотехн. и электрон. – 1979. – Т. 24. – № 7. – С. 1245–1263.
2. Васильев Е.Н., Солодухов В.В. *Численные методы в задачах расчета диэлектрических волноводов, диэлектрических резонаторов и устройств на их основе* // Научн. тр. Моск. энерг. ин-т. – 1983. – № 19. – С. 68–78.
3. Дианов Е.М. *Волоконная оптика, проблемы и перспективы* // Вестн. АН СССР. – 1989. – № 10. – С. 41–51.
4. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов.* – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.
5. Eyges L., Gianino P. *Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape* // J. Opt. Soc. Am. – 1979. – V.69. – № 9. – P. 1226–1235.

6. Захаров Е.В., Икрамов Х.Д., Сивов А.Н. *Метод расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного сечения* // Вычисл. методы и программиров. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – Вып. 32. – С. 71–85.
7. Малов А.В., Солодухов В.В., Чурилин А.А. *Расчет собственных волн диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения методом интегральных уравнений* // Антенны. – М.: Радио и связь, 1984. – Вып. 31. – С. 189–195.
8. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Исследование математических моделей микрополосковых линий* // Методы матем. моделир., автоматиз. обраб. наблюдений и их применения. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – С. 175–198.
9. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 184 с.
10. Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П. *О регуляризации спектральных задач волнового рассеяния на незамкнутых экранах* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295. – № 6. – С. 1358–1382.
11. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.
12. Вайникко Г.М., Карма О.О. *О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1974. – Т. 14. – № 6. – С. 1393–1408.
13. Каценеленбаум Б.З. *Симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра* // Журн. техн. физ. – 1949. – Т. 19. – № 10. – С. 1168–1181.
14. Никольский В.В. *Электродинамика и распространение радиоволн*: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1978. – 544 с.
15. Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987. – 311 с.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
17. Цецохо В.А. *Задача об излучении электромагнитных волн в слоистой среде с осевой симметрией* // Вычисл. системы. – Новосибирск, 1964. – Вып. 12. – С. 52–78.
18. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
19. Карчевский Е.М. *Об одном методе расчета постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов* // Материалы международн. конф. и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. – М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1996. – Т. 1. – С. 185–187.
20. Карчевский Е.М. *Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 136–140.

Казанский государственный университет

Поступила
10.12.1996