ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.928

Г.В. ЗАВИЗИОН

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В [1], [2] строились асимптотические решения системы линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в случае простых и кратных корней характеристического уравнения. Для систем дифференциальных уравнений с вырожденной в точке матрицей при производной корни характеристического уравнения разрывны в точке, и изложенные в [1], [3] методы неприменимы. В данной статье рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений с вырожденностью в точке и постоянным запаздыванием. Показано, что при наличии вырожденности в точке матрицы при производной вид решений зависит от корней двух алгебраических уравнений, при этом коэффициенты формальных разложений зависят от параметра. Указаны достаточные условия существования решения и построены асимптотические решения систем сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной в точке матрицей при производной и с постоянным запаздыванием.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)x(t-\Delta,\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t,s,\varepsilon)x(s,\varepsilon)ds, \tag{1}$$

где ε $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ — малый параметр, $h\in N$, $t\in[0;L]$, $s\in[0;L]$; ρ — произвольный параметр; $\Delta>0$ — постоянная запаздывания; $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $K(t,s,\varepsilon)$ — $n\times n$ матрицы, $x(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор.

Будем искать решение системы (1), которое при $-\Delta\le t\le 0$ удовлетворяет начальному условию

$$x(t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon),\quad -\Delta\le t\le 0,$$

где $\varphi(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор.

Предположим, что выполняются условия

1) матрицы $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $K(t,s,\varepsilon)$ и вектор $\varphi(t,\varepsilon)$ допускают разложение по степеням ε

$$\varphi(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\varphi_r(t),\quad B(t,\varepsilon)=t^kB_0(t)+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^rB_r(t),\quad A(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^rA_r(t),$$

$$K(t,s,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^rK_r(t,s),\quad k\in N;$$

2) коэффициенты $A_r(t)$, $B_r(t)$, $K_r(t,s)$ бесконечно дифференцируемы по t;

3) $\det A_0(t)\ne 0\ \ \forall t\in[0;L]$;

4) если ρ — собственное значение ядра $K(t,s)=A_0^{-1}(t)K_0(t,s)$, то

$$\det\|a_{ij}\|\ne 0,$$

где

$$a_{ij}\int_0^L A_0^{-1}\Big(-mB_0(t)q_i'(t)+A_1(t)q_i(t)+\rho\int_0^L K_1(t,\xi)q_i(\xi)d\xi\Big)\eta_j(t)dt,$$

$q_i(t)$, $\eta_j(t)$ — собственные векторы соответственно ядра $K(t,s)$ и сопряженного ядра $\overline{K}(t,s)$, $i,j=\overline{1,r_1}$; $m=1$, если $h=1$; $m=0$, если $h>1$;

5) алгебраическое уравнение

$$\det\|A_0(t)-\omega(t)B_0(t)\|=0 \tag{2}$$

имеет простые корни при $t\in[0;L]$;

6) корни уравнения

$$\det\|B_1(t)-\overline{\omega}(t)B_0(t)\|=0 \tag{3}$$

простые или это уравнение имеет один кратный корень с простыми элементарными делителями;

7) выполняются соотношения

$$t^k+\varepsilon\overline{\omega}(t)\neq 0,\quad t^k(\omega_i-\omega_j)+\varepsilon(\overline{\omega}_j(t)\omega_i(t)-\overline{\omega}_i(t)\omega_j(t))\neq 0\ \ \forall t\in[0;L],\quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0],\quad i,j=1,\quad n, i\neq j.$$

Согласно условиям 5), 6) и [3] существуют неособенные бесконечно дифференцируемые матрицы $S_i(t)$, T_t $(i=\overline{1,2})$ такие, что

$$A_0(t)=S_1^{-1}(t)W(t)T_1^{-1}(t),\quad B_0(t)=S_1^{-1}(t)T_1^{-1}(t)=S_2^{-1}(t)T_2^{-1}(t),\quad B_1(t)=S_2^{-1}(t)\overline{W}(t)T_2^{-1}(t),$$

где

$$W(t)=\mathrm{diag}\{\omega_1(t),\dots,\omega_n(t)\},\quad \overline{W}(t)=\mathrm{diag}\{\overline{\omega}_1(t),\dots,\overline{\omega}_n(t)\}.$$

Предположим, что выполнены условия

8) если матрица $S_2(t)S_1^{-1}(t)$ не коммутативна с матрицей $W(t)$, то уравнение

$$\det\|s_{ij}(0)(\omega_j(0)\overline{\omega}_{i_1}(0)\dots\overline{\omega}_{i_k}(0)\overline{\omega}_{i_{n-1}}(0)-\overline{\lambda})\|=0$$

имеет различные корни, где i_k $(k=\overline{1,n-1})$ принимают значения от 1 до n, причем $i_k\neq i$; s_{ij} — элементы матрицы $S_2(t)S_1^{-1}(t)$;

9) для любых $t_1<t_2$, $t_1,t_2\in[0;L]$, $\lambda^{(i)}(t_1,\varepsilon)\neq\lambda^{(j)}(t_2,\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, где $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ — корни уравнения $\det\|A_0(t)-(t^kB_0(t)+\varepsilon B_1(t))\lambda(t,\varepsilon)\|=0$.

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1)–9), *то система интегро-дифференциальных уравнений* (1) *при* $(r-1)\Delta\le t\le r\Delta$ $(r\ge 1)$ *имеет решение, которое можно представить в виде*

$$\begin{aligned}x(t,\varepsilon)={}&U_{mr}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{t}\Lambda_{mr}(t,\varepsilon)dt\right)c_r+\rho\int\limits_0^L Q_{mr}(t,s,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{s}\Lambda_{mr}(t,\varepsilon)dt\right)c_r ds+\\&+\sum_{i=1}^{r-1}K_{imr}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(i-1)\Delta}^{t-(r-i)\Delta}\Lambda_{mi}(s,\varepsilon)ds\right)c_i+p_{mr}(t,\varepsilon)+\\&+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{r+1-j}c_j\rho\int\limits_0^L R_{jimr}(t,s,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(j-1)\Delta}^{s-(i-1)\Delta}\Lambda_{mi}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)ds+\varepsilon^{m-r-h+1}\overline{\alpha}_{mr}(t,s,\varepsilon),\end{aligned} \tag{4}$$

где c_j $(j=\overline{1,r})$ — *постоянные векторы,* $\overline{\alpha}_{mr}(t,s,\varepsilon)$ — *вектор, ограниченный в окрестности* $\varepsilon=0$, *а матрицы* $R_{jimr}(t,s,\varepsilon)$, $K_{imr}(t,\varepsilon)$, $\Lambda_{mr}(t,\varepsilon)$, $Q_{mr}(t,s,\varepsilon)$, $U_{mr}(t,\varepsilon)$ *и вектор* $p_{mr}(t,\varepsilon)$

таковы, что

$$U_{mr}(t,\varepsilon)=\sum_{s_1=0}^{m-r+1}\varepsilon^{s_1}U_{mr}^{(s_1)}(t,\varepsilon),\quad p_{mr}(t,\varepsilon)=\sum_{s_1=0}^{m-r+1}\varepsilon^{s_1}p_{mr}^{(s_1)}(t,\varepsilon),\quad j=\overline{1,r-1},\quad r\geq 1,$$

$$Q_{mr}(t,s,\varepsilon)=\sum_{s_1=\alpha}^{m-r+1}\varepsilon^{s_1}Q_{mr}^{(s_1)}(t,s,\varepsilon),\quad K_{imr}(t,\varepsilon)=\sum_{s_1=0}^{m-r+1}\varepsilon^{s_1}K_{imr}^{(s_1)}(t,\varepsilon),\tag{5}$$

$$\Lambda_{mr}(t,\varepsilon)=\sum_{s_1=0}^{m-r+1}\varepsilon^{s_1}\Lambda_{mr}^{(s_1)}(t,\varepsilon),\quad R_{jimr}(t,s,\varepsilon)=\sum_{s_1=\alpha}^{m-r+1}\varepsilon^{s_1}R_{jimr}^{(s_1)}(t,s,\varepsilon),$$

причем $\alpha=0$, *если* ρ — *регулярное значение ядра* $K(t,s)$; $\alpha=-1$, *если* ρ — *собственное значение ядра* $K(t,s)$.

Приведем схему доказательства. Решение интегро-дифференциальных уравнений (1) при $0\leq t\leq\Delta$ будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon)=U_{m1}(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)+p_{m1}(t,\varepsilon)+\rho\int_0^L Q_{m1}(t,s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)ds,$$

где $y(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\varepsilon^hB(t,\varepsilon)U_{m1}(t,\varepsilon)y'(t,\varepsilon)=(-\varepsilon^hB(t,\varepsilon)U'_{m1}(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)U_{m1}(t,\varepsilon))y(t,\varepsilon)+$$
$$+\Big(-\varepsilon^hB(t,\varepsilon)p'_{m1}(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)p_{m1}(t,\varepsilon)+f_1(t,\varepsilon)+\rho\int_0^L K(t,s,\varepsilon)p_{m1}(s,\varepsilon)ds\Big)+$$
$$+\rho\int_0^L\Big(-\varepsilon^hB(t,\varepsilon)Q'_{m1}(t,s,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)Q_{m1}(t,s,\varepsilon)+K(t,s,\varepsilon)U_{m1}(s,\varepsilon)+$$
$$+\rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)Q_{m1}(\xi,s,\varepsilon)d\xi\Big)ds,$$

($'$) означает производную функции по переменной t, $f_1(t,\varepsilon)=C(t,\varepsilon)\varphi(t,\varepsilon)$.

Используя условия 1)–8), матрицы $U_{m1}(t,\varepsilon)$, $Q_{m1}(t,s,\varepsilon)$ и вектор $p_{m1}(t,\varepsilon)$ находим из соотношений

$$-\varepsilon^hB(t,\varepsilon)U'_{m1}(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)U_{m1}(t,\varepsilon)=B(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)U_{m1}(t,\varepsilon)(\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}F_{1m1}(t,\varepsilon)),$$
$$-\varepsilon^hB(t,\varepsilon)p'_{m1}(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)p_{m1}(t,\varepsilon)+f_1(t,\varepsilon)+\rho\int_0^L K(t,s,\varepsilon)p_{m1}(s,\varepsilon)ds=\varepsilon^{m+1}F_{2m1}(t,\varepsilon),$$
$$-\varepsilon^hB(t,\varepsilon)Q'_{m1}(t,s,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)Q_{m1}(t,s,\varepsilon)+K(t,s,\varepsilon)U_{m1}(s,\varepsilon)+$$
$$+\rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)Q_{m1}(\xi,s,\varepsilon)d\xi=\varepsilon^{m+1}F_{3m1}(t,\varepsilon).$$

Используя (4), находим $x(t-\Delta,\varepsilon)$, и, подставляя в (1), получим, что при $r\Delta\leq t\leq(r+1)\Delta$ уравнение принимает вид

$$\varepsilon^hB(t,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt}=A(t,\varepsilon)x+\rho\int\limits_0^L K(t,s,\varepsilon)x(s,\varepsilon)ds+\sum_{i=1}^{r}C_{ir}(t,\varepsilon)\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(i-1)\Delta}^{t-(r+1-i)\Delta}\Lambda_{mi}(s,\varepsilon)ds\Big)c_i+$$
$$+f_r(t,\varepsilon)+\rho\int\limits_0^L M_{r1mr}(t,s,\varepsilon)\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{s}\Lambda_{mr}(\tau,\varepsilon)d\tau\Big)ds+\varepsilon^{m+1-r-h}\alpha_{1mr}(t,s,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{r+1-j}\rho\int\limits_0^L M_{jimr}(t,s,\varepsilon)\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(j-1)\Delta}^{s-(i-1)\Delta}\Lambda_{mj}(\tau,\varepsilon)d\tau\Big)ds,\tag{6}$$

где $C_{ir} = C(t,\varepsilon)K_{imr}(t,\varepsilon)$, $C_{rr} = C(t,\varepsilon)U_{mr}(t-\Delta,\varepsilon)c_r$, $f_r(t,\varepsilon) = p_{mr}(t-\Delta,\varepsilon)$, $M_{r1mr}(t,s,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)Q_{mr}(t-\Delta,s,\varepsilon)$, $M_{jimr}(t,s,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)R_{jimr}(t,s,\varepsilon)$.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (6) будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon) = U_{m,r+1}(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) + p_{m,r+1}(t,\varepsilon) + \rho\int\limits_0^L Q_{m,r+1}(t,s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)ds +$$
$$+\sum_{i=1}^{r} K_{im,r+1}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(i-1)\Delta}^{t-(r+1-i)\Delta}\Lambda_{mi}(s,\varepsilon)ds\right)c_i +$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r+2-j}\rho\int\limits_0^L R_{jimr}(t,s,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{(j-1)\Delta}^{s-(i-1)\Delta}\Lambda_{mj}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)ds. \quad (7)$$

В силу условий 1)–9) матрицы $U_{m,r+1}(t,\varepsilon)$, $Q_{m,r+1}(t,s,\varepsilon)$, $K_{im,r+1}(t,s,\varepsilon)$, $R_{jim,r+1}(t,s,\varepsilon)$, $R_{j,r+2-j,m,r+1}(t,s,\varepsilon)$ и вектор $p_{m,r+1}(t,\varepsilon)$ находим из соотношений

$$-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)U'_{m,r+1}(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)U_{m,r+1}(t,\varepsilon) = B(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)U_{m,r+1}(t,\varepsilon)(\Lambda_{m,r+1}(\tau,\varepsilon) +$$
$$+\varepsilon^{m+1-r}F_{1m,r+1}(t,\varepsilon)),$$
$$-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)K'_{im,r+1}(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)K_{im,r+1}(t,\varepsilon) - B(t,\varepsilon)K_{im,r+1}(t,\varepsilon)\Lambda_{mi}(t-(r+1-i)\Delta,\varepsilon) +$$
$$+C_{ir}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1-r}F_{2m,r+1}(t,\varepsilon), \quad i=\overline{1,r},$$
$$-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)p'_{m,r+1}(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)p_{m,r+1}(t,\varepsilon) + f_r(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1-r-h}\alpha_{1mr}(t,s,\varepsilon) +$$
$$+\rho\int_0^L K(t,s,\varepsilon)p_{m,r+1}(s,\varepsilon)ds = \varepsilon^{m+1-r}F_{3m,r+1}(t,s,\varepsilon),$$
$$-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)Q'_{m,r+1}(t,s,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Q_{m,r+1}(t,s,\varepsilon) + K(t,s,\varepsilon)U_{m,r+1}(s,\varepsilon) +$$
$$+\rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)Q_{m,r+1}(\xi,s,\varepsilon)d\xi = \varepsilon^{m+1-r}F_{4m,r+1}(t,s,\varepsilon)$$
$$-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)R'_{jim,r+1}(t,s,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)R_{jim,r+1}(t,s,\varepsilon) + M_{jim,r+1}(t,s,\varepsilon) +$$
$$+\rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)R_{jim,r+1}(\xi,s,\varepsilon)d\xi = \varepsilon^{m+1-r}F_{5jim,r+1}(t,s,\varepsilon), \quad j=\overline{1,r}, \quad i=\overline{1,r+1-j},$$
$$-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)R'_{j,r+2-j,m,r+1}(t,s,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)R_{j,r+2-j,m,r+1}(t,s,\varepsilon) + K(t,s,\varepsilon)K_{jm,r+1}(s,\varepsilon) +$$
$$+\rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)R_{j,r+2-j,m,r+1}(\xi,s,\varepsilon)d\xi = \varepsilon^{m+1-r}F_{6j,r+2-j,m,r+1}(t,s,\varepsilon), \quad j=\overline{1,r}.$$

Тогда $y(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\varepsilon^h y'(t,\varepsilon) = (\Lambda_{m,r+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1-r}F_{1m,r+1}(t,\varepsilon))y(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m-r}\overline{F}_{m,r+1}(t,s,\varepsilon), \quad (8)$$

где

$$\overline{F}_{m,r+1}(t,s,\varepsilon) = \overline{B}(t,\varepsilon)U^{-1}_{m,r+1}(t,\varepsilon)\Bigg(F_{2m,r+1}(t,\varepsilon) + F_{3m,r+1}(t,s,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{r}F_{4im,r+1}(t,\varepsilon) +$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r+1-j}F_{5ijm,r+1}(t,s,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r}F_{6j,r+2-j,m,r+1}(t,s,\varepsilon)\Bigg).$$

Заменим систему дифференциальных уравнений (8) эквивалентной системой интегральных уравнений и при выполнении условия

$$\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{h}\varepsilon^r\Lambda_{m1}^{(r)}(t,\varepsilon)\le 0$$

методом последовательных приближений докажем, что $y(t,\varepsilon)$ представима в виде

$$y(t,\varepsilon)=\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{r\Delta}^{t}\Lambda_{m,r+1}(s,\varepsilon)ds\right)c_{r+1}+\varepsilon^{m-r-h}\alpha'_{m,r+1}(t,s,\varepsilon), \tag{9}$$

где c_{r+1} — постоянный вектор,

$$\alpha'_{m,r+1}(t,s,\varepsilon)=\int_{r\Delta}^{t}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t}\Lambda_{m,r+1}(s,\varepsilon)ds\right)(\varepsilon F_{1m,r+1}(t,\varepsilon)+\overline{F}_{m,r+1}(t,s,\varepsilon))dt_1.$$

Подставляя (9) в (7), при $r\Delta\le t\le(r+1)\Delta$ получим (4), где

$$\overline{\alpha}_{m,r+1}(t,s,\varepsilon)=U_{m,r+1}(t,\varepsilon)\alpha'_{m,r+1}(t,s,\varepsilon)+\rho\int_0^L Q_{m,r+1}(\xi,s,\varepsilon)\alpha'_{m,r+1}(s,\xi,\varepsilon)d\xi.$$

В случае кратных корней уравнений (2), (3) имеет место

Теорема 2. *Если выполняются условия* 1)–4) *и условия*

5) *уравнение* (2) *имеет корень* $\omega_0(t)$ *кратности* n *с одним* n*-кратным элементарным делителем*;

6) *уравнение* (3) *имеет корень* $\overline{\omega}_0(t)$ *кратности* n *с* n*-простыми элементарными делителями*;

7) *выполняются соотношения*

$$t^k+\varepsilon\overline{\omega}(t)\ne 0\ \ \forall t\in[0;L],\quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0];\quad \{C(t)\}_{n1}\ne 0,$$
$$C(t)=-S_1(t)A_1(t)T_1(t)+t^kT_1^{-1}(t)T_1'(t);$$

8) *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{hn}\mu^r\Lambda_{m1}^{(r)}(t,\varepsilon)\le 0,$$

то система интегро-дифференциальных уравнений (1) *при* $(r-1)\Delta\le t\le r\Delta$ $(r\ge 1)$ *имеет решение, которое можно представить в виде*

$$x(t,\varepsilon)=U_{mr}(t,\mu)\exp\left(\mu^{-nh}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{t}\Lambda_{mr}(t,\mu)dt\right)c_r+\rho\int\limits_0^L Q_{mr}(t,s,\mu)\exp\left(\mu^{-nh}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{s}\Lambda_{mr}(t,\mu)dt\right)c_rds+$$
$$+\sum_{i=1}^{r-1}K_{imr}(t,\mu)\exp\left(\mu^{-nh}\int\limits_{(i-1)\Delta}^{t-(r-i)\Delta}\Lambda_{mi}(s,\mu)ds\right)c_i+p_{mr}(t,\mu)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{r+1-j}c_j\rho\int\limits_0^L R_{jimr}(t,s,\mu)\exp\left(\mu^{-nh}\int\limits_{(j-1)\Delta}^{s-(i-1)\Delta}\Lambda_{mi}(\tau,\mu)d\tau\right)ds+\mu^{\frac{m-rn-hn+1}{n}}\overline{\alpha}_{mr}(t,s,\mu),$$

где $\mu=\sqrt[n]{\varepsilon}$, c_j $(j=\overline{1,r})$ — *постоянные векторы,* $\overline{\alpha}_{mr}(t,s,\mu)$ — *вектор, ограниченный в окрестности* $\varepsilon=0$, *а матрицы* $R_{jimr}(t,s,\mu)$, $K_{imr}(t,\mu)$, $\Lambda_{mr}(t,\mu)$, $Q_{mr}(t,s,\mu)$, $U_{mr}(t,\mu)$ *и вектор* $p_{mr}(t,\mu)$ *допускают представление по степеням параметра* μ *и имеют разложения, аналогичные* (5).

Литература

1. Шкиль Н.И. *О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Киев, 1968. – 420 с.
2. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А. *Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – Киев: Наук. думка, 1981. – 294 с.
3. Шкиль Н.И. *Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применения.* – Киев, 1996. – 207 с.
4. Шкиль Н.И. *О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка* // Archivum. math. – Brno, 1987. – V. 23. – № 1. – P. 53–62.

Кировоградский педагогический университет

Поступили
полный текст 22.01.2002
краткое сообщение 20.01.2003