ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.956

В.С. МОКЕЙЧЕВ

ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной статье речь пойдет о существовании обобщенных ненулевых решений задачи

$$P(D)u = (\mu + g(x))u, \quad x \in R^n, \quad u \in L^2(R^n), \tag{1}$$

в которой $P(iz) \geq 0$ — символ псевдодифференциального оператора ([1], с. 57), $z \in R^n$, не зависящий от x и удовлетворяющий условиям

$$P(iz) = P(-iz) \quad \text{для всех} \quad z;$$
$$(P(iz) - \mu)^{-1} \in L^2(R^n), \quad \text{если} \quad \mu < 0;$$
$$\int |P(iz) - \mu|^{-2} dz \to 0, \quad \text{если} \quad \mu \to -\infty;$$
$$\int_{|z|<\delta} |P(iz) - \mu|^{-1} dz \to +\infty \quad \text{при малых} \quad \delta > 0, \ \ \mu \to -0.$$

Здесь и далее i — мнимая единица, $D = (D_1, \dots, D_n)$, D_j — символ обобщенной производной по x_j, μ — спектральный параметр, $g(x)$ — вещественная, ограниченная в существенном и равная нулю вне множества Ω функция, Ω измеримо и фиксировано; если особо не оговорено, то интегрирование производится по всем $z \in R^n$ по направлению от $-\infty$ до $+\infty$.

Для приложений важно знать, имеет ли задача (1) хотя бы одно собственное значение. Легко строятся примеры (с конкретными $P(D)$, n, Ω и $g(x)$, не зависящей от $x \in \Omega$) как без собственных значений, так и с наличием их. Однако при сделанных выше предположениях поставленная проблема не решена.

Задача (1) самосопряжена при вещественных μ. Тем не менее это не оказывает существенного влияния на проблему существования собственных значений. Дело в том, что резольвента оператора, порожденного задачей (1), не является вполне непрерывным оператором.

Цель статьи: доказать ниже сформулированную теорему и применить ее к решению задачи из теории волноводов.

Теорема. *Если $g(x) \leq 0$, то задача* (1) *не имеет отрицательных собственных значений. В случае $g(x) > 0$, $x \in \Omega$, и ограниченности множества Ω задача* (1) *имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение.*

Применим теорему к задаче из теории волноводов. Волновод является композиционным материалом с характеристиками c_1 в Ω и c_2 вне Ω. В каждой из областей изучаемого объекта выполняются равенства

$$-\Delta u = (\mu + c_j)u, \quad x \in \Omega_j,$$

где $\Omega_1 = \Omega$ и Ω_2 — дополнение к Ω. На границе Γ области Ω должны быть выполнены такие условия стыковки, чтобы функция u, $x \in R^n$, была обобщенным решением задачи

$$-\Delta u = (\mu + g(x))u, \quad x \in R^n, \quad u \in L^2(R^n), \tag{2}$$

в которой $g(x) = c_j$ при $x \in \Omega_j$.

В случае $n = 2$ и специальной области Ω ответ на вопрос о собственных значениях задачи (2) получен в [2]. Там же можно подробнее познакомиться с задачей из теории волноводов. Сформулированная теорема перекрывает утверждение из [2]. Чтобы ее применить, достаточно положить $P(iz) = z_1^2 + z_2^2$, $g(x) = 0$ вне Ω, $g(x) = c_1 - c_2$ при $x \in \Omega$. Почти очевидно, что все предположения теоремы выполняются при $n \le 3$, следовательно, *при* $c_1 \le c_2$ *задача из теории волноводов не имеет отрицательных собственных значений, в случае* $c_1 > c_2$ *и ограниченности множества* Ω *она имеет отрицательное собственное значение*. Если оба множества Ω_j неограничены, то задача (2) может не иметь собственных значений. В этом легко убедиться в случае $\Omega_1 = R_+$.

Осталось доказать теорему. Предварительно докажем ряд лемм. Будем использовать преобразование Фурье $(Fu(x))(z)$ распределений $u(x)$ умеренного роста ([1], с. 18). Хорошо известны равенство Парсеваля

$$\int (Fu(x))(z)(Fv(x))(z)dz = \int u(x)v(-x)dx,$$

и теорема Планшереля

$$(Fv(x))(z) \in L^2(R^n) \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ v(x) \in L^2(R^n), \quad \|v(x)\| = \|(Fv(x))(z)\|,$$

справедливые при всех $u(x)$ и $v(x) \in L^2(R^n)$.

Здесь и далее, если особо не оговорено, $\|\ \|$ — норма в пространстве $L^2(R^n)$.

Лемма 1. *Пусть* $\mu < 0$. *Задача* (1) *имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ненулевое решение имеет задача*

$$v(x) = \int_\Omega g(t)v(t)h(x-t,\mu)dt, \quad v(x) \in L^2(\Omega), \tag{3}$$

где $h(x,\mu) \in L^2(R^n)$ — *функция, преобразование Фурье которой совпадает с* $(P(iz)-\mu)^{-1}/\sqrt{2\pi}$.

Доказательство. Необходимость. Переходя в (1) к преобразованию Фурье, получим

$$(P(iz) - \mu)(Fu(x))(z) = (F(g(x)u(x)))(z) \in L^2(R^n).$$

Отсюда следует, что интеграл $\int (Fu(x))(z)\exp(ixz)dz$ абсолютно сходится. Здесь и далее $ixz = (ix_1z_1, \ldots, ix_nz_n)$. Из последних соотношений получаем

$$u(x) = (2\pi)^{-1/2}\int (Fu(x))(z)\exp(ixz)dz = \int (F(g(t)u(t)))(z)(F_t h(x+t,\mu))(z)dz,$$

где запись F_t означает, что преобразование Фурье вычисляется по t. Отсюда в силу равенства Парсеваля следует

$$u(x) = \int g(t)u(t)h(x-t,\mu)dt.$$

Так как $g(t) = 0$ вне Ω, то $u(x)$, $x \in \Omega$, — решение задачи (3). Если бы $u(t) = 0$ в Ω, то получили бы $g(t)u(t) = 0$ в R^n, и в силу последнего равенства $u(x) = 0$.

Достаточность. Пусть $v(x)$ — ненулевое решение задачи (3). Рассмотрим новую задачу

$$P(D)u = \mu u + g(x)f(x), x \in R^n, \quad u \in L^2(R^n), \tag{4}$$

в которой $f(x) = v(x)$ при $x \in \Omega$ и $f(x) = 0$ вне Ω. Так как $g(x)f(x) \in L^2(R^n)$, то, переходя в (4) к преобразованию Фурье, получим

$$(P(iz) - \mu)(Fu(x))(z) = (F(g(x)f(x)))(z) \in L^2(R^n);$$

$$u(x) = \int (F(g(x)f(x)))(z)(F_t h(x+t,\mu))(z)dz = \int g(t)f(t)h(x-t,\mu)dt,$$

т. е. решение задачи (4) существует и единственно. В частности, при $x \in \Omega$ имеем

$$u(x) = \int_\Omega g(t)v(t)h(x-t,\mu)dt = v(x).$$

Учитывая это равенство и (4), получим $g(x)f(x) = g(x)u(x)$, т. е. u — решение задачи (1). $\square$

Обозначим при $\mu < 0$ через $A(\mu)$ интегральный оператор

$$A(\mu)w = (g(x))^{1/2}\int_\Omega (g(t))^{1/2}w(t)h(x-t,\mu)dt, \quad w \in L_b^2(\Omega),$$

где индекс указывает на то, что рассматриваются только вещественные функции.

Лемма 2. *При каждом $\mu < 0$ оператор $A(\mu)$ имеет собственные значения $a_j(\mu)$:*

$$|a_1(\mu)| > |a_2(\mu)| > \cdots,$$

которым соответствуют собственные функции

$$f_{(r)}(x,\mu), \quad r = n_{k-1}+1,\ldots,n_k, \quad k = 1,2,\ldots,$$

образующие ортонормированный базис в $L_b^2(R^n)$, где $(n_k - n_{k-1})$ — кратность собственного значения $a_k(\mu)$.

Доказательство. Напомним, что оператор $A(\mu)$ определен только при $\mu < 0$. Так как $P(iz) = P(-iz)$, то преобразования Фурье функций $h(t,\mu)$, $h(-t,\mu)$ совпадают. Поэтому $h(t,\mu) = h(-t,\mu)$, ядро $(g(x)g(t))^{1/2}h(x-t,\mu)$ интегрального оператора $A(\mu)$ и сам оператор самосопряжены. В силу ограниченности Ω ядро принадлежит $L_b^2(\Omega^2)$, что гарантирует вполне непрерывность оператора $A(\mu)$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\mu < 0$, $g(x) > 0$ и Ω ограничено. Тогда $a_k(\mu) > 0$.*

Доказательство. Из равенства

$$a_k(\mu)f_{(r)}(x,\mu) = A(\mu)f_{(r)}(x,\mu), \quad r = n_{k-1}+1,\ldots,n_k,$$

следует

$$a_k(\mu) = \int_\Omega (g(x))^{1/2}f_{(r)}(x,\mu)\left[\int_\Omega (g(t))^{1/2}f_{(r)}(t,\mu)h(x-t,\mu)dt\right]dx.$$

Так как $g(t) = 0$ вне Ω, то в силу равенства Парсеваля получим

$$a_k(\mu) = \int (g(x))^{1/2}f_{(r)}(x,\mu)\left[\int (F((g(t))^{1/2}f_{(r)}(t,\mu)))(z)(F_t h(x-t,\mu))(z)dz\right]dx.$$

При этом индекс t указывает на то,что преобразование Фурье вычисляется по t. Однако $(F_t h(x-t,\mu))(z) = (P(iz)-\mu)^{-1}\exp(ixz)$, поэтому, учитывая вещественность функций $g(x)$, $f_{(r)}(x,\mu)$, получим

$$a_k(\mu) = \int |(F((g(x))^{1/2}f_{(r)}(x,\mu)))(z)|^2(P(iz)-\mu)^{-1}dz > 0. \quad \square$$

Лемма 4. *Если Ω ограничено и $\mu < 0$, то $a_k(\mu)$ непрерывно зависят от μ, причем $a_k(\mu) \to 0$ при $\mu \to -\infty$.*

Доказательство. Из известных результатов ([3], с. 391–396) для самосопряженных вполне непрерывных операторов следует, что $a_k(\mu)$ непрерывно зависят от μ, причем

$$|a_1(\mu)| = \|A(\mu)\| = \left(\iint g(x)g(t)(h(x-t,\mu))^2dx\,dt\right)^{1/2}.$$

Однако $g(x)$ ограничена в существенном, поэтому

$$|a_k(\mu)|^2 < d_1\left[\int (h(x,\mu))^2 dx\right]\int g(t)dt = d_2\int (P(iz)-\mu)^{-2}dz \to 0 \ \text{ при } \ \mu\to-\infty. \quad \square$$

Лемма 5. *Пусть Ω ограничено, $g(x) > \nu > 0$ при $x\in\Omega$ и $\mu\to -0$. Тогда $a_1(\mu)\to+\infty$.*

Доказательство. Так как оператор $A(\mu)$ самосопряжен и вполне непрерывен, то в силу общих результатов ([3], с. 249–251)

$$\|A(\mu)\| = \sup|\langle A(\mu)y, y\rangle|,$$

где sup вычисляется по всем $y\in L_b^2(\Omega)$, для которых $\|y\|_\Omega = 1$. Отсюда следует

$$|a_1(\mu)| \ge \left|\int (g(x))^{1/2}y(x)\left[\int ((g(t))^{1/2}y(t))h(x-t,\mu)dt\right]dx\right|.$$

В силу равенства Парсеваля интеграл в квадратных скобках равен

$$\int (F((g(t))^{1/2}y(t)))(z)\exp(ixz)(P(iz)-\mu)^{-1}dz.$$

Поэтому, учитывая вещественность функций $g(t)$, $y(t)$, имеем

$$|a_1(\mu)| \ge \int\left|\int_\Omega (g(t))^{1/2}y(t)\exp(itz)dt\right|^2|P(iz)-\mu|^{-1}dz.$$

Положим в этом неравенстве $y(t) = d(g(t))^{-1/2}$ и d выберем так, чтобы $\|y(t)\|_\Omega = 1$. Тогда

$$|a_1(\mu)| \ge d\int_{|z|<\delta}\left|\int_\Omega \exp(itz)dt\right||P(iz)-\mu|^{-1}dz.$$

Если δ достаточно мало, то $\left|\int\limits_\Omega \exp(ixz)dz\right| \ge d_1 > 0$. Поэтому $|a_1(\mu)| \ge d_2\int\limits_{|z|<\delta}|P(iz)-\mu|^{-1}dz \to +\infty$, если $\mu\to-0$. $\square$

Доказательство теоремы. На первом этапе предположим, что $g(x)\ge\nu>0$ при всех $x\in\Omega$. В силу лемм 2–5 $a_1(\mu_0) = 1$ при некотором $\mu_0 < 0$. Если $f_1(x)$ — собственная функция оператора $A(\mu_0)$, соответствующая собственному значению $a_1(\mu_0)$, то $v(x) = f_1(x)(g(x))^{-1/2}\in L^2(\Omega)$ — ненулевое решение уравнения (3) при $\mu=\mu_0$, т. е. μ_0 — собственное значение задачи (1).

В общем случае положим $g(\nu,x) = g(x)$, если $x\in\Omega$ и $g(x)\ge\nu$; $g(\nu,x)=\nu$ при $x\in\Omega$ и $g(x)\in(0,\ \nu)$. Ненулевые решения уравнения

$$v(\nu,x) = \int_\Omega g(\nu,x)h(x-t,\mu_0(\nu))v(\nu,t)dt \tag{5}$$

выберем так, чтобы $\|v(\nu,x)\|_\Omega = 1$. Интегральные операторы, определяемые правыми частями в (3), (5), обозначим соответственно $B(\mu)$, $B(\nu,\mu_0(\nu))$. Так как Ω ограничено, $\{g(\nu,x)\}$ равномерно сходится к $g(x)$ и $\{h(x,\mu_0(\nu))\}$ по норме сходится к $h(x,\mu_0)$, то

$$\|B(\mu_0) - B(\nu,\mu_0(\nu))\| \to 0 \ \text{ при } \ \mu_0(\nu)\to\mu_0. \tag{6}$$

Учитывая выбор $v(\nu,x)$ и свойство $\|h(x,\mu)\|\to 0$, если $\mu\to-\infty$, легко докажем ограниченность $\{\mu_0(\nu)\}$. Поэтому существуют μ_0 и $\nu_j\to 0$, при которых $\mu_0(\nu_j)\to\mu_0$. Оператор $B(\mu_0)$ вполне непрерывен. В этом случае, как известно, множество $\{B(\mu_0)v(\nu,x)\}$ содержит сходящуюся по норме подпоследовательность $\{B(\mu_0)v(\nu_{j_1},x)\}$, причем $\mu_0(\nu_{j_1})\to\mu_0$. Поэтому из (5), (6) следует, что $\{v(\nu_{j_1},x)\}$ по норме сходится к $v(x)$, причем $\|v(x)\|_\Omega = 1$. Тогда $\{B(\nu,\mu_0(\nu_{j_1}))v(\nu_{j_1},x)\}$ по норме сходится к $B(\mu_0)v(x)$ и выполняется равенство $v(x) = B(\mu_0)v(x)$, т. е. при $\mu=\mu_0$ уравнение (3) имеет ненулевое решение. $\square$

Литература

1. Егоров Ю.В. *Линейные дифференциальные уравнения главного типа.* – М.: Наука, 1984. – 359 с.
2. Карчевский Е.М. *Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 10–17.
3. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.*– 2-е изд., М.: Мир, 1979. – 587 с.

Казанский государственный университет

Поступила
24.11.2000