ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 517.968:519.6

А.В. ОЖЕГОВА

О ПРЯМЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Работа посвящена теоретическому обоснованию некоторых аппроксимативных методов решения слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода специального вида в пространстве непрерывных функций. Численному решению интегральных уравнений с логарифмическими ядрами было посвящено много работ (см., напр., [1]–[4] и библиографию в них). Интегральное уравнение с двумя логарифмическими особенностями было рассмотрено в [5], [6], где к нему был применен метод ортогональных многочленов.

Исследования в этой работе ведутся на основе результатов [7], [1]. Используется предложенный в [2] подход, основанный на отыскании корректной постановки задачи с последующим применением аппроксимативных методов. Установлены существование, единственность и равномерная сходимость приближенных решений, полученных методами ортогональных многочленов, коллокации и механических квадратур, к точному при определенных условиях на регулярное ядро и правую часть.

1. *Структура обратного оператора и корректность задачи.* Рассмотрим интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью вида

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln\left|\frac{\tau-t}{\tau+t}\right| \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau + \int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = f(t), \tag{1}$$

где $g(t,\tau)$, $f(t)$ — непрерывные функции, $\varphi(t)$ — искомая функция, $-1 \le t \le 1$, а слабо сингулярный интеграл

$$S\varphi = S(\varphi;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln\left|\frac{\tau-t}{\tau+t}\right| \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau$$

понимается как несобственный.

Пусть

$$I\varphi = I(\varphi;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

— сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Обозначим через $V_\rho = V_\rho[-1,1]$ линейное пространство непрерывных функций $\varphi(t)$, для которых сингулярный интеграл $\rho^{-1}I(\rho\varphi)$ является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|\varphi\|_{V_\rho} = \|\varphi\|_C + \|\tfrac{1}{\rho}I(\rho\varphi)\|_C,$$

где $\rho(t) = (1-t^2)^{-1/2}$. Пусть $V_q^1[-1,1]$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, для которых сингулярный интеграл $I(q\varphi')$ является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|\varphi\|_{V_q^1} = \|\varphi\|_C + \|q\varphi'\|_C + \|I(q\varphi')\|_C,$$

где $q(t) = 1/\rho(t) = (1-t^2)^{1/2}$. Обозначим через $W^rH_\alpha = W^rH_\alpha[-1,1]$ пространство функций, имеющих непрерывные производные до r-го ($r \ge 0$ целое) порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha \le 1$.

Решение характеристического слабо сингулярного интегрального уравнения

$$S\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln\left|\frac{\tau - t}{\tau + t}\right| \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = f(t), \quad -1 \le t \le 1,$$

будем искать в пространстве $V_\rho[-1,1]$ при правой части $f \in V_q^1[-1,1]$.

Теорема 1. *Оператор $S : V_\rho \to \overline{V}_q^1$ непрерывно обратим, обратный оператор определяется по любой из формул*

$$S^{-1}(f;t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)c_{2k+1}^T(f)T_{2k+1}(t), \quad c_k^T(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}T_k(\tau),$$

$$S^{-1}(f;t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}^U(f')T_{2k+1}(t), \qquad c_k^U(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\tau^2}f(\tau)U_k(\tau)d\tau,$$

$$S^{-1}(f;t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-t^2}f'(t)}{\tau - t}dt,$$

при этом

$$\|S^{-1}\|_{\overline{V}_q^1 \to V_\rho} \le \frac{1}{2},$$

где $\overline{V}_q^1$ — пространство нечетных функций из V_q^1, $T_k(t)$, $U_k(t)$ — многочлены Чебышева первого и второго родов соответственно.

Запишем интегральное уравнение (1) в операторном виде

$$K\varphi \equiv S\varphi + G\varphi = f, \quad \varphi \in X, \quad y \in Y,$$

где

$$G\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau.$$

Пусть $X = V_\rho[-1,1], Y = \overline{V}_q^1[-1,1]$. Из теоремы 1 в силу известных результатов (см., напр., [8]) для операторных уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода в банаховых пространствах, следует

Теорема 2. *Пусть ядро $g(t,\tau)$ — нечетная функция по переменной t и оператор $G : X \to Y$ вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1)*, имеет только нулевое решение, то оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим.*

В дальнейшем всюду будем считать, что уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве $V_\rho[-1,1]$ при любой правой части $f \in \overline{V}_q^1[-1,1]$, т. е. задача решения уравнения (1) корректно поставлена.

2. *Метод ортогональных многочленов.* Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\varphi_n(\tau) = \sum_{i=0}^{k}\alpha_{2i+1}T_{2i+1}(\tau), \quad k = \left[\frac{n}{2}\right], \tag{2}$$

n нечетное, а неизвестные коэффициенты определим из следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_{2i+1}b_{2i+1,2j+1} = f_{2j+1}, \quad j = \overline{0,k}, \tag{3}$$

где

$$b_{ij} = -\frac{2}{i} + \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{g(t,\tau)T_i(\tau)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau^2}}d\tau\, dt, \quad f_j = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Теорема 3. *Пусть функции* $f(t) \in W^{r+1}H_\alpha$, $g(t,\tau) \in W^{r+1}H_\alpha$ *по переменной* t *равномерно относительно* τ, $0 < \alpha \le 1$, $r \ge 0$. *Тогда при всех* $n \ge n_0$ *СЛАУ* (3) *имеет единственное решение* $\{\alpha^*_{2i+1}\}_0^k$, *и приближенные решения*

$$\varphi^*_n(\tau) = \sum_{i=0}^{k} \alpha^*_{2i+1} T_{2i+1}(\tau)$$

сходятся равномерно к точному $\varphi^* = K^{-1}f$ *со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi^*_n\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

3. *Метод коллокации.* Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде (2). Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_{2i+1}\}_0^k$, $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, определим из следующей СЛАУ:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i+1} b_{2i+1,j} = f_j, \quad j = \overline{0,k}, \tag{4}$$

где

$$b_{ij} = -\frac{2}{i} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{g(t_j,\tau)T_i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau, \quad f_j = f(t_j), \quad t_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi, \quad j = \overline{0,n}.$$

Теорема 4. *Пусть функции* $g(t,\tau) \in W^{r+1}H_\alpha$ *по переменной* t *равномерно относительно* τ, $f(t) \in W^{r+1}H_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, $r \ge 0$. *Тогда при всех* $n \ge n_0$ *СЛАУ* (4) *имеет единственное решение* $\{\alpha^*_{2i+1}\}_0^k$, *и приближенные решения* $\varphi^*_n(\tau)$ *сходятся к точному решению* $\varphi^* = K^{-1}f$ *равномерно со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi^*_n\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

4. *Метод механических квадратур.* Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде (2). Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_{2i+1}\}_0^k$, $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, определим из следующей СЛАУ:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i+1}\left\{-\frac{2}{2i+1}T_{2i+1}(t_j) + \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{k} g(t_j,t_m)T_{2i+1}(t_m)\right\} = f(t_j), \quad j = \overline{0,k}. \tag{5}$$

Теорема 5. *Пусть ядро* $g(t,\tau) \in W^{r+1}H_\alpha$ *по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть* $f(t) \in W^{r+1}H_\alpha$, $r \ge 0$, $0 < \alpha \le 1$. *Тогда при всех* $n \ge n_0$ (n_0 *определяется свойствами функции* $g(t,\tau)$) *СЛАУ* (5) *имеет единственное решение* $\{\alpha_{2i+1}\}_0^k$, $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, *и приближенные решения* $\varphi^*_n(t)$ *сходятся к точному решению* $\varphi^*(t)$ *равномерно со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi^*_n\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I-го рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 285 с.
2. Ожегова А.В. *Равномерные приближения решений слабосингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 92 с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.Н., Назарчук З.П. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
4. Попов Г.Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких вложений и подкреплений.* – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. Нореддин М.М., Тихоненко Н.Я. *Приближенное решение интегральных уравнений первого рода методом ортогональных многочленов* // Укр. матем. журн. – 1988. – Т. 40. – № 1. – С. 124–127.

6. Нореддин М.М.,Тихоненко Н.Я. *О сходимости метода ортогональных многочленов приближенного решения интегральных уравнений первого рода с II-ядрами* // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43. – № 2. – С. 223–229.
7. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Казанский государственный университет

Поступила 09.12.1998