ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 512.926

В.П. ДЕРЕВЕНСКИЙ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основным методом решения систем матричных алгебраических линейных левосторонних уравнений (СМАЛЛУ)

$$A_i^j X_j = B_i, \quad i,j = \overline{1,N}, \tag{1}$$

где по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование, а A_i^j и B_i принадлежат M_n (множеству квадратных матриц в R^n), как известно, является "обобщенный алгоритм Гаусса" ([1], с. 55), к сожалению, не дающий в общем случае формул для выражения X_j через данные матричные параметры. Ниже предлагается способ определения таких формул.

Введем несколько понятий.

Определение 1. Левым оператором Гаусса невырожденного элемента матричной последовательности $(A_i,\ i = \overline{1,N})$ называется оператор $\Gamma(A_i)$, действующий на другую матричную последовательность (Y_i) по правилу

$$\Gamma(A_i)Y_j = Y_j - A_j(A_i)^{-1}Y_i, \quad |A_i| \neq 0.$$

Определение 2. Произведением левых операторов Гаусса называется

$$\Gamma(B_k)\Gamma(A_i)Y_j = \Gamma(\Gamma(A_i)B_k)(\Gamma(A_i)Y_j).$$

Так как $\Gamma(A_i^j)A_k^j = A_k^j - A_k^j(A_i^j)^{-1}A_i^j = 0$, то введенный оператор осуществляет "обобщенный алгоритм Гаусса" решения СМАЛЛУ.

Если матрица A_1^1 в системе (1) невырожденная (в противном случае производится перенумерация уравнений и неизвестных), то последовательное применение $\Gamma(A_1^1)$ ко всем уравнениям, начиная со второго, обращает в нуль в них все коэффициенты при X_1, приводя к виду

$$A_1^j X_j = B_1; \quad \Gamma(A_1^1)A_l^k X_k = \Gamma(A_1^1)B_l, \quad k,l = \overline{2,N}.$$

Если матрица $\Gamma(A_1^1)A_2^2$ обратима, то, преобразуя с 3-го по последнее уравнения этой системы оператором $\Gamma(\Gamma(A_1^1)A_2^2)$ и т. д., получаем верхнетреугольную форму системы (1)

$$A_i^{*j} X_j = B_i^*, \quad j = \overline{i,N}, \tag{2}$$

в которой в силу определения 2 матричные параметры преобразуются по закону

$$B_i^* = \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(A_k^k)B_i, \quad \prod_{i=1}^{N} A_i = A_N A_{N-1} \ldots A_1.$$

Разумеется, согласно определению 1 триангуляция достижима лишь в случае невырожденности всех параметров операторов Гаусса. В связи с этим возникает необходимость ввести аналогичное скалярному случаю

Определение 3. Система (1) называется невырожденной, если существует такая нумерация индексов i и j, для которой матрица

$$D(A) = A_1^1 \prod_{i=2}^{N-1} \Big(\prod_{k=i-1}^{1} \Gamma(A_{i-k}^{i-k}) A_i^i \Big), \quad A = (A_i^j),$$

является невырожденной,

$$d(A) = |D(A)| \neq 0. \tag{3}$$

Таким образом, если система (1) является невырожденной, то она триангулируется в форме (2) "прямым ходом" обобщенного алгоритма Гаусса. "Обратный ход", т. е. диагонализация системы, осуществляется введенным оператором Гаусса в обратном порядке с использованием операторов $\Gamma(A_i^{*i})$ $(i = \overline{N, 2})$. Так как при этом не преобразуются диагональные матрицы полученной системы, то (2) диагонализируется в форме

$$A_i^{*i} X_i = \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(A_\tau^{*\tau}) B_i^*, \tag{4}$$

что в силу условия (3) позволяет записать неизвестные матрицы в виде

$$X_i = (A_i^{*i})^{-1} \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(A_\tau^{*\tau}) B_i^*.$$

Подставляя сюда A_i^{*i}, имеем

$$X_i = \Big[\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(A_k^k) A_i^i \Big]^{-1} \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(A_\tau^\tau) \Big(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(A_k^k) B_i \Big). \tag{5}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Перенумерацией уравнений и неизвестных невырожденной системы* (1) *можно привести ее решение к виду* (5).

Предложенный метод решения матричных линейных систем с односторонним умножением может быть представлен в более компактной форме следующим образом.

Определение 4. Верхним триангулятором системы (1) называется оператор T, действующий на блочную $(N \times N)$-мерную матрицу $A = (A_i^j)$ как диагональная операторная матрица, диагональными элементами которой являются

$$T_i^i = \prod_{k=i-1}^{1} \Gamma(A_k^k), \quad T_1^1 = E,$$

где E — тождественный оператор, а нижним триангулятором системы (1) — аналогичный оператор T^*, диагональными элементами которого являются

$$T_i^{*i} = \prod_{k=N}^{i+1} \Gamma(A_k^k), \quad T_N^N = E.$$

Процедуры получения треугольной и диагональной форм (2) и (4) системы (1) сводятся к последовательному "умножению" слева обеих сторон ее в блочно-матричной записи

$$AX = B, \quad A = (A_i^j), \quad B = (B_i), \quad X = (X_i)$$

на T и T^*. "Умножение" на T определило (2), а последующее действие оператора T^* определило (4): $T^*TAX = T^*TB$. Следовательно,

$$X = (T^*TA)^{-1}(T^*TB).$$

Из сопоставления этой формулы с (5) видно, что $(T^*TA)^{-1} = ((A_i^{*i})^{-1})$, $TB = (B_i^*)$, $T^*TB = \Big(\prod\limits_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(A_\tau^{*\tau}) B_i^*\Big)$.

Так как определение 3 и теорема 1 формулируются с точностью до способа нумерации матриц A_i^j, то перестановка операторов T и T^*, очевидно, допустима. Так что вполне естественно считать основной верхнетреугольную форму преобразованной системы (1), получаемую с помощью оператора T, как это исторически сложилось при использовании метода Гаусса решения скалярных систем. Однако диагонализацию можно проводить и в обратном порядке, преобразуя сначала систему (1) к нижнетреугольному виду оператором T^*, а затем оператором T — к диагональному виду $X = (TT^*A)^{-1}(TT^*B)$.

Аналогичные рассуждения справедливы, разумеется, и для систем матричных алгебраических правосторонних линейных уравнений (СМАПЛУ)

$$X_i A_j^i = B_j, \quad i,j = \overline{1,N}, \tag{6}$$

для формулировки которых необходимо несколько изменить введенные понятия.

Определение 5. Правым оператором Гаусса невырожденной матрицы A_i из последовательности (A_j) называется оператор $\Gamma(A_i)$, действующий на другую матричную последовательность (Y_j) по правилу

$$Y_j \Gamma(A_i) = Y_j - Y_i (A_i)^{-1} A_j.$$

Определение 6. Произведением правых операторов Гаусса называется

$$Y_j \Gamma(A_i) \Gamma(B_k) = (Y_j \Gamma(A_i)) \Gamma(B_k \Gamma(A_i)). \tag{7}$$

Определение 7. Система (6) называется невырожденной, если существует такая нумерация индексов i и j, что

$$d\Big(A_1^1 \prod_{i=2}^{N-1} \Big(A_i^i \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(A_{i-k}^{i-k})\Big)\Big) \neq 0. \tag{8}$$

С учетом этих переопределений аналог теоремы 1 будет формулироваться следующим образом.

Теорема 2. *Решение невырожденной системы* (6) *при такой нумерации индексов i и j, что выполняется условие* (8), *имеет вид*

$$X_i = B_i \prod_{k=i-1}^{1} \Gamma(A_k^k) \prod_{\tau=i+1}^{N} \Gamma(A_\tau^\tau) \Big[A_i^i \prod_{k=i-1}^{1} \Gamma(A_k^k)\Big]^{-1},$$

где операторы Гаусса и их произведения определяются в (7) *и* (8).

Следует отметить, что в скалярных случаях приведенные утверждения определяют обычные способы решения алгебраических систем с неизвестными векторами столбцов и строк соответственно.

Рассмотрим более сложный случай систем матричных алгебраических линейных двусторонних уравнений (СМАЛДУ)

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{k(i,j)} A_{ijk} X_j B_{ijk} = C_i, \quad (A_{ijk}, B_{ijk}, C_i) \subset M_n, \tag{9}$$

для решения которых введем два новых определения.

Определение 8. Вектор (столбец) с компонентами $\widetilde{X}_u$ называется редуцированной матрицей $X = (x_p^q) \in M_n$ $(p,q = \overline{1,n})$, если

$$\widetilde{X}_u = \widetilde{X}_{n(p-1)+q} = x_p^q. \tag{10}$$

Определение 9. Тензорное (прямое) произведение матрицы A на транспонированную матрицу B называется их редуцентом и обозначается $R(A, B)$,

$$R(A, B) = A \otimes B'.$$

Для решения системы (9) редуцируем ее, записав в векторной форме в R^{n^2}. Для этого необходимо произвести перенумерацию (10) компонент всех матриц системы. При этом справедлива [2]

Лемма. *Двустороннее умножение матрицы X на квадратные матрицы A и B эквивалентно левому умножению редуцированной матрицы X на $R(A, B)$.*

В соответствии с этим утверждением система (9) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{N} R_{iju}^{v} \widetilde{X}_{jv} = \widetilde{C}_{iu}, \quad u, v = \overline{1, n^2}, \tag{11}$$

где $R_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{k(i,j)} R(A_{ijk}, B_{ijk})$, т. е. принимает вид системы (1) с векторными неизвестными и свободными членами, компоненты которых отмечены вторыми индексами u и v, пробегающими значения от 1 до n^2.

Объединяя пары индексов (i, u) и (j, v) в единые индексы $\alpha = N(i-1) + u$ и $\beta = N(j-1) + v$, переходом из R^{n^2} в R^{Nn^2} систему (11) можно записать как обычную скалярную линейную неоднородную систему

$$R_{\alpha}^{\beta} \widetilde{x}_{\beta} = \widetilde{c}_{\alpha}, \quad \alpha, \beta = \overline{1, Nn^2}. \tag{12}$$

Этот вид системы (9) позволяет утверждать следующее.

Теорема 3. *Для совместности системы N матричных алгебраических линейных двусторонних уравнений с неизвестными* (9), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}(R_{\alpha}^{\beta}) = \operatorname{rank}(R_{\alpha}^{\beta}, \widetilde{c}_{\alpha}).$$

При невырожденности системы (12) $\widetilde{x}_{\alpha}$ находятся любым классическим методом. Однако из-за большой размерности пространства R^{Nn^2} имеет смысл обратиться к (11), чтобы воспользоваться предложенным выше методом, который действует и в случае искомых матриц, имеющих размерность $n \times 1$. Для этого введем

Определение 10. Система (9) называется невырожденной, если при некоторой перенумерации индексов i и j $d(R) \neq 0$, $R = (R_{ij})$.

Теперь на основании теоремы 1 может быть сформулирована

Теорема 4. *Решением невырожденной матричной системы* (9) *являются матрицы X_i в R^n, компоненты которых определяются в виде*

$$x_{ip}^{q} = \widetilde{x}_{in(p-1)+q},$$

где векторы $\widetilde{x}_i$ в R^{n^2} с компонентами $\widetilde{x}_{in(p-1)+q}$ определяются как

$$\widetilde{x}_i = (R_{ii}^{*})^{-1} \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(R_{\tau\tau}^{*}) c_i^{*},$$

а $c_i^{*} = \prod\limits_{k=1}^{i-1} \Gamma(R_{kk}) c_i$.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
2. Деревенский В.П. *Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55. – № 1. – С. 35–42.

Казанская архитектурно-строительная академия

Поступила
04.12.1995