ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 514.765

О.В. ДАШЕВИЧ

КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА НА РЕГУЛЯРНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ И ИНВАРИАНТНЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ

После открытия канонических аффинорных структур [1] на регулярном Ф-пространстве G/H (обобщенном симметрическом пространстве [2]) важным является изучение согласованности таких структур с инвариантными аффинными связностями на G/H. Хорошо известно [3], что в случае однородного Ф-пространства порядка 3, допускающего каноническую почти комплексную структуру J, только каноническая связность 2-го рода [4] является одновременно согласованной с J (т. е. $\nabla J = 0$) и инвариантной как относительно действий группы G, так и относительно диффеоморфизма

$$D : G/H \to G/H : xH \to \Phi(x)H,$$

где Φ — автоморфизм группы G.

В данной статье рассматриваются произвольные регулярные Ф-пространства G/H, допускающие одну или несколько канонических аффинорных структур следующего типа: почти произведения P, почти комплексная J и f-структура в смысле Яно [5]. Такие структуры полностью определяются на G/H своими значениями в точке $p_0 = H$, а именно, операторами P_0, J_0 и f_0 соответственно [1]. Ясно, что каноническая связность 2-го рода согласована с любой из вышеуказанных структур. Мы исследуем условия интегрируемости таких структур в предположении, что она является единственной инвариантной связностью на G/H, согласованной с рассматриваемой структурой. При этом учитываем, что рассматриваемые далее тензорные поля кручения канонических аффинорных структур также инвариантны относительно G и D, а потому полностью определяются своими значениями в точке $p_0 \in G/H$.

Пусть Φ — автоморфизм связной группы Ли G. Обозначим дифференциал этого автоморфизма в точке e через φ, т. е. $\varphi = d\Phi_e$ [6]. Обозначим через G^Φ подгруппу всех точек, неподвижных при Φ, и через G_0^Φ связную компоненту единицы группы G^Φ. Пусть H — замкнутая подгруппа в G, удовлетворяющая условию $G_0^\Phi \subset H \subset G^\Phi$. Однородное пространство G/H называют однородным Ф-пространством (см. [6], [7]). Рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G линейный оператор $A_\varphi = \varphi - \mathrm{id}$ и разложение Фиттинга $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, соответствующее A_φ, где через $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$ обозначены 0-компонента и 1-компонента соответственно. Однородное Ф-пространство G/H будет называться регулярным Ф-пространством [6], [7], если $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли группы Ли H. Известно [6], что регулярное Ф-пространство G/H является однородным редуктивным пространством, и каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее автоморфизму φ, имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}.$$

1. Обозначим через θ ограничение φ на подпространство $\mathfrak{m}$, отождествленное с касательным пространством к G/H в точке p_0, и через $X_\mathfrak{m}$ проекцию вектора $X \in \mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения. Напомним, что аффинорная структура F на регулярном Ф-пространстве G/H называется канонической [1], если аффинор F_0 в точке p_0 является полиномом от θ. Отметим также тот факт [6], что канонические аффинорные структуры являются инвариантными относительно G в силу перестановочности любого автоморфизма из $\mathrm{Ad}(H)$ с оператором θ.

Теорема 1. *Пусть G/H — регулярное однородное Φ-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Каноническая связность 2-го рода на G/H является единственной почти комплексной аффинной связностью (т. е. $\nabla J = 0$), инвариантной относительно G и D, тогда и только тогда, когда для функции Номидзу α любой инвариантной на G/H связности ∇ справедливо равенство*

$$\alpha(X,Y) = J_0\alpha(X, J_0Y) \quad \text{для всех} \;\; X, Y \in \mathfrak{m}. \tag{1}$$

Доказательство. Пользуясь специальными векторными полями в окрестности точки p_0 [4], можно показать по аналогии с [3], что для аффинной связности ∇ на G/H с функцией Номидзу α условие $\nabla J = 0$ эквивалентно условию

$$J_0\alpha(X,Y) = \alpha(X, J_0Y) \quad \text{для любых} \;\; X, Y \in \mathfrak{m}. \tag{2}$$

Пусть каноническая связность 2-го рода является на G/H единственной почти комплексной связностью. Рассмотрим на G/H произвольную инвариантную аффинную связность ∇ с функцией Номидзу α и определим на G/H инвариантную аффинную связность ∇' с функцией Номидзу $\alpha'(X,Y) = \alpha(X,Y) - J_0\alpha(X, J_0Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. Легко показать, что связность ∇' является почти комплексной связностью. Следовательно, $\alpha' \equiv \{0\}$, и для функции Номидзу α связности ∇ выполняется (1).

Обратно, пусть условие (1) выполняется для всех инвариантных связностей на G/H. Рассмотрим на G/H произвольную почти комплексную связность с функцией Номидзу α. Тогда из (1) и (2) следует, что $\alpha(X,Y) = J_0\alpha(X, J_0Y) = \alpha(X, J_0(J_0Y)) = -\alpha(X,Y)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. Следовательно, $\alpha(X,Y) = 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть G/H — регулярное Φ-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Пусть далее на G/H каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной аффинной связностью, инвариантной относительно G и D. Каноническая структура J на G/H интегрируема тогда и только тогда, когда G/H является локально симметрическим пространством (т. е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$).*

Доказательство. Рассмотрим на G/H инвариантную аффинную связность ∇ с функцией Номидзу $\alpha(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{m}}$, $X, Y \in \mathfrak{m}$. Из (1) следует, что для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ имеет место равенство

$$J_0[X,Y]_{\mathfrak{m}} = -[X, J_0Y]_{\mathfrak{m}}. \tag{3}$$

Используя (3) для вычисления тензорного поля кручения $N(X,Y)$ канонической структуры J в точке p_0, получаем равенство

$$N_0(X,Y) = [J_0X, J_0Y]_{\mathfrak{m}} - J_0[J_0X, Y]_{\mathfrak{m}} - J_0[X, J_0Y]_{\mathfrak{m}} - [X,Y]_{\mathfrak{m}} = -4[X,Y]_{\mathfrak{m}},$$

из которого следует утверждение теоремы. $\square$

Как уже упоминалось выше, примером регулярного Φ-пространства с канонической почти комплексной структурой и единственной инвариантной почти комплексной связностью на нем является Φ-пространство порядка 3. Таким образом, теорема 2 является обобщением теоремы 6 работы [3] на случай произвольных регулярных Φ-пространств.

Предположим, что на $\mathfrak{m}$ существует невырожденная билинейная форма B, инвариантная относительно $\mathrm{Ad}(H)$ и оператора θ. Тогда на многообразии G/H форма B индуцирует инвариантную относительно G и D (псевдо)риманову структуру g. Известным примером такой метрики является так называемая стандартная метрика, определенная формой Киллинга B полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть ∇ — риманова связность на G/H метрики g.

Теорема 3 ([8]). *Пусть $(G/H, g)$ — (псевдо)риманово регулярное Φ-пространство, и метрика g инвариантна относительно G и D. Пусть P, J, f — канонические структуры на G/H такие, что соответствующие полиномы $P(\theta)$, $J(\theta)$, $f(\theta)$ удовлетворяют условиям*

$$\text{а)}\;\; P(\theta) = P(\theta^{-1}); \quad \text{б)}\;\; J(\theta) = -J(\theta^{-1}); \quad \text{в)}\;\; f(\theta) = -f(\theta^{-1}).$$

Тогда соответственно

1) *P есть (псевдо)риманова структура почти произведения;*
2) *J есть почти эрмитова структура;*
3) *f является метрической f-структурой.*

Легко видеть, что полиномы от θ, задающие канонические структуры на регулярном Φ-пространстве G/H произвольного порядка n [1] удовлетворяют условиям а), б) и в) теоремы 3, следовательно, канонические структуры P, J и f на периодическом (псевдо)римановом регулярном Φ-пространстве G/H согласованы с метрикой g.

Напомним (напр., [9]), что почти эрмитова структура J на (псевдо)римановом многообразии M называется приближенно кэлеровой, если $(\nabla_X J)X = 0$ для всех векторных полей X из M.

Теорема 4. *Пусть g — инвариантная относительно G и D (псевдо)риманова метрика на регулярном Φ-пространстве G/H и J — каноническая почти комплексная структура на нем, удовлетворяющая условию* б) *теоремы* 3. *Пусть каноническая связность* 2*-го рода на G/H является единственной инвариантной почти комплексной связностью. Тогда на G/H эквивалентны следующие условия:*

1) *структура J приближенно кэлерова;*
2) *G/H является естественно редуктивным пространством.*

Доказательство. Вспомним [10], что однородное пространство G/H с G-инвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется естественно редуктивным, если $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ удовлетворяет условию

$$g([X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z)_{p_0} = g(X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}})_{p_0} \quad \text{для} \;\; X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \tag{4}$$

Как и в теореме 1, можно показать, что для римановой связности ∇ на G/H с функцией Номидзу α условие $(\nabla_X J)X = 0$ эквивалентно условию $J_0\alpha(X,X) = \alpha(X, J_0X)$ для любого $X \in \mathfrak{m}$. Функция Номидзу α римановой связности ∇ определяется равенством [10]

$$2g(\alpha(X,Y), Z)_{p_0} = g(Z, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} - g(X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}})_{p_0} - g(Y, [X,Z]_{\mathfrak{m}})_{p_0}. \tag{5}$$

Используя (1) и учитывая, что структура J почти эрмитова, находим

$$g(J_0\alpha(X,X) - \alpha(X,J_0X), J_0Y)_{p_0} = g(J_0\alpha(X,X), J_0Y)_{p_0} - g(\alpha(X,J_0X), J_0Y)_{p_0} = 2g(\alpha(X,X), Y)_{p_0}.$$

Отсюда и из (5) получаем

$$2g(\alpha(X,X), Y)_{p_0} = -g(X, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} - g(X, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} = -2g(X, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0}.$$

Таким образом, на G/H имеет место равенство

$$g(J_0\alpha(X,X) - \alpha(X,J_0X), J_0Y)_{p_0} = -2g(X, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0}. \tag{6}$$

При выполнении (4) получим из (6) $g(J_0\alpha(X,X) - \alpha(X,J_0X), J_0Y)_{p_0} = 0$, откуда находим $J_0\alpha(X,X) = \alpha(X,J_0X)$.

Обратно, пусть структура J приближенно кэлерова. Тогда из (6) следует, что $g(V, [V,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} = 0$ для любых $V, Y \in \mathfrak{m}$. Выбирая вектор $V = X + Z$, для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ получим

$$g(X{+}Z, [X{+}Z, Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} = g(X{+}Z, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} + g(X{+}Z, [Z,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} = g(Z, [X,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} + g(X, [Z,Y]_{\mathfrak{m}})_{p_0} = 0,$$

откуда видно, что на G/H справедливо условие (4). $\square$

Данная теорема обобщает результат, полученный в [11] для (псевдо)римановых 3-симметрических пространств на случай, в частности, (псевдо)римановых регулярных Ф-пространств произвольного порядка n.

2. Рассмотрим теперь регулярное Ф-пространство, допускающее нетривиальную каноническую структуру почти произведения P. Тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ отвечают собственным значениям $+1$ и -1 оператора P_0. Условимся обозначать индексами 1 и 2 проекции векторов из $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ соответственно.

Теорема 5. *Каноническая структура почти произведения P однородного регулярного Ф-пространства G/H интегрируема тогда и только тогда, когда*

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_2 = [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2]_1 = \{0\}. \tag{7}$$

Доказательство. Тензор кручения N_0 структуры почти произведения P в точке p_0 с учетом разложения $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ определяется равенством

$$\begin{aligned} N_0(X,Y) = [P_0X, P_0Y]_{\mathfrak{m}} = P_0[P_0X, Y]_{\mathfrak{m}} - P_0[X, P_0Y]_{\mathfrak{m}} + [X,Y]_{\mathfrak{m}} = [P_0X, P_0Y]_1 - \\ - [P_0X,Y]_1 - [X,P_0Y]_1 + [X,Y]_1 + [P_0X,P_0Y]_2 + [P_0X,Y]_2 + [X,P_0Y]_2 + [X,Y]_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку $X = X_1 + X_2$ и $Y = Y_1 + Y_2$, то, разложив подробно каждое слагаемое из (8) и приведя подобные члены, обнаружим, что

$$N_0(X,Y) = 4([X_1, Y_1]_2 + [X_2, Y_2]_1). \tag{9}$$

Из условия (9) следует, что $N_0(X,Y) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется (7). $\square$

Лемма. *Пусть P — каноническая структура почти произведения на регулярном Ф-пространстве G/H. Тогда для функции Номидзу α инвариантной связности почти произведения ∇ (т. е. $\nabla P = 0$) регулярного Ф-пространства G/H справедливо*

$$\alpha(X, Y_i) \in \mathfrak{m}_i \quad \textit{для всех } X \in \mathfrak{m} \ \textit{ и } \ Y_i \in \mathfrak{m}_i, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Доказательство. Пользуясь специальными векторными полями в окрестности точки p_0 [4], можно показать, что на G/H для аффинной связности ∇ с функцией Номидзу α условие $\nabla P = 0$ эквивалентно условию

$$P_0\alpha(X,Y) = \alpha(X, P_0Y) \quad \text{для любых } \ X, Y \in \mathfrak{m}. \tag{11}$$

Исходя из свойств оператора P_0, получаем

$$P_0\alpha(X,Y) = \alpha(X,Y)_1 - \alpha(X,Y)_2 = \alpha(X,Y_1)_1 + \alpha(X,Y_2)_1 - \alpha(X,Y_1)_2 - \alpha(X,Y_2)_2.$$

Далее,

$$\alpha(X, P_0Y) = \alpha(X, Y_1 - Y_2) = \alpha(X,Y_1)_1 - \alpha(X,Y_2)_1 + \alpha(X,Y_1)_2 - \alpha(X,Y_2)_2.$$

Сравнивая оба выражения, находим, что $\alpha(X,Y_1)_2 = 0$ и $\alpha(X,Y_2)_1 = 0$ для любых $X \in \mathfrak{m}$ и $Y_i \in \mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, имеет место (10), и для функции Номидзу α справедливо соотношение

$$\alpha(X,Y) = \alpha(X,Y_1)_1 + \alpha(X,Y_2)_2. \quad \square \tag{12}$$

Теорема 6. *Пусть G/H — регулярное Ф-пространство, допускающее нетривиальную каноническую структуру почти произведения P. Пусть каноническая связность 2-го рода является единственной инвариантной связностью почти произведения относительно P. Тогда на G/H эквивалентны условия*

1) *каноническая структура P интегрируема*;
2) *G/H является локально симметрическим пространством.*

Доказательство. Пусть ∇ — инвариантная аффинная связность на G/H с функцией Номидзу $\alpha(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{m}}$, $X,Y \in \mathfrak{m}$. Она порождает связность $\overline{\nabla}$ с функцией Номидзу $\overline{\alpha}(X,Y) = \frac{1}{2}(P_0\alpha(X,Y) + \alpha(X,P_0Y))$, которая, как легко проверить, является связностью почти произведения, инвариантной относительно G и D. Для $\overline{\alpha}$ получаем

$$\overline{\alpha}(X,Y) = \tfrac{1}{2}(P_0[X,Y] + [X,P_0Y]) = \tfrac{1}{2}([X,Y]_1 - [X,Y]_2 + [X,Y_1] - [X,Y_2]) = \\ = [X,Y_1]_1 - [X,Y_2]_2 = [X_1,Y_1]_1 + [X_2,Y_1]_1 - [X_1,Y_2]_2 - [X_2,Y_2]_2 \equiv 0.$$

Тогда для всех $X,Y \in \mathfrak{m}_1$ $\overline{\alpha}(X,Y) = [X_1,Y_1]_1 = 0$. Так же для всех $X,Y \in \mathfrak{m}_2$ $\overline{\alpha}(X,Y) = [X_2,Y_2]_2 = 0$. Следовательно, на G/H имеет место

$$[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_i = \{0\}, \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Аналогично находим

$$[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} = \{0\}. \tag{14}$$

Учитывая (13) и (14), для всех $X,Y \in \mathfrak{m}$ получаем равенство

$$[X,Y]_{\mathfrak{m}} = [X_1,Y_1]_2 + [X_2,Y_2]_1, \tag{15}$$

которое в сравнении с (7) доказывает эквивалентность условий 1) и 2) теоремы. □

Теорема 7. *Пусть G/H — регулярное однородное Φ-пространство и P — каноническая структура почти произведения на нем. Тогда на G/H эквивалентны условия*

1) *каноническая связность 1-го рода является связностью почти произведения*;
2) *каноническая структура P интегрируема и $[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} = \{0\}$.*

Доказательство. Согласно лемме 1, если каноническая связность 1-го рода является связностью почти произведения, то для ее функции Номидзу $\alpha(\frac{1}{2})$ справедливо равенство

$$\alpha(\tfrac{1}{2})(X,Y) = \tfrac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}} = \tfrac{1}{2}([X,Y_1]_1 + [X,Y_2]_2), \quad X,Y \in \mathfrak{m}.$$

Для всех $X,Y \in \mathfrak{m}$ справедливо $[X,Y_1]_2 + [X,Y_2]_1 = 0$, или, что то же самое,

$$[X_2,Y_1]_2 + [X_1,Y_1]_2 = 0, \tag{16}$$

$$[X_1,Y_2]_1 + [X_2,Y_2]_1 = 0. \tag{17}$$

Из (16) для $X,Y \in \mathfrak{m}_1$ получим $[X_1,Y_1]_2 = 0$. Далее из (17) $[X_2,Y_2]_1 = 0$ для $X,Y \in \mathfrak{m}_2$. Следовательно, каноническая структура P интегрируема. Аналогично находим, что на G/H $[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} = \{0\}$. Обратно, пусть выполнено условие 2) теоремы. Тогда для всех $X,Y \in \mathfrak{m}$

$$\alpha(\tfrac{1}{2})(X,Y) = \tfrac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}} = \tfrac{1}{2}([X_1,Y_1]_1 + [X_2,Y_2]_2).$$

Из этого равенства и из (11) следует, что каноническая связность 1-го рода на G/H является связностью почти произведения относительно канонической структуры P. □

В том случае, когда порядок однородного Φ-пространства G/H кратен четырем (т. е. $\Phi^{4k} = \mathrm{id}$, где $k \in N$), можно рассмотреть структуру почти произведения P, определяемую в точке p_0 оператором $P_0 = \theta^{2k}$. Предположим, что оператор θ не имеет собственных значений ε таких, что $\varepsilon^k = 1$. Нетрудно показать, что тогда для подпространств $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ имеют место включения

$$[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_2, \tag{18}$$

$$[\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_1, \tag{19}$$

$$[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}. \tag{20}$$

Справедливость (18) и (19) следует непосредственно из определения оператора P_0, а для доказательства (20) необходимо воспользоваться свойством $\theta^k\big|_{\mathfrak{m}_1} = -\,\mathrm{id}$. Учитывая теперь включения (18)–(20), находим, что для любых $X,Y \in \mathfrak{m}$ $[X,Y]_{\mathfrak{m}} = [X_2,Y_2]_1 + [X_1,Y_2]_2 + [X_2,Y_1]_2$, откуда для однородных Ф-пространств порядка, кратного четырем, получаем специальный результат теоремы 7. Именно, имеет место

Теорема 8. *Пусть G/H — регулярное Ф-пространство порядка $4k$, $k \in N$, такое, что оператор θ не имеет собственных значений ε таких, что $\varepsilon^k = 1$. Каноническая структура почти произведения, определяемая на G/H оператором $P_0 = \theta^{2k}$, параллельна относительно канонической связности* 1*-го рода тогда и только тогда, когда G/H является локально симметрическим пространством.*

Рассмотрим на регулярном Ф-пространстве G/H вышеупомянутую инвариантную относительно G и D (псевдо)риманову метрику g и соответствующую риманову связность ∇. Каноническая (псевдо)риманова структура почти произведения P на G/H называется киллинговой [8], если для римановой связности ∇ и любого векторного поля X из G/H имеет место $(\nabla_X P)X = 0$.

Теорема 9. *Пусть G/H — регулярное Ф-пространство с полупростой группой Ли G, и g — метрика на G/H, индуцированная формой Киллинга B алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть G/H допускает каноническую структуру почти произведения P такую, что полином $P(\theta)$ удовлетворяет условию* а) *теоремы* 3*. Тогда на G/H следующие условия эквивалентны*:

1) *риманова связность ∇ является связностью почти произведения*;
2) *структура P интегрируема и является киллинговой.*

Доказательство. Известно [6], что G/H является естественно редуктивным пространством. Риманова связность ∇ тогда совпадает с канонической связностью 1-го рода однородного пространства G/H. В этом случае, как показано в [8], (псевдо)риманова структура P будет являться киллинговой тогда и только тогда, когда для любого $X \in \mathfrak{m}$ $[X, P_0X]_{\mathfrak{m}} = 0$. Однако $[X, P_0X]_{\mathfrak{m}} = [X_1 + X_2, X_1 - X_2]_{\mathfrak{m}} = -2[X_1, X_2]_{\mathfrak{m}}$. Из этого равенства и теоремы 7 следует справедливость утверждения теоремы. □

3. Приступим к рассмотрению регулярного Ф-пространства G/H, допускающего канонические структуры почти произведения P и почти комплексную J. Из перестановочности P и J следует, что подпространства $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ инвариантны относительно оператора J_0.

Теорема 10. *Пусть G/H — регулярное однородное Ф-пространство, допускающее канонические структуры почти произведения P и почти комплексную J. Каноническая связность* 2*-го рода тогда и только тогда является единственной инвариантной связностью, согласованной с P и J, когда для функции Номидзу α произвольной инвариантной аффинной связности ∇ на G/H имеет место равенство*

$$\alpha(X, Y_i)_i = J_0\alpha(X, J_0Y_i)_i, \tag{21}$$

где $i = 1, 2$, а $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Доказательство. Пусть каноническая связность 2-го рода является единственной инвариантной на G/H почти комплексной связностью и связностью почти произведения. Рассмотрим функцию Номидзу α произвольной инвариантной аффинной связности на G/H. Она порождает связности ∇' и ∇'' с функциями Номидзу $\alpha'(X, Y) = \alpha(X, Y_1)_1 - J_0\alpha(X, J_0Y_1)_1$ и $\alpha''(X, Y) = \alpha(X, Y_2)_2 - J_0\alpha(X, J_0Y_2)_2$ соответственно. Легко показать, что ∇' и ∇'' являются почти комплексными связностями на G/H. Учитывая перестановочность P и J, также нетрудно убедиться, что ∇' и ∇'' являются и связностями почти произведения. Следовательно, $\alpha' = \alpha'' = 0$, откуда следует (21). Обратно, пусть выполнено (21). Рассмотрим произвольную инвариантную относительно G и D связность ∇, согласованную с P и J. В силу леммы 1 для ее функции Номидзу α и для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ имеет место (10). Так как ∇ является почти комплексной связностью, то в силу (21) и (2) для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ получим

$$J_0\alpha(X, Y) - \alpha(X, J_0Y) = J_0\alpha(X, Y_1)_1 + J_0\alpha(X, Y_2)_2 - \alpha(X, (J_0Y)_1)_1 - \alpha(X, (J_0Y)_2)_2 =$$
$$= 2\alpha(X, J_0Y_1)_1 - 2\alpha(X, J_0Y_2)_2 = 0.$$

Из этого равенства и из (21) легко получить, что $\alpha(X, Y_i)_i$, $i = 1, 2$, а тогда в силу (12) $\alpha(X, Y) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. $\square$

Следствие. Если регулярное однородное Ф-пространство G/H допускает канонические структуры почти произведения P и почти комплексную J, и каноническая связность 2-го рода является единственной инвариантной связностью, согласованной с P и J, то для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ справедливо

$$[X, Y_i]_i = J_0[X, J_0 Y_i]_i, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть аффинную связность ∇ с функцией Номидзу $\alpha(X, Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$, $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Теорема 11. *Пусть G/H — регулярное однородное Ф-пространство, допускающее канонические структуры почти произведения P и почти комплексную J. Пусть каноническая связность 2-го рода является единственной инвариантной связностью, согласованной с P и J. Если структура P на G/H интегрируема, то почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ имеет место равенство*

$$[J_0 X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} = [X, Y]_{\mathfrak{m}}.$$

Доказательство. Выпишем подробнее каждое слагаемое, входящее в состав тензора кручения $N_0(X, Y)$ структуры J в точке p_0, учитывая, что на G/H справедливы равенства (7) и (22),

$$\begin{aligned}
[J_0X, J_0Y]_{\mathfrak{m}} &= [J_0X_1, J_0Y_1]_1 + [J_0X_1, J_0Y_2]_1 + [J_0X_1, J_0Y_2]_2 + [J_0X_2, J_0Y_1]_1 + [J_0X_2, J_0Y_1]_2 + \\
&\quad + [J_0X_2, J_0Y_2]_2 = -[X_1, Y_1]_1 - J_0[X_1, J_0Y_2]_1 - J_0[J_0X_1, Y_2]_2 - J_0[J_0X_2, Y_1]_1 - \\
&\quad - J_0[X_2, J_0Y_1]_2 - [X_2, Y_2]_2, \\
J_0[X, J_0Y]_{\mathfrak{m}} &= [X_1, Y_1]_1 + J_0[X_1, J_0Y_2]_1 + [X_1, Y_2]_2 + [X_2, Y_1]_1 + J_0[X_2, J_0Y_1]_2 + [X_2, Y_2]_2, \\
J_0[J_0X, Y]_{\mathfrak{m}} &= [X_1, Y_1]_1 + [X_1, Y_2]_1 + J_0[J_0X_1, Y_2]_2 + J_0[J_0X_2, Y_1]_1 + [X_2, Y_1]_2 + [X_2, Y_2]_2, \\
[X, Y]_{\mathfrak{m}} &= [X_1, Y_1]_1 + [X_1, Y_2]_1 + [X_1, Y_2]_2 + [X_2, Y_1]_1 + [X_2, Y_1]_2 + [X_2, Y_2]_2.
\end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим для тензора кручения $N_0(X, Y)$ равенство

$$\begin{aligned}
N_0(X, Y) &= -4[X_1, Y_1]_1 - 2J_0[X_1, J_0Y_2]_1 - 2J_0[J_0X_1, Y_2]_2 - 2J_0[J_0X_2, Y_1]_1 - 2J_0[X_2, J_0Y_1]_2 - \\
&\quad - 2[X_1, Y_2]_2 - 2[X_1, Y_2]_1 - 2[X_2, Y_1]_2 - 2[X_2, Y_1]_1 - 4[X_2, Y_2]_2.
\end{aligned}$$

Используя (22), находим

$$\begin{aligned}
N_0(X, Y) &= -2[X_1, Y_1]_1 + 2[J_0X_1, J_0Y_1]_1 + 2[J_0X_1, J_0Y_2]_1 + \\
&\quad + 2[J_0X_1, J_0Y_2]_2 + 2[J_0X_2, J_0Y_1]_1 + 2[J_0X_2, J_0Y_1]_2 + 2[J_0X_2, J_0Y_2]_2 - \\
&\quad - 2[X_1, Y_2]_2 - 2[X_1, Y_2]_1 - 2[X_2, Y_1]_2 - 2[X_2, Y_1]_1 - 2[X_2, Y_2]_2.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned}
N_0(X, Y) &= 2[J_0X_1, J_0Y_1]_{\mathfrak{m}} + 2[J_0X_1, J_0Y_2]_{\mathfrak{m}} + 2[J_0X_2, J_0Y_1]_{\mathfrak{m}} + \\
&\quad + 2[J_0X_2, J_0Y_2]_{\mathfrak{m}} - 2[X_1, Y_2]_{\mathfrak{m}} - 2[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}} - 2[X_2, Y_1]_{\mathfrak{m}} - 2[X_2, Y_2]_{\mathfrak{m}}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, окончательно находим $N_0(X, Y) = 2[J_0X, J_0Y]_{\mathfrak{m}} - 2[X, Y]_{\mathfrak{m}}$. $\square$

Примером регулярного Ф-пространства, допускающего одновременно канонические почти комплексную структуру и структуру почти произведения с единственной инвариантной связностью, согласованной с данными структурами на нем, является Ф-пространство порядка 5, исследованное в [12], [13].

4. Рассмотрим каноническую f-структуру на регулярном Ф-пространстве G/H. Пусть f_0 — оператор, определяющий значение f-структуры в точке p_0. Обозначим для любого $X \in \mathfrak{m}$

проекцию его на $\operatorname{Ker} f_0$ через X_1, а через X_2 — его проекцию на $\operatorname{Im} f_0$. Проектирующие операторы на $\operatorname{Ker} f_0$ и $\operatorname{Im} f_0$ обозначим через m_0 и l_0 соответственно. Напомним [5], что $m_0 = f_0 + \mathrm{id}$, $l_0 = -f_0^2$.

Теорема 12. *Пусть G/H — регулярное однородное Φ-пространство, допускающее каноническую f-структуру. Если каноническая связность 2-го рода является единственной согласованной с f-структурой (т. е. $\nabla f = 0$) инвариантной связностью, то тензор кручения f-структуры $N_0(X,Y)$ в точке p_0 определяется формулой*

$$N_0(X,Y) = [f_0X, f_0Y]_1 - [X_2, Y_2]_2 - [X, Y_2]_2 - [X_2, Y]_2 - [X, Y]_2. \tag{23}$$

Доказательство. Пользуясь специальными векторными полями в окрестности точки p_0 [4], можно показать, что для аффинной связности ∇ на G/H с функцией Номидзу α условие $\nabla f = 0$ эквивалентно условию

$$f_0\alpha(X,Y) = \alpha(X, f_0Y) \quad \text{для любых} \;\; X, Y \in \mathfrak{m}. \tag{24}$$

Рассмотрим на $\mathfrak{m}$ билинейное отображение $\alpha(X,Y) = f_0[X, f_0Y]_{\mathfrak{m}} - [X, Y_2]_2$, $X, Y \in \mathfrak{m}$. В силу инвариантности относительно $\operatorname{Ad}(H)$ α является функцией Номидзу некоторой инвариантной на G/H аффинной связности ∇. Так как α инвариантно относительно θ, оно инвариантно относительно D [6] и, кроме того, для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$f_0\alpha(X,Y) = -[X, f_0Y_2]_2 - f_0[X, Y_2]_2, \tag{25}$$

$$\alpha(X, f_0Y) = -f_0[X, Y_2]_2 - [X, f_0Y_2]_2. \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, что ∇ согласована с f-структурой, а значит согласно предположению теоремы для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ справедливо

$$f_0[X, f_0Y]_{\mathfrak{m}} = [X, Y_2]_2. \tag{27}$$

Применим (27) к вычислению тензора кручения f-структуры $N_0(X,Y)$ [5] в точке p_0

$$N_0(X,Y) = [f_0X, f_0Y]_{\mathfrak{m}} - f_0[X, f_0Y]_{\mathfrak{m}} - f_0[f_0X, Y]_{\mathfrak{m}} - l_0[X,Y]_{\mathfrak{m}}. \tag{28}$$

Разложим каждое слагаемое из (28)

$$\begin{aligned}[f_0X, f_0Y]_{\mathfrak{m}} = [f_0X, f_0Y]_1 + [f_0X, f_0Y]_2 = [f_0X, f_0Y]_1 + f_0[f_0X, f_0^2Y]_2 = [f_0X, f_0Y]_1 +\\ + f_0[Y_2, f_0X]_2 = [f_0X, f_0Y]_1 - [X_2, Y_2]_2,\end{aligned} \tag{29}$$

$$f_0[X, f_0Y]_{\mathfrak{m}} = [X, Y_2]_2, \tag{30}$$

$$f_0[f_0X, Y]_{\mathfrak{m}} = -f_0[Y, f_0X]_{\mathfrak{m}} = [X_2, Y]_2, \tag{31}$$

$$l_0[X,Y]_{\mathfrak{m}} = [X,Y]_2. \tag{32}$$

Из равенств (29)–(32) следует теперь утверждение теоремы. □

Говорят [5], что f-структура частично интегрируема, если интегрируемо распределение $\operatorname{Im} f$ и если почти комплексная структура f', индуцируемая f-структурой на каждом интегральном многообразии распределения $\operatorname{Im} f$, интегрируема.

Теорема 13. *Пусть G/H — регулярное однородное Φ-пространство, допускающее каноническую f-структуру. Если каноническая связность 2-го рода является единственной согласованной с f-структурой инвариантной связностью, то f-структура является частично интегрируемой [5] тогда и только тогда, когда*

$$[X_2, Y_2]_{\mathfrak{m}} = 0$$

для любых векторов $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Доказательство. Условие частичной интегрируемости f-структуры равносильно выполнению в точке p_0 для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ равенства $N_0(f_0X, f_0Y) = 0$. Из определения тензора кручения f-структуры следует

$$N_0(f_0X, f_0Y) = [X_2, Y_2]_{\mathfrak{m}} + f_0[f_0X, Y_2]_{\mathfrak{m}} + f_0[X_2, f_0Y]_{\mathfrak{m}} - [f_0X, f_0Y]_2.$$

Учитывая (27), получим равенство $N_0(f_0X, f_0Y) = [X_2, Y_2]_1 + 4[X_2, Y_2]_2$, которое доказывает справедливость утверждения теоремы. □

Отметим, что регулярное Ф-пространство 4-го порядка, исследованное в [14], является примером регулярного Ф-пространства с канонической f-структурой и единственной инвариантной связностью на нем, согласованной с f-структурой.

Литература

1. Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры на регулярных Ф-пространствах* // УМН. – 1991. – Т. 46. – № 1. – С. 205–206.
2. Ковальский 0. *Обобщенные симметрические пространства.* – М.: Мир, 1984. – 240 с.
3. Степанов Н.А. *Однородные 3-циклические пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.
4. Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76. – № 1. – P. 33–65.
5. Yano K., Kon M. *Structures on manifolds.* – Singapore: World Scientific, 1984. – 508 p.
6. Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
7. Феденко А.С. *Пространства с симметриями.* – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 167 с.
8. Balashchenko V. *Riemannian geometry of canonical structures on regular Ф-spaces.* – Preprint № 174, Bochum: Universität Bochum, 1994.
9. Gray A. *Nearly Kähler manifolds* // J. Different. Geom. – 1970. – V. 4. – № 3. – P. 283–309.
10. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 414 с.
11. Gray A. *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order* 3 // J. Different. Geom. – 1972. – V. 7. – № 3–4. – P. 343–369.
12. Балащенко В.В., Чурбанов Ю.Д. *Инвариантные структуры на однородных Ф-пространствах порядка* 5 // УМН. – 1990. – Т. 45. – № 1. – С. 169–170.
13. Чурбанов Ю.Д. *О некоторых классах однородных Ф-пространств порядка* 5 // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 88–90.
14. Балащенко В.В., Дашевич О.В. *Геометрия канонических структур на однородных Ф-пространствах порядка* 4 // УМН – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 153–154.

Белорусский государственный университет

Поступила 17.05.1996