ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 517.958

А.Г. ЛОСЕВ, Е.А. МАЗЕПА, В.Ю. ЧЕБАНЕНКО

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. Введение

В данной работе изучается поведение решений стационарного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях некоторого специального вида. Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbf{R}^n$ функция является тождественной постоянной. Хорошо известна справедливость следующих утверждений, носящих название теорем типа Лиувилля.

1. Если гармоническая функция u в $\mathbf{R}^n$ имеет конечный интеграл Дирихле, то $u \equiv \mathrm{const}$.
2. Если $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$ является гармонической функцией и $1 \leq p < \infty$, то $u \equiv 0$.
3. Если функция u гармоническая в $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяет неравенству $|u(x)| \leq C(1+|x|)^m$, то u — гармонический полином степени, не превышающей m.

В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность. Оценки размерностей различных пространств гармонических функций и решений стационарного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях были получены в [1]–[6]. Ряд работ был посвящен изучению гармонических функций и решений стационарного уравнения Шрёдингера на модельных или сферически-симметричных многообразиях и их обобщениях. В частности, были получены точные условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на "бесконечности", условия выполнения теорем типа Лиувилля для ограниченных гармонических функций и ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера (см., напр., [2]–[4]). Опишем сферически-симметричные многообразия подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0, R_0)$ (R_0 может быть $+\infty$) такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1) множество точек M_q является открытым шаром в $\mathbf{R}^n$ радиуса R_0 с центром в O (если $R_0 = +\infty$, то все $\mathbf{R}^n$);

2) в полярных координатах (r, θ) (где $r \in (0, R_0)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_q \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r) d\theta^2, \tag{1}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в O является гладким продолжением (1).

Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, гиперболическое пространство $\mathbf{H}^n$, поверхности вращения и т. д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00304.

Далее будем рассматривать многообразия более общего вида, называемые также модельными. Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S$ (где $r_0 > 0$, S — компактное риманово многообразие без края) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r) d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная, гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S.

Рассмотрим на M решения стационарного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x) u = 0, \tag{2}$$

где $c(x)$ — гладкая, неотрицательная функция. В дальнейшем считаем, что на D выполнено условие $c(r,\theta) \equiv c(r)$, $c(x) \not\equiv 0$ на M.

Введем обозначения $J = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} c(\xi) g^{n-1}(\xi) d\xi$, $K = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}$, где $n = \dim M$.

Пусть функция $v_l^0(r)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$v_l''(r) + (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)} v_l'(r) - [\lambda_l g^{-2}(r) + c(r)] v_l(r) = 0,$$

где λ_l — l-е собственное число оператора Лапласа–Бельтрами на S с граничными условиями $v_l^0(r_0) = 1$ и $(v_l^0)'(r_0) = 0$. Данное уравнение играет важную роль при изучении свойств решений уравнения (2). В дальнейшем будем называть его *спектральным*.

Теорема. *Пусть риманово многообразие M таково, что на D выполнено $J = \infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty} c(r) g^2(r) = \mu$, $0 \le \mu < \infty$. Тогда размерность пространства решений стационарного уравнения Шрёдингера (2), удовлетворяющих условию $u = \overline{o}(v_l^0)$ при $r \to \infty$, не превышает l.*

Замечание 1. Аналогичные утверждения для гармонических функций на модельных многообразиях и для решений стационарного уравнения Шрёдингера в пространстве $\mathbf{R}^n$ доказаны в работах [2] и [5] соответственно.

2. Доказательство теоремы

В координатах (r,θ) на D оператор $L = \Delta - c(r)$ имеет вид

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{g^2(r)}\Delta_\theta - c(r), \tag{3}$$

где Δ_θ — внутренний лапласиан на S. Формула (3) проверяется непосредственно по определению оператора Лапласа–Бельтрами (см., напр., [7], с. 357).

Пусть w_k — ортонормированный базис в $L^2(S)$ из собственных функций оператора $-\Delta_\theta$, а λ_k — соответствующие собственные числа. Тогда для любого r имеем $u(r,\theta) \overset{L^2(S)}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$, где $v_k(r) = \int\limits_S u(r,\theta) w_k(\theta) d\theta$, $\Delta_\theta w_k(\theta) + \lambda_k w_k(\theta) = 0$.

Из (3) следует, что для любого индекса k функция $v_k(r)$ является решением спектрального уравнения

$$v_k''(r) + (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)} v_k'(r) - [\lambda_k g^{-2}(r) + c(r)] v_k(r) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) эквивалентно уравнению $(g^{n-1}(r) v_k'(r))' = [\lambda_k g^{n-3}(r) + c(r) g^{n-1}(r)] v_k(r)$. Проинтегрируем данное соотношение от r_0 до r. В результате получим

$$v_k'(r) = \frac{1}{g^{n-1}(r)} \int_{r_0}^{r} [\lambda_k + c(\xi) g^2(\xi)] g^{n-3}(\xi) v_k(\xi)\, d\xi + \frac{v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0)}{g^{n-1}(r)}, \tag{5}$$

откуда

$$v_k(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} [\lambda_k + c(\xi)g^2(\xi)] g^{n-3}(\xi) v_k(\xi)\, d\xi + v_k'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_k(r_0). \quad (6)$$

В предложении 3 показано[1], что если $\lambda_l > \lambda_{l-1}$, то $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{v_l(r)}{v_{l-1}(r)} = \infty$. Тогда из условия $u = \overline{o}(v_l^0)$ вытекает, что множество номеров k таких, что $v_k(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, ограничено, и, более того, $k < l$. Отсюда для любого $r > r_0$ в D

$$u(r,\theta) = v_0(r) + \sum_{k=1}^{l-1} v_k(r) w_k(\theta) + \sum_{k=l}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta), \quad (7)$$

где при $k \ge l$ выполнено $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = 0$ (см. предложение 1).

Построим базисные функции $\{\varphi^i\}_{i=0}^{l-1}$ исследуемого в теореме пространства решений уравнения (2) на всем M. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание многообразия M, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M с гладкими границами ∂B_k таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{B} \subset B_k$ для всех k.

Рассмотрим последовательность функций φ_k^i таких, что

$$L\varphi_k^i = 0 \ \text{ в } \ B_k, \quad \varphi_k^i|_{\partial B_k} = u^i|_{\partial B_k},$$

где u^i строится с помощью гладкого продолжения на B функций вида $v_i^0(r) w_i(\theta)$, где $0 \le i < l$. Пусть сначала $u^1 = v_1^0(r) w_1(\theta)$ на $M \setminus B$ и некоторым гладким образом продолжена на B.

Не умаляя общности, можно считать $c(x) \ne 0$ на $\overline{B} \setminus B'$, где B' — некоторое предкомпактное подмножество в B. Пусть φ_0 — финитная функция такая, что $\varphi_0 = 0$ на B' и $\varphi_0 = 1$ на $M \setminus B$. Положим $U = u^1 \varphi_0$, тогда $LU = \Delta(u^1\varphi_0) - c(x)(u^1\varphi_0) = f$. При этом $f = 0$ в B' и на $M \setminus B$. Тогда $\Omega := \operatorname{supp} f$ — компакт и $\Omega \subset \overline{B} \setminus B'$.

Далее рассмотрим последовательность функций $\psi_k = \varphi_k^1 - U$, для которых

$$L\psi_k = -f \ \text{ в } \ B_k, \quad \psi_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Из предложения 5 следует, что для всех k при $x \in B_k$

$$|\psi_k| \le \sup_{B_k} |\psi_k| \le \sup_{\partial B_k} |\psi_k| + \sup_{\Omega} \frac{|f(x)|}{c(x)} = \sup_{\Omega} \frac{|f(x)|}{c(x)}.$$

Следовательно, семейство функций ψ_k равномерно ограничено, а значит, компактно в классе $C^{2,\alpha}(G)$ для любого компактного подмножества $G \subset M$ (см., напр., предложение 6). Тогда на M существует $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k = \psi$ такой, что $L\psi = -f$ на M. Из существования функции ψ следует существование предельной функции $\varphi^1 = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k^1$, причем $L\varphi^1 = 0$ на M.

На $M \setminus B$ функция $\psi(r,\theta)$ является решением уравнения $L\psi = 0$. Так как ∂B — компакт, то в силу непрерывности функции $\psi(r,\theta)$ существует $A = \max\limits_{\partial B} |\psi(r,\theta)|$. Тогда $-A \le \psi|_{\partial B} \le A$ и для достаточно больших k $\ -(A+1) \le \psi_k|_{\partial B} \le A+1$.

Далее рассмотрим два случая. Пусть сначала интеграл $K = \infty$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t) g^{n-1}(t) dt < \infty$. Тогда из предложения 4 следует, что для некоторой константы $0 \le m < 1$ на $M \setminus B$ существует решение уравнения (2) $v(r,\theta)$ такое, что $v|_{\partial B} = 1$ и $\lim\limits_{r\to\infty} v(r,\theta) = m$. Рассмотрим на $M \setminus B$

[1]Везде далее при ссылках на предложения см. п. 3 “Приложение”.

функции $\overline{\psi} = (A+1)v$ и $\underline{\psi} = -(A+1)v$. Функции $\overline{\psi}$ и $\underline{\psi}$ являются решениями уравнения (2) и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}|_{\partial B} = A+1, && 0 \le \overline{\psi} \le A+1, && \lim_{r\to\infty} \overline{\psi}(r,\theta) = (A+1)m, \\ &\underline{\psi}|_{\partial B} = -(A+1), && -(A+1) \le \underline{\psi} \le 0, && \lim_{r\to\infty} \underline{\psi}(r,\theta) = -(A+1)m. \end{aligned}$$

Тогда на $M \setminus B$ выполнено $\underline{\psi} \le \overline{\psi}$. Так как на $B_k \setminus B$

$$L\underline{\psi} = L\psi_k = L\overline{\psi} = 0, \quad \underline{\psi}|_{\partial B_k} \le \psi_k|_{\partial B_k} \le \overline{\psi}|_{\partial B_k} \ \text{ и } \ \underline{\psi}|_{\partial B} \le \psi_k|_{\partial B} \le \overline{\psi}|_{\partial B},$$

то с учетом принципа сравнения (см. [8], с. 41) для достаточно больших k на множестве $B_k \setminus B$ $\underline{\psi} \le \psi_k \le \overline{\psi}$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\underline{\psi} \le \psi \le \overline{\psi}$. Так как $\lim\limits_{r\to\infty} \underline{\psi}(r,\theta) = -(A+1)m$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \overline{\psi}(r,\theta) = (A+1)m$, то при $r \to \infty$ $|\psi(r,\theta)| \le (A+1)m$.

Заметим, что при $m = 0$ для функции $\psi(r,\theta)$ существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r,\theta) = 0$ в случае, когда интеграл $K < \infty$ или одновременно $K = \infty$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t) g^{n-1}(t) dt = \infty$. Тогда $\lim\limits_{r\to\infty} [\varphi^1(r,\theta) - u^1(r,\theta)] = 0$.

Таким образом, функция $\varphi^1 - u^1$ является ограниченным решением уравнения (2) на $M \setminus B$. В [3] показано, что если интеграл $K = \infty$, то $\lim\limits_{r\to\infty} (\varphi^1 - u^1) = C$, где C — некоторая константа.

Аналогично строятся остальные базисные функции по всем $v_i^0(r) w_i(\theta)$, $i < l$.

Докажем, что набор построенных функций $\{\varphi^i\}_{i=0}^{l-1}$ действительно образует базис. Из предложения 3 следует линейная независимость всех этих функций. Далее возьмем произвольное решение стационарного уравнения Шрёдингера (2), удовлетворяющее условию $u = \overline{o}(v_l^0)$ при $r \to \infty$. На $M \setminus B$ оно представимо в виде (7), где $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = 0$ при $k \ge l$. Более того, в [3] показано, что второй ряд в разложении (7) сходится равномерно на $M \setminus B$ и, следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=l}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta) = 0.$$

Кроме того, в предложении 2 показано, что в условиях теоремы для любого решения $v_k(r)$ существует константа a_k такая, что

$$\lim_{r\to\infty} (v_k(r) - a_k v_k^0(r)) = m \quad (k < l),$$

где $m = 0$ при $0 < k < l$.

Легко доказать, что разность $u - \sum\limits_{k=0}^{l-1} a_k \varphi^k$ является ограниченным решением уравнения (2) на всем многообразии M. С другой стороны, всякое ограниченное решение уравнения (2) на M тождественно равно нулю (см., напр., [4]). Таким образом, построенная система функций действительно образует базис в пространстве решений уравнения (2), удовлетворяющих условию $u = \overline{o}(v_l^0)$ при $r \to \infty$. $\square$

3. Приложение

Предложение 1. *Пусть $J = \infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty} c(r) g^2(r) = \mu < \infty$. Тогда для решения спектрального уравнения (4) $v_k(r)$ справедливо одно из следующих утверждений:*

1. *если $k + \mu > 0$, то $|v_k(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$ или $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = 0$;*
2. *если $k + \mu = 0$ и, кроме того, интеграл $K < \infty$ или одновременно $K = \infty$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t) g^{n-1}(t) dt = \infty$, то $|v_0(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$ или $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r) = 0$;*

3. *если $k+\mu=0$ и, кроме того, $K=\infty$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t)g^{n-1}(t)dt<\infty$, то $|v_0(r)|\to\infty$ при $r\to\infty$ или существует такая константа m, что $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r)=m$.*

Доказательство. Если при каком-то $r_1\geq r_0$ выполнено $v_k'(r_1)v_k(r_1)\geq 0$, причем $v_k'(r_1)$ и $v_k(r_1)$ не равны нулю одновременно, то из (6) и расходимости интеграла J следует $|v_k(r)|\to\infty$ при $r\to\infty$. Действительно, пусть, например, $v_k'(r_1)\geq 0$, $v_k(r_1)\geq 0$ и одно из этих чисел положительно. Тогда в некотором интервале (r_1,r_2) (где $r_2>r_1$) $v_k(r)$ положительна. Возьмем максимальный интервал (r_1,r_2), в котором $v_k(r)>0$. Из (5) видно, что на этом интервале $v_k(r)$ строго возрастает, поэтому если $r_2<\infty$, то $v_k(r_2)>0$, что противоречит максимальности интервала (r_1,r_2). Значит, необходимо $r_2=\infty$, т. е. функция $v_k(r)$ положительна и возрастает на (r_1,∞). Тогда из (6) и расходимости интеграла J следует $v_k(r)\to\infty$ при $r\to\infty$. Точно так же рассматривается случай $v_k'(r_1)\leq 0$, $v_k(r_1)\leq 0$.

Если для какого-то $r_1\in(r_0,\infty)$ $v_k(r_1)=v_k'(r_1)=0$, то по теореме единственности имеем $v_k(r)\equiv 0$.

Покажем, что в случае $v_k'(r)v_k(r)<0$ для всех $r>r_0$ в условиях пп. 1 и 2 данного предложения выполнено $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r)=0$ для всех $k\geq 0$ и $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r)=m$ в условиях п. 3.

Домножив при необходимости на -1, можно считать, что при всех $r\in(r_0,\infty)$

$$v_k(r)<0,\quad v_k'(r)>0.$$

Тогда $v_k(r)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r)\leq 0$. Заметим, что при этом $|v_k(r)|$ монотонно убывает и, следовательно, функция $v_k(r)$ ограничена на (r_0,∞).

Пусть выполнены условия п. 1 или п. 2. Предположим, что $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r)<0$. Тогда при некотором $\varepsilon>0$ и всех $r>r_0$ имеем

$$v_k(r)\leq -\varepsilon. \tag{8}$$

Покажем, что (8) противоречит условию $J=\infty$. Рассмотрим два случая.

Пусть сначала

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}<\infty.$$

Тогда из (6) следует

$$v_k(r)\leq -\varepsilon\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_0}^{t}[\lambda_k+c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)d\xi+v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0)\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}+v_k(r_0),$$

где правая часть при $r\to\infty$ стремится к $-\infty$ в силу расходимости J, что противоречит ограниченности $v_k(r)$.

Пусть теперь

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}=\infty. \tag{9}$$

Перепишем (6) в виде

$$v_k(r)=\int_{r_0}^{r}g^{1-n}(t)F(t)dt+v_k(r_0), \tag{10}$$

где $F(t)=\int\limits_{r_0}^{t}[\lambda_k+c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)v_k(\xi)d\xi+v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0)$ — монотонно убывающая функция в силу отрицательности $v_k(r)$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)$. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=0$.

Допустим, что $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) > 0$. Тогда, учитывая (10), получаем $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = +\infty$, что противоречит отрицательности функции $v_k(r)$ на $(r_0, +\infty)$. Если $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = F < 0$, то найдется точка $r_1 > r_0$ такая, что для всех $t \geq r_1$ выполнено $F(t) \leq \frac{F}{2}$. Тогда из (10) имеем

$$v_k(r) \leq \int_{r_0}^{r_1} g^{1-n}(t)F(t)dt + \frac{F}{2}\int_{r_1}^{r} g^{1-n}(t)dt + v_k(r_0).$$

В силу $\int\limits_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t)dt = \infty$, получаем $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = -\infty$, что противоречит ограниченности функции $v_k(r)$ на $(r_0, +\infty)$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$, и, следовательно,

$$v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0) = -\int_{r_0}^{\infty} [\lambda_k + c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)v_k(\xi)d\xi.$$

Подставляя найденное значение $v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0)$ в (10), получаем

$$v_k(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{t}^{\infty} [\lambda_k + c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)v_k(\xi)d\xi + v_k(r_0). \tag{11}$$

Пусть сначала $k + \mu > 0$. Как доказано в [2], если $\int\limits_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t)dt = \infty$, то и

$$\int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t)\left(\int_{t}^{\infty} g^{n-3}(\xi)d\xi\right)dt = \infty.$$

Тогда для любого $k \geq 1$ выполнено

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{t}^{\infty} [\lambda_k + c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)d\xi = \infty.$$

Для $k = 0$ из условия $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu > 0$ следует, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $r_1 \geq r_0$, что для всех $r > r_1$ выполнено $c(r)g^2(r) > \mu - \varepsilon_1$. Тогда с некоторого r_1

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{t}^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)d\xi > (\mu - \varepsilon_1)\int_{r_1}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{t}^{\infty} g^{n-3}(\xi)d\xi = \infty$$

и из предположения (8) и (11) получаем $v_k(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ для всех $k \geq 0$, что противоречит отрицательности $v_k(r)$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = 0$.

Пусть теперь $k + \mu = 0$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)d\xi = \infty$. Из (8) и (11) следует

$$v_0(r) = v_0(r_0) - \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{t}^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)v_0(\xi)d\xi \geq v_0(r_0) + \varepsilon\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{t}^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)d\xi.$$

Значит, $v_0(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$, что противоречит отрицательности функции $v_0(r)$ на $(r_0, +\infty)$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r) = 0$.

Пусть $k + \mu = 0$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)d\xi < \infty$, т.е. выполнены условия п. 3 данного предложения. Так как $v_0(r) < 0$ и монотонно возрастает, то существует конечный предел $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r) = m \leq 0$. $\square$

Замечание 2. В том случае, когда $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)d\xi < \infty$ величина $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r)$ может быть отлична от нуля. Действительно, пусть $n = 3$ и в уравнении (2) $c(r) = \frac{e^{-r}}{2-e^{-r}}$ в области D. Зададим на D метрику ds^2 с помощью функции $g(r) = 2 - e^{-r}$.

Функция $v_0(r)$ на $\mathbf{R}_+$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$v'' + 2\frac{g'(r)}{g(r)}v' + \frac{g''(r)}{g(r)}v = 0. \tag{12}$$

Ограниченные решения этого уравнения с учетом заданной функции $g(r)$ имеют вид $v(r) = \frac{c_1}{2-e^{-r}}$ (напр., [9], с. 458). И $\lim\limits_{r\to+\infty} v(r) = \frac{c_1}{2}$. Таким образом, если функция $v_0(r) \not\equiv 0$, то $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r) \neq 0$.

Пусть теперь в области D выполнено $c(r) = \frac{q(1-q)}{(r+1)^2}$. Изменим метрику на D следующим образом. Положим $g(r) = (r+1)^q$, где $0 < q < \frac{1}{2}$. Тогда ограниченными решениями уравнения (12) являются решения вида

$$v(r) = (c_1 - c_2)(r+1)^{-q} \quad \text{и} \quad \lim_{r\to+\infty} v(r) = 0.$$

Предложение 2. *Пусть* $J = \infty$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu$, $0 \le \mu < \infty$. *Для любого решения спектрального уравнения* (4) $v_k(r)$ *такого, что* $v_k(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$, *существует решение этого же уравнения* $v_k^0(r)$ *с* $(v_k^0)'(r_0) = 0$ *такое, что*

$$\lim_{r\to\infty}(v_k(r) - v_k^0(r)) = m,$$

где $m = 0$ *для* $k > 0$.

Доказательство. Покажем, что спектральное уравнение (4) при $\lambda_k \ge 0$ для любого числа c имеет по крайней мере одно ограниченное решение $\widetilde{v}_k(r)$ такое, что $\widetilde{v}_k'(r_0) = c$. Пусть $c < 0$. Заметим сначала, что на любом отрезке $[r_0, r_1]$ для уравнения (4) существует единственное решение краевой задачи с граничными условиями

$$\widetilde{v}_k(r_0) = v_0, \quad \widetilde{v}_k(r_1) = v_1, \tag{13}$$

где v_0, v_1 — произвольные числа.

Действительно, линейной заменой переменных $z(r) = \widetilde{v}_k(r) - \frac{v_1 - v_0}{r_1 - r_0}(r - r_0) - v_0$ краевые условия (13) сводятся к нулевым

$$z(r_0) = z(r_1) = 0, \tag{14}$$

а уравнение (4) сводится к уравнению вида

$$z''(r) + (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)}z'(r) - [\lambda_k g^{-2}(r) + c(r)]z(r) = f(r), \tag{15}$$

где $f(r) = [\lambda_k g^{-2}(r) + c(r)]\left(\frac{v_1 - v_0}{r_1 - r_0}(r - r_0) + v_0\right) - (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)}\frac{v_1 - v_0}{r_1 - r_0}$.

Известно, что краевая задача (15), (14) имеет и притом единственное решение, если не существует нетривиального решения $z(r)$ однородного уравнения (15) с нулевыми граничными данными (14) (напр., [10], с. 164). Выполнение последнего условия гарантируется свойством решений спектрального уравнения (4) не иметь внутренних точек неположительного минимума и неотрицательного максимума.

Пусть $\widetilde{v}_k(r)$ — решение уравнения (4) такое, что $\widetilde{v}_k'(r_0) = c$ и $\widetilde{v}_k(r_0) > 0$. Случай $\widetilde{v}_k(r_0) \le 0$ не рассматривается, т. к. при условии $\widetilde{v}_k'(r_0) < 0$ функция $\widetilde{v}_k(r)$ будет неограниченно убывать при $r \to +\infty$. Рассмотрим два непересекающихся подмножества в $\mathbf{R}_+$:

$$A = \{x \in \mathbf{R}_+ : \text{ решение } \widetilde{v}_k(r) \text{ с } \widetilde{v}_k(r_0) = x \text{ удовлетворяет условию } \widetilde{v}_k(r) \to +\infty \text{ при } r \to +\infty\},$$
$$B = \{x \in \mathbf{R}_+ : \text{ решение } \widetilde{v}_k(r) \text{ с } \widetilde{v}_k(r_0) = x \text{ удовлетворяет условию } \widetilde{v}_k(r) \to -\infty \text{ при } r \to +\infty\}.$$

Допустим, что спектральное уравнение (4) не имеет ограниченных решений, удовлетворяющих условию $\widetilde{v}_k'(r_0) = c < 0$, т. е. $\mathbf{R}_+ = A \cup B$. Заметим, что для любого $x \in A$ соответствующее решение $\widetilde{v}_k(r)$ имеет точку $r_{\min} > r_0$ положительного минимума и $\widetilde{v}_k(r) > 0$ для всех $r \ge r_0$, а для любого $x \in B$ соответствующее решение имеет точку $\widetilde{r}_0 > r_0$, в которой $\widetilde{v}_k(\widetilde{r}_0) = 0$, $\widetilde{v}_k'(r) < 0$ для всех $r \ge r_0$.

Множества A и B не пусты. Действительно, если $B=\emptyset$, тогда для спектрального уравнения (4) не существует решения краевой задачи с граничными данными $\widetilde{v}_k(r_0)=x>0$, $\widetilde{v}_k(r_1)=0$, что противоречит доказанной ранее разрешимости краевой задачи (4), (13) для любых граничных данных. Если $A=\emptyset$, то для уравнения (4) не существует решения краевой задачи с граничными данными $\widetilde{v}_k(r_0)=x>0$, $\widetilde{v}_k(r_1)=x>0$, что также противоречит разрешимости краевой задачи для любых граничных данных.

Итак, множество $A\neq\emptyset$ и ограничено снизу, а множество $B\neq\emptyset$ и ограничено сверху. Значит, существуют $\underline{a}=\inf A$ и $\overline{b}=\sup B$. Очевидно, $0<\overline{b}\leq\underline{a}$ и, следовательно, $\underline{a},\overline{b}\in\mathbf{R}_+$.

Возможны следующие варианты: 1) $\underline{a},\overline{b}\in B$, 2) $\underline{a},\overline{b}\in A$, 3) $\underline{a}\in A$, $\overline{b}\in B$.

Допустим, имеет место 1). Тогда решение $\underline{v}(r)$ спектрального уравнения (4) с $\underline{v}'(r_0)=c$ и $\underline{v}(r_0)=\underline{a}$ имеет точку $\widetilde{r}_0>r_0$, где $\underline{v}(\widetilde{r}_0)=0$ и $\underline{v}'(r)<0$ для всех $r\geq r_0$. В этом случае не существует решения уравнения (4) с граничными данными $v_k(r_0)=\underline{a}$, $\widetilde{v}_k(r_1)=0$, где $r_1>\widetilde{r}_0$, т.к. все решения с $\widetilde{v}_k(r_0)\in A$ положительны, а все решения с $\widetilde{v}_k(r_0)\in B$ не будут превосходить решения с $\widetilde{v}_k(r_0)=\overline{b}$, что противоречит разрешимости краевой задачи (4), (13).

Далее пусть имеет место 2). Тогда решение $\overline{v}(r)$ спектрального уравнения (4) с $\overline{v}'(r_0)=c$ и $\overline{v}(r_0)=\overline{b}$ имеет точку $r_{\min}>r_0$ положительного минимума. При этом для всех решений $\widetilde{v}_k(r)$ уравнения (4) с начальными значениями из множества B выполнено $\widetilde{v}_k(r)<\overline{v}(r_{\min})$ для всех $r>r_{\min}$. В этом случае не существует решения краевой задачи с граничными данными $\widetilde{v}_k(r_0)=\overline{b}$, $\widetilde{v}_k(r_1)=\overline{v}(r_{\min})$, где $r_1>r_{\min}$, что противоречит доказанному ранее.

Таким образом, возможен лишь случай 3), т. е. $\underline{a}\in A$, $\overline{b}\in B$. Тогда решение спектрального уравнения (4) $\underline{v}(r)$ с $\underline{v}'(r_0)=c$ и $\underline{v}(r_0)=\underline{a}$ имеет точку $r_{\min}>r_0$ положительного минимума и $\underline{v}(r_{\min})>\overline{v}(r_{\min})$, где $\overline{v}(r)$ — решение уравнения (4) с $\overline{v}'(r_0)=c$, $\overline{v}(r_0)=\overline{b}$. Легко видеть, что в этом случае не существует решения краевой задачи для спектрального уравнения (4) с граничными данными

$$\widetilde{v}_k(r_0)=\frac{\underline{a}+\overline{b}}{2},\quad \widetilde{v}_k(r_{\min})=\frac{\underline{v}(r_{\min})+\overline{v}(r_{\min})}{2},$$

что противоречит разрешимости краевой задачи (4), (13) на любом отрезке $[r_0,r_1]$. Таким образом, предположение о том, что $\mathbf{R}_+=A\cup B$ неверно, и среди решений уравнения (4), удовлетворяющих начальным условиям $\widetilde{v}'_k(r_0)=c<0$ и $\widetilde{v}_k(r_0)>0$, существует ограниченное решение, которое, как доказано ранее (см. предложение 1), при $k\geq1$ стремится к нулю при $r\to\infty$ и при $k=0$ стремится к некоторой константе m, не обязательно равной нулю.

Случай $c>0$ рассматривается аналогично.

Если $c=0$, то единственным ограниченным решением спектрального уравнения (4), удовлетворяющим условию $\widetilde{v}'_k(r_0)=0$, будет нулевое решение. Действительно, если $\widetilde{v}_k(r_0)\neq0$, то, как доказано ранее, функция $|\widetilde{v}_k(r)|$ монотонно возрастает на $(r_0,+\infty)$ и $\lim\limits_{r\to\infty}|\widetilde{v}_k(r)|=+\infty$, что противоречит ограниченности решения.

Отсюда легко показать, что для любого решения уравнения (4) $v_k(r)$ найдется такое решение уравнения $v_k^0(r)$ с нулевой производной в точке $r=r_0$, что разность $v_k(r)-v_k^0(r)$ будет ограниченным решением спектрального уравнения (4) и, следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty}(v_k(r)-v_k^0(r))=m$, где $m=0$ при $k>0$. $\square$

Предложение 3. *Пусть* $J=\infty$, $\lim\limits_{r\to\infty}c(r)g^2(r)=\mu$, $0\leq\mu<\infty$, *а* v_{λ_1} *и* v_{λ_2} — *решения спектрального уравнения* (4) *с* $\lambda=\lambda_1$ *и* $\lambda=\lambda_2$ *соответственно и граничными условиями* $v'_{\lambda_1}(r_0)=v'_{\lambda_2}(r_0)=0$, $v_{\lambda_1}(r_0)=v_{\lambda_2}(r_0)=1$. *Тогда если* $\lambda_2>\lambda_1\geq0$, *то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{v_{\lambda_2}(r)}{v_{\lambda_1}(r)}=\infty. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем вначале, что с некоторого r_1 выполнено $v_{\lambda_2}(r)>bv_{\lambda_1}(r)$, где $b=\frac{5\lambda_2+12\mu+7\lambda_1}{4(\lambda_2+3\mu+2\lambda_1)}>1$. Предположим противное, т. е. для любого r выполнено $v_{\lambda_2}(r)\leq bv_{\lambda_1}(r)$.

Тогда из (6) получаем

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_0}^{t}[\lambda_2+c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)v_{\lambda_2}(\xi)\,d\xi+1\le$$
$$\le b\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_0}^{t}[\lambda_1+c(\xi)g^2(\xi)]g^{n-3}(\xi)v_{\lambda_1}(\xi)d\xi+b.$$

Так как $\lim\limits_{r\to\infty}c(r)g^2(r)=\mu$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $r_1>r_0$, начиная с которого выполнено $-\varepsilon<c(r)g^2(r)-\mu<\varepsilon$. Выбирая $\varepsilon=(\lambda_2-\lambda_1)/3$, получаем

$$\mu-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{3}<c(r)g^2(r)<\mu+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{3}.$$

Тогда с некоторого r_1 выполнено неравенство

$$\int_{r_1}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_1}^{t}\left[\lambda_2+\mu-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{3}\right]g^{n-3}(\xi)v_{\lambda_2}(\xi)\,d\xi-$$
$$-\int_{r_1}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_1}^{t}b\left[\lambda_1+\mu+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{3}\right]g^{n-3}(\xi)v_{\lambda_1}(\xi)d\xi<b-1.$$

Подставляя в это неравенство значение b, получаем

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{4}\int_{r_1}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_1}^{t}g^{n-3}(\xi)(v_{\lambda_2}(\xi)-v_{\lambda_1}(\xi))d\xi<\frac{\lambda_2-\lambda_1}{4(\lambda_2+2\lambda_1+3\mu)}.\tag{17}$$

Возьмем некоторое $r^*>r_0$. Имеем $v_{\lambda_2}(r^*)-v_{\lambda_1}(r^*)=c_1>0$. Из условий $J=\infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty}c(r)g^2(r)=\mu$ следует, что интеграл $\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}g^{n-3}(\xi)d\xi$ расходится. Тогда с некоторого r_1 неравенство (17) не выполняется, т. е. $v_{\lambda_2}(r)>bv_{\lambda_1}(r)$ при $r>r_1$.

Пусть $v_{\lambda_2}(r)>b^kv_{\lambda_1}(r)$, начиная с некоторого r_k. Докажем, что $v_{\lambda_2}(r)>b^{k+1}v_{\lambda_1}(r)$, начиная с некоторого r_{k+1}. Предположим противное, т. е. для всех r выполнено $v_{\lambda_2}(r)\le b^{k+1}v_{\lambda_1}(r)$. Отсюда, как и выше, получаем

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{4}\int_{r_{k+1}}^{r}\frac{dt}{g^{n-1}(t)}\int_{r_{k+1}}^{t}g^{n-3}(\xi)(v_{\lambda_2}(\xi)-b^kv_{\lambda_1}(\xi))d\xi<b^{k+1}-1.\tag{18}$$

Возьмем некоторое $r^*>r_k$. Имеем $v_{\lambda_2}(r^*)-b^kv_{\lambda_1}(r^*)=c_2>0$. Для всех $r>r^*$ выполнено $v_{\lambda_2}(r^*)-b^kv_{\lambda_1}(r^*)>c_2$. Так как $J=\infty$, то с некоторого r_1 неравенство (18) не выполняется. Следовательно, $v_{\lambda_2}(r)>b^kv_{\lambda_1}(r)$ для любого $k\in\mathbf{N}$. □

Предложение 4. *Пусть $J=\infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty}c(r)g^2(r)=\mu<\infty$. Тогда*

1. *если $K<\infty$ или одновременно $K=\infty$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty}c(t)g^{n-1}(t)\,dt=\infty$, то на D существует ограниченное решение $u(r,\theta)$ уравнения (2) такое, что*

$$u(r_0,\theta)=1\quad\text{и}\quad\lim_{r\to\infty}u(r,\theta)=0;$$

2. *если $K=\infty$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty}c(t)g^{n-1}(t)dt<\infty$, то для некоторой константы $0\le m<1$ на D существует ограниченное решение $u(r,\theta)$ уравнения (2) такое, что*

$$u(r_0,\theta)=1\quad\text{и}\quad\lim_{r\to\infty}u(r,\theta)=m.$$

Доказательство. В качестве искомого ограниченного решения задачи возьмем функцию $v_0(r)$ — решение уравнения (4) при $k=0$ такую, что $v_0(r_0)=1$ и $v_0'(r_0)<0$. Существование такого решения легко доказывается методом, изложенным в предложении 2. Кроме того, функция $v_0(r)$ будет монотонно убывающей на $(r_0,+\infty)$.

В предложении 1 показано, что при выполнении условий 1 и 2 данного предложения соответственно $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r)=0$ или существует такая константа m, что $\lim\limits_{r\to\infty} v_0(r)=m$. При этом в силу монотонного убывания функции $v_0(r)$ выполнено $0\le m<1$.

Ясно, что $v_0(r)$ является радиально-постоянным решением уравнения (2) на D. $\square$

Предложение 5. *Пусть $G \Subset M$ — предкомпактное подмножество в M, функция $u \in C(\overline{G}) \cap C^{2,\alpha}(G)$ удовлетворяет в G уравнению $Lu=f(x)$, где $f(x)\in C(\overline{G})$, $\Omega := \operatorname{supp} f(x)$ и $\Omega \Subset G$, $c(x)\ge 0$ в $\overline{G}$ и $c(x)\not\equiv 0$ в Ω. Тогда*

$$\sup_G |u| \le \sup_{\partial G} |u| + \sup_\Omega \frac{|f(x)|}{c(x)}.$$

Доказательство. Обозначим $a^+=\max\{0,a\}$ и $a^-=-\min\{0,a\}$. Рассмотрим константу $v=\sup\limits_{\partial G} u^+ + \sup\limits_\Omega \frac{f^-}{c(x)}$. Тогда получим на множестве $G\setminus\Omega$

$$L(v-u)=Lv-Lu=Lv=-c(x)v=-c(x)\left(\sup_{\partial G} u^+ + \sup_\Omega \frac{f^-}{c(x)}\right)\le 0$$

и в области Ω:

$$L(v-u)=Lv-Lu=-c(x)\left(\sup_{\partial G} u^+ + \sup_\Omega \frac{f^-}{c(x)}\right)-f(x)=-c(x)\left(\sup_{\partial G} u^+ + \sup_\Omega \frac{f^-}{c(x)}+\frac{f(x)}{c(x)}\right)\le 0.$$

Таким образом, $L(v-u)\le 0$ всюду на множестве G. Кроме того, $v-u\ge 0$ на ∂G. Тогда $u\le v$ в G и

$$\sup_G u \le \sup_G v = \sup_{\partial G} u^+ + \sup_\Omega \frac{f^-}{c(x)}. \tag{19}$$

Заменяя u на $-u$, получаем неравенство

$$\sup_G(-u)\le \sup_{\partial G}(-u)^+ + \sup_\Omega \frac{(-f)^-}{c(x)}$$

или

$$\sup_G(-u)\le \sup_{\partial G} u^- + \sup_\Omega \frac{f^+}{c(x)}. \tag{20}$$

Объединяя (19) и (20), получаем требуемое. $\square$

Заметим, что аналогичное утверждение для ограниченной области в $\mathbf{R}^n$ можно найти, например, в ([8], с. 55).

Предложение 6. *Пусть $G\subset M$ — произвольное предкомпактное открытое подмножество, $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ — равномерно ограниченное на G семейство решений уравнения (2), $\phi_i\in C^{2,\alpha}(G)$. Тогда семейство функций $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ компактно вместе с семейством их первых и вторых производных на любом компактном подмножестве $G'\subset G$.*

Доказательство. Для каждой точки $x\in M$ существует окрестность $O(x)\subset M$, гомеоморфная $\mathbf{R}^n$. Так как G' — компактное подмножество в G, то существует конечное число окрестностей O_s таких, что $G'\subset \bigcup\limits_{s=1}^{p} O_s\subset G$. Кроме того, оператор L является строго эллиптическим, а его коэффициенты — гладкие функции. Тогда для любого предкомпактного подмножества

$O'_s \subset O_s$ такого, что $\operatorname{dist}(O'_s, \partial O_s) \geq d_s > 0$, для всех функций ϕ_i выполнены внутренние оценки Шаудера ([8], с. 94–95):

$$d_s \sup_k \sup_{O'_s} \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}(x) \right| + d_s^2 \sup_{k,j} \sup_{O'_s} \left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) \right| +$$

$$+ d_s^{2+\alpha} \sup_{k,j} \sup_{\substack{x,y \in O'_s \\ x \neq y}} \frac{\left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_k \partial x_j}(y) \right|}{|x-y|^\alpha} \leq C_s \sup_{O_s} |\phi_i(x)|,$$

где C_s — константа, зависящая от свойств оператора L, n и области O_s.

Заметим, что множества O'_s можем выбрать так, что $G' \subset \bigcup\limits_{s=1}^{p} O'_s \subset G$. Действительно, возьмем в каждой области O_s возрастающую последовательность открытых подмножеств $O_s^1 \Subset O_s^2 \Subset \dots \Subset O_s$ таких, что $O_s = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} O_s^k$. Тогда $G' \subset \bigcup\limits_{s=1}^{p} O_s = \bigcup\limits_{s=1}^{p} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} O_s^k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{s=1}^{p} O_s^k \subset G$, т. е. множества $O^k = \bigcup\limits_{s=1}^{p} O_s^k$ образуют открытое покрытие множества G'. Причем $O^1 \Subset O^2 \Subset \dots \Subset \bigcup\limits_{s=1}^{p} O_s$. Так как G' — компактное подмножество в G, то из этого открытого покрытия можем выбрать конечное подпокрытие $O^1, O^2, \dots, O^r$. Учитывая возрастание последовательности O^k, получим $G' \subset O^r = \bigcup\limits_{s=1}^{p} O_s^r \subset G$. Поэтому можем взять $O'_s = O_s^r$.

Далее выберем $d = \min\limits_{s=1,\dots,p} d_s$, $C = \max\limits_{s=1,\dots,p} C_s$. Тогда на G' будут выполнены внутренние оценки Шаудера с константами d и C, где C зависит от L, n и G.

Из данной оценки с учетом равномерной ограниченности семейства функций $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ на G следует равностепенная непрерывность этого семейства, а так же равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность семейств первых и вторых производных этих функций на G'. $\square$

Литература

1. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 36. – P. 135–249.
2. Лосев А.Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 12. – С. 15–24.
3. Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *О поведении ограниченных решений уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях* // Вестник ВолГУ. – 1998. – Сер. Матем. Физика. – Вып. 3. – С. 32–43.
4. Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 41–49.
5. Kheyfits A.I. *Liouville theorems for generalized harmonic functions* // Potent. Anal. – 2002. – V. 16. – P. 93–101.
6. Yau S.T. *Nonlinear analysis in geometry* // L'Enseigenement Math. – 1987. – V. 33. – P. 109–158.
7. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия.* – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.
8. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.
9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1971. – 576 с.
10. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Волгоградский государственный университет

Поступила 13.10.2003