ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 539.3:517.958

Ю.И. БУТЕНКО

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В данной статье показано использование метода возмущений при интегрировании уравнений изгиба многослойной конструкции по модели Болотина–Новичкова.

При расчете многослойных конструкций часто используется теория Болотина–Новичкова [1], в которой для жестких слоев принимаются гипотезы классической теории пластин и оболочек, а для мягких — гипотезы, учитывающие линейный закон изменения сдвига и обжатия по поперечной координате. Таким образом, мягкий слой выполняет функцию связи между жесткими слоями. Полученные на основе этих предположений основные уравнения механики многослойных конструкций являются дифференциальными по координатам в плоскости слоев и конечно-разностными по координате, отсчитываемой по нормали к этой плоскости. Последняя координата принимает дискретные значения с учетом принятой нумерации слоев. Интегрирование такой системы уравнений представляет определенные трудности. При некоторых ограничениях на геометрию конструкции и граничные условия удается разделить непрерывные и дискретные переменные. Такие немногочисленные случаи относятся к классу точных методов расчета. В общем виде разделение переменных удается провести лишь приближенными методами. Очень плодотворным в этом направлении является метод возмущений по малому параметру [2], [3]. В статье разработано применение этого метода, который использован в расчете трехслойной пластины с двумя жесткими и одним мягким слоями. Такая конструкция описывается уравнениями [1]

$$
\begin{gathered}
A_1\Lambda_1^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)}) + B(u^{(2)}-u^{(1)}) + Bc_1\frac{\partial}{\partial x}(w^{(2)}+w^{(1)}) + q_1^{(1)} = 0,\\
A_2\Lambda_1^{(2)}(u^{(2)},v^{(2)}) - B(u^{(2)}-u^{(1)}) - Bc_2\frac{\partial}{\partial x}(w^{(2)}+w^{(1)}) + q_1^{(2)} = 0,\\
A_1\Lambda_2^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)}) + B(v^{(2)}-v^{(1)}) + Bc_1\frac{\partial}{\partial y}(w^{(2)}+w^{(1)}) + q_2^{(1)} = 0,\\
A_2\Lambda_2^{(2)}(u^{(2)},v^{(2)}) - B(v^{(2)}-v^{(1)}) - Bc_2\frac{\partial}{\partial y}(w^{(2)}+w^{(1)}) + q_2^{(2)} = 0, \qquad (1)\\
D_1\Delta\Delta w^{(1)} - C(w^{(2)}-w^{(1)}) - c_1B\Big[\frac{\partial}{\partial x}(u^{(2)}-u^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial y}(v^{(2)}-v^{(1)}) - c_1\Delta(w^{(2)}+w^{(1)})\Big] = q_3^{(1)},\\
D_2\Delta\Delta w^{(2)} + C(w^{(2)}-w^{(1)}) - c_2B\Big[\frac{\partial}{\partial x}(u^{(2)}-u^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial y}(v^{(2)}-v^{(1)}) - c_2\Delta(w^{(2)}+w^{(1)})\Big] = q_3^{(2)}.
\end{gathered}
$$

Здесь $u^{(\alpha)}$, $v^{(\alpha)}$, $w^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,$ — тангенциальные и нормальные перемещения слоя α вдоль осей x, y, z соответственно;

$$
A_\alpha = \frac{E_\alpha h_\alpha}{1-v_\alpha^2},\quad D_\alpha = \frac{E_\alpha h_\alpha^3}{12(1-v_\alpha^2)},\quad B=\frac{G''}{s_1},\quad C=\frac{E_z''}{s_1};
$$

$c_\alpha = \frac{h_\alpha+s_1}{2}$, h_α, s_1 — толщины жестких слоев и заполнителя; E_α, E'' — модули упругости жестких слоев и заполнителя; G'' — модуль сдвига заполнителя в трансверсальном направлении;

v_α — коэффициент Пуассона жестких слоев; $q_1^{(\alpha)}$, $q_2^{(\alpha)}$, $q_3^{(\alpha)}$ — интенсивности касательных и нормальной нагрузок, приложенных к жесткому слою α;

$$\Lambda_1^{(\alpha)}(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}) = \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial x^2} + \frac{1-v_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial y^2} + \frac{1+v_\alpha}{2}\frac{\partial^2 v^{(\alpha)}}{\partial x \partial y},$$
$$\Lambda_2^{(\alpha)}(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}) = \frac{\partial^2 v^{(\alpha)}}{\partial y^2} + \frac{1-v_\alpha}{2}\frac{\partial^2 v^{(\alpha)}}{\partial x^2} + \frac{1+v_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial x \partial y}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Система уравнений (1) шестнадцатого порядка должна быть проинтегрирована с соблюдением восьми краевых условий, которые на кромках $x = \mathrm{const}$ имеют вид

$$\begin{gathered}
\left[A_\alpha\left(\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial x} + v_1\frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial y}\right) - N_\alpha^{(\alpha)}\right]\delta u^{(\alpha)} = 0,\\
\left[A_\alpha\frac{1-v_\alpha}{2}\left(\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x}\right) - N_{12}^{(\alpha)}\right]\delta u^{(\alpha)} = 0,\\
\left[D_\alpha\left(\frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial x^2} + v_\alpha\frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial y^2}\right) - M_\alpha^{(\alpha)}\right]\delta\left(\frac{\partial w^{(\alpha)}}{\partial x}\right) = 0,\\
\left\{D_\alpha\left[\frac{\partial^3 w^{(\alpha)}}{\partial x^3} + (2-v_\alpha)\frac{\partial^3 w^{(\alpha)}}{\partial x \partial y^2}\right] - Bc_\alpha\left[u^{(2)} - u^{(1)} + c_\alpha\frac{\partial}{\partial x}(w^{(1)} + w^{(2)})\right] -\right.\\
\left.-Q_\alpha^{(\alpha)} - \frac{\partial M_{12}^{(\alpha)}}{\partial y}\right\}\delta w^{(\alpha)} = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $N_\alpha^{(\alpha)}$, $N_{12}^{(\alpha)}$, $Q_\alpha^{(\alpha)}$ — заданные на кромке внешние продольная, сдвигающая, перерезывающая силы, $M_\alpha^{(\alpha)}$, $M_{12}^{(\alpha)}$ — изгибающий и крутящий моменты, приложенные к слою α ($\alpha = 1, 2$).

Анализ системы уравнений (1) и краевых условий (2) показывает, что в них входят слагаемые разных порядков малости по отношению к геометрическим параметрам. Это легко обнаружить, если в уравнениях (1) и краевых условиях (2) перейти к безразмерным координатам и перемещениям. При этом переходе появится безразмерный малый параметр $c = \frac{H}{a}$ ($H = h_1 + s_1 + h_2$, a — характерный размер в плане пластины), поэтому коэффициент $c_\alpha = ca\frac{h_\alpha + s_1}{2H}$ можно отождествлять с малым параметром. По отношению к этим величинам все слагаемые первых четырех уравнений являются слагаемыми одного порядка малости, а в уравнения изгиба эти слагаемые входят с множителем c_α ($\alpha = 1, 2$) и, следовательно, являются слагаемыми следующего порядка малости. Аналогичное имеет место и в краевых условиях. Так, статические краевые условия изгиба при $\delta w^{(\alpha)}$ содержат слагаемые разных порядков малости. Значение параметра c значительно меньше единицы, поэтому решение задачи можно представить в виде разложения по этому параметру:

$$\begin{gathered}
u^{(\alpha)}(x,y,c) = \sum_{s=0} c^s u^{(\alpha)s}(x,y), \quad v^{(\alpha)}(x,y,c) = \sum_{s=0} c^s v^{(\alpha)s}(x,y),\\
w^{(\alpha)}(x,y,c) = \sum_{s=0} c^s w^{(\alpha)s}(x,y).
\end{gathered} \tag{3}$$

С учетом (3) система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{gathered}
D_1\Delta\Delta w^{(1)s} - C(w^{(2)s} - w^{(1)s}) - c_1 B\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^{(2)s-1} - u^{(1)s-1}) -\right.\\
\left.-\frac{\partial}{\partial y}(v^{(2)s-1} - v^{(1)s-1}) - c_1\Delta(w^{(2)s-1} - w^{(1)s-1})\right] = q_3^{(1)s},\\
D_2\Delta\Delta w^{(2)s} + C(w^{(2)s} - w^{(1)s}) - c_2 B\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^{(2)s-1} - u^{(1)s-1}) -\right.
\end{gathered} \tag{4}$$

$$
-\frac{\partial}{\partial y}(v^{(2)s-1}-v^{(1)s-1})-c_2\Delta(w^{(2)s-1}-w^{(1)s-1})\Big]=q_3^{(2)s},
$$

$$
\begin{gathered}
A_1\Lambda_1^{(1)}(u^{(1)s},v^{(1)s})+B(u^{(2)s}-u^{(1)s})=-q_1^{(1)s}-Bc_1\frac{\partial}{\partial x}(w^{(2)s}+w^{(1)s}),\\
A_2\Lambda_1^{(2)}(u^{(2)s},v^{(2)s})-B(u^{(2)s}-u^{(1)s})=-q_1^{(2)s}+Bc_2\frac{\partial}{\partial x}(w^{(2)s}+w^{(1)s}),\\
A_1\Lambda_2^{(1)}(u^{(1)s},v^{(1)s})+B(v^{(2)s}-v^{(1)s})=-q_2^{(1)s}-Bc_1\frac{\partial}{\partial y}(w^{(2)s}+w^{(1)s}),\\
A_2\Lambda_2^{(2)}(u^{(2)s},v^{(2)s})-B(v^{(2)s}-v^{(1)s})=-q_2^{(2)s}+Bc_2\frac{\partial}{\partial y}(w^{(2)s}+w^{(1)s}).
\end{gathered}\tag{5}
$$

При $s<0$ все перемещения $Q^{(\alpha)s}\equiv 0$, при $s=0$ $q_1^{(\alpha)0}=q_1^{(\alpha)}$, $q_2^{(\alpha)0}=q_2^{(\alpha)}$, $q_3^{(\alpha)0}=q_3^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,2)$, при $s\geq 1$ $q_1^{(\alpha)s}=q_2^{(\alpha)s}=q_3^{(\alpha)s}=0$.

Системы уравнений (4), (5) имеют рекуррентный характер и решаются при каждом s, начиная с $s=0$.

Таким образом, при любом s система уравнений (4), (5) распадается на две системы уравнений. Первоначально решается задача изгиба трехслойной пластины (4) относительно двух искомых функций $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, а затем по ним находятся тангенциальные переменные $u^{(\alpha)}$, $v^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,2)$.

Системы уравнений (4), (5) решаются при краевых условиях (2), которые с учетом (3) представляются в виде

$$
\begin{gathered}
\Big[A_\alpha\Big(\frac{\partial u^{(\alpha)s}}{\partial x}+v_1\frac{\partial v^{(\alpha)s}}{\partial y}\Big)-N_\alpha^{(\alpha)s}\Big]\delta u^{(\alpha)s}=0,\\
\Big[A_\alpha\frac{1-v_\alpha}{2}\Big(\frac{\partial u^{(\alpha)s}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(\alpha)s}}{\partial x}\Big)-N_{12}^{(\alpha)s}\Big]\delta v^{(\alpha)s}=0,\\
\Big[D_\alpha\Big(\frac{\partial^2 w^{(\alpha)s}}{\partial x^2}+v_\alpha\frac{\partial^2 w^{(\alpha)s}}{\partial y^2}\Big)-M_\alpha^{(\alpha)s}\Big]\delta\Big(\frac{\partial w^{(\alpha)s}}{\partial x}\Big)=0,\\
\Big\{D_\alpha\Big[\frac{\partial^3 w^{(\alpha)s}}{\partial x^3}+(2-v_\alpha)\frac{\partial^3 w^{(\alpha)s}}{\partial x\partial y^2}\Big]-Bc_\alpha\Big[u^{(2)s-1}-u^{(1)s-1}+\\
+c_\alpha\frac{\partial}{\partial x}(w^{(1)s-1}+w^{(2)s-1})\Big]-Q_\alpha^{(\alpha)s}-\frac{\partial M_{12}^{(\alpha)s}}{\partial y}\Big\}\delta w^{(\alpha)s}=0,
\end{gathered}\tag{6}
$$

где при $s=0$ $N_\alpha^{(\alpha)0}=N_\alpha^{(\alpha)}$, $N_{12}^{(\alpha)0}=N_{12}^{(\alpha)}$, $M_\alpha^{(\alpha)0}=M_\alpha^{(\alpha)}$, $Q_\alpha^{(\alpha)0}=Q_\alpha^{(\alpha)}$, $M_{12}^{(\alpha)0}=M_{12}^{(\alpha)}$, при $s\geq 1$ $N_\alpha^{(\alpha)s}=N_{12}^{(\alpha)s}=M_\alpha^{(\alpha)s}=Q_\alpha^{(\alpha)s}=M_{12}^{(\alpha)s}=0$.

Из (4)–(6) видно, что задача расчета трехслойной пластины упростилась за счет значительного сокращения числа одновременно определяемых искомых функций. Это имеет большое значение в задачах расчета многослойных конструкций, устойчивости пластин и оболочек.

Предложенная методика была проверена на примере изгиба трехслойного стержня регулярного строения ($h_1=h_2=h$, $E_1=E_2=E$), механика деформирования которого исследована в [4] на основе точного решения плоской задачи теории упругости для трехслойной среды. Только наличие этой работы с точным решением является основанием для выбора примера. Нумерация слоев ведется от нижней кромки. Нормальная нагрузка приложена к верхней плоскости $q_3^{(2)}=-q\sin\lambda x$, $\lambda=\pi/l$, $q_3^{(1)}=q_1^{(\alpha)}=0$. Примем для балки граничные условия типа Навье

$$
w^{(\alpha)}=M_x^{(\alpha)}=N_x^{(\alpha)}=0,\quad x=0,\quad x=l,\quad \alpha=1,2.
$$

Для мягкого слоя и конструкции в целом принимаем

$$
s_1=2h;\quad E=500E'',\quad G''=\frac{E''}{2.6};\quad l=2H,\quad H=h_1+h_2+s_1=4h.
$$

Решение выбираем в виде

$$u^{(\alpha)s} = K_\alpha^s \cos \lambda x, \quad w^{(\alpha)s} = B_\alpha^s \sin \lambda x.$$

С точностью c^2 имеем

$$K_1 = (-15.89 + 4.24 - 0.57)\frac{ql}{E} = -12.22\frac{ql}{E},$$
$$K_2 = (-47.32 + 4.24 - 0.57)\frac{ql}{E} = -43.65\frac{ql}{E},$$
$$B_1 = (-0.0924 + 0.0124 - 0.00166)\frac{ql}{E} = -0.08166\frac{ql}{E},$$
$$B_2 = (0.0924 - 0.0124 + 0.00166)\frac{ql}{E} = 0.08166\frac{ql}{E}.$$

Это численное решение на третьем шаге полностью совпадает со значениями, полученными с использованием системы уравнений (1), что свидетельствует о быстрой сходимости асимптотического представления (3).

Рассмотрена задача изгиба стержня ($q_3^{(2)} \neq 0$, $q_1^{(\alpha)} = q_3^{(1)} = 0$), но аналогичная методика имеет место и для задачи растяжения-сжатия стержня ($q_1^{(\alpha)} \neq 0$, $q_3^{(\alpha)} = 0$). В этом случае $w^{(\alpha)0} = 0$ и основными неизвестными задачи являются $u^{(\alpha)0} \neq 0$, определяемые второй системой уравнений. Далее возвращаемся к обычному процессу вычислений $w^{(\alpha)1} \neq 0$. Система решений быстро сходится к точному решению.

Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций.* – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
2. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. *Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций.* – М.: Машиностроение, 1981. – 416 с.
3. Найфэ А. *Методы возмущений.* – М.: Мир, 1984. – 456 с.
4. Присяжнюк В.К., Зайвелев И.Б. *К решению плоской задачи теории упругости для многослойного ортотропного композита* // Механ. композитных материалов. – 1991. – № 3. – С. 206–214.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
25.04.2002