ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 517.98

В.В. РОЗЕН

ВЛОЖЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ В УПОРЯДОЧЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Проблема вложимости одних алгебраических систем в другие принадлежит к числу традиционных алгебраических проблем. Для упорядоченных множеств уже классическими стали результаты об их вложимости в решетку с сохранением частичных операций взятия инфимума и супремума. Вместе с тем при изучении задач принятия решения с упорядоченными исходами, а также в общей теории измерений возникает необходимость такого расширения базисного множества и продолжения первоначально заданного на нем порядка, при котором в расширенном множестве можно было бы производить некоторые алгебраические операции (например, "взвешивание" или, более общо, линейные операции). С формальной точки зрения речь идет о вложении упорядоченного множества в некоторое упорядоченное линейное пространство.

В [1] автором доказана вложимость конечного упорядоченного множества в конечномерное линейное пространство и дано полное описание всех таких вложений с точностью до изоморфизма. В данной статье устанавливается принципиальный факт вложимости произвольного упорядоченного множества в упорядоченное линейное пространство (теорема 4). Используемый здесь метод погружения упорядоченного множества в упорядоченное линейное пространство состоит из двух этапов: первый этап — погружение упорядоченного множества в упорядоченное множество вероятностных мер, определенных на специальным образом подобранной σ-алгебре [2], и второй — расширение множества вероятностных мер до линейного пространства счетно-аддитивных функций с продолжением упорядоченности, построенной на множестве вероятностных мер, до упорядоченности этого линейного пространства. При этом установлен критерий продолжимости упорядоченности, заданной на выпуклом подмножестве линейного пространства, до упорядоченности всего линейного пространства (теорема 3).

Напомним, что упорядоченное линейное пространство представляет собой действительное линейное пространство, на котором задано отношение (частичного) порядка $\leqq^{\rho}$, согласованное с линейной структурой. Аксиомы согласованности таковы:

(A1) $x \leqq^{\rho} y \Longrightarrow x + z \leqq^{\rho} y + z$,
(A2) $x \leqq^{\rho} y \Longrightarrow \alpha x \leqq^{\rho} \alpha y, \quad (\alpha \geq 0)$.

Хорошо известно (см., напр., [3]), что в линейном пространстве порядки, согласованные с линейной структурой, находятся во взаимнооднозначном соответствии с его заостренными выпуклыми конусами. А именно, если ρ — порядок на линейном пространстве L, то множество $K = \{x \in L : x \geqq^{\rho} \mathbf{0}\}$ является заостренным выпуклым конусом (называемым положительным конусом порядка ρ); если K — заостренный выпуклый конус в L, то бинарное отношение ρ_K, определенное равносильностью $x \leqq^{\rho_K} y \Longleftrightarrow (y - x) \in K$, является согласованным с линейной структурой порядком на L, положительный конус которого совпадает с K (порядок, наведенный конусом K).

1. Упорядочение множества вероятностных мер

Под вероятностной мерой на (частично) упорядоченном множестве (A,ω) будем понимать неотрицательную счетно-аддитивную нормированную функцию множества, определенную на σ-алгебре $\mathcal{B}(M(\omega))$, порожденной семейством $M(\omega)$ мажорантно-стабильных в (A,ω) подмножеств[1]. Множество вероятностных мер на (A,ω) обозначается далее через $\mathcal{P}_\omega(A)$. Основная задача данного параграфа — указать способ упорядочения множества $\mathcal{P}_\omega(A)$, продолжающего порядок ω. Обозначим через $F(\omega)$ множество всех ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества (A,ω) в числовую прямую $\mathbb{R}$.

Замечание. При любых $\varphi \in F(\omega)$ и $\mu \in \mathcal{P}_\omega(A)$ существует интеграл Лебега $\int\limits_A \varphi d\mu$. Для доказательства достаточно установить измеримость φ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(M(\omega))$. Действительно, при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ подмножество $\{a \in A : \varphi(a) < \alpha\}$ является дополнением мажорантно-стабильного в (A,ω) подмножества $\{a \in A : \varphi(a) \geq \alpha\}$, откуда $\{a \in A : \varphi(a) < \alpha\} \in \mathcal{B}(M(\omega))$.

Далее будем полагать $\overline{\varphi}(\mu) = \int\limits_A \varphi d\mu$. С каждым подмножеством $H \subseteq F(\omega)$ свяжем отношение квазипорядка ω^H на $\mathcal{P}_\omega(A)$, определенное формулой

$$\mu_1 \leqq^{\omega^H} \mu_2 \Longleftrightarrow (\forall \varphi \in H)\ \overline{\varphi}(\mu_1) \leq \overline{\varphi}(\mu_2) \quad (\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_\omega(A)).$$

Отношение ω^H называется *расширением порядка* ω на множество вероятностных мер с помощью семейства отображений H.

Теорема 1. *Расширения порядка ω на множество вероятностных мер с помощью семейства $F(\omega)$ всех ограниченных изотонных отображений и с помощью семейства $F^2(\omega)$ всех изотонных отображений в двухэлементное множество $\{0,1\}$ совпадают между собой: $\omega^{F(\omega)} = \omega^{F^2(\omega)}$.*

Лемма 1. *Пусть $F^f(\omega)$ — семейство всех изотонных отображений упорядоченного множества (A,ω) в $\mathbb{R}$, имеющих конечное число значений. Тогда $\omega^{F(\omega)} = \omega^{F^f(\omega)}$.*

Доказательство. Достаточно проверить включение $\omega^{F^f(\omega)} \subseteq \omega^{F(\omega)}$. Действительно, пусть для $\mu, \nu \in \mathcal{P}_\omega(A)$ выполняется $\mu \leqq^{F^f(\omega)} \nu$. Надо показать, что при любом $\varphi \in F(\omega)$ будет $\overline{\varphi}(\mu) \leq \overline{\varphi}(\nu)$. Для каждого натурального k определим функцию $\varphi_k : A \to \mathbb{R}$, полагая $\varphi_k(a) = m/k$, где m — наибольшее целое число, для которого $m/k \leq \varphi(a)$. Так как φ ограничена, то φ_k имеет конечное число значений и, кроме того, φ_k изотонна. Получаем $\varphi_k \in F^f(\omega)$, откуда $\overline{\varphi}_k(\mu) \leq \overline{\varphi}_k(\nu)$. Ввиду того, что $\|\varphi_k - \varphi\| < 1/k$, последовательность φ_k равномерно сходится к φ, поэтому $\overline{\varphi}_k(\mu) \to \overline{\varphi}(\mu)$, $\overline{\varphi}_k(\nu) \to \overline{\varphi}(\nu)$. Учитывая, что $\overline{\varphi}_k(\mu) \leq \overline{\varphi}_k(\nu)$, получаем $\overline{\varphi}(\mu) \leq \overline{\varphi}(\nu)$. □

Лемма 2. *Пусть $F^f_+(\omega)$ — семейство всех неотрицательных изотонных отображений упорядоченного множества (A,ω) в $\mathbb{R}$, имеющих конечное число значений. Тогда $\omega^{F^f(\omega)} = \omega^{F^f_+(\omega)}$.*

Действительно, включение $\omega^{F^f(\omega)} \subseteq \omega^{F^f_+(\omega)}$ очевидно. Для доказательства обратного включения достаточно воспользоваться равенством $\overline{\varphi + \alpha}(\mu) = \overline{\varphi}(\mu) + \alpha$, где $\alpha = \max|\varphi(a)|$.

Лемма 3. *В линейном пространстве $\mathbb{R}^A$ коническая оболочка множества $F^2(\omega)$ совпадает с $F^f_+(\omega) : \operatorname{cone} F^2(\omega) = F^f_+(\omega)$.*

---

[1] Подмножество $B \subseteq A$ называется мажорантно-стабильным в упорядоченном множстве (A,ω), если условия $a \in B$ и $a' \geqq^\omega a$ влекут $a' \in B$. Двойственно определяется минорантно-стабильное подмножество. Для произвольного подмножества $B \subseteq A$ через $B^\uparrow$ обозначается его мажорантно-стабильное замыкание (совпадающее с множеством мажорант элементов B), и через $B^\downarrow$ — минорантно-стабильное замыкание (совпадающее с множеством минорант элементов B).

Доказательство. Ясно, что $F_+^f(\omega)$ есть выпуклый конус, содержащий $F^2(\omega)$, поэтому $\operatorname{cone} F^2(\omega) \subseteq F_+^f(\omega)$. Покажем обратное включение, т. е. что всякое неотрицательное изотонное отображение $\varphi : A \to \mathbb{R}$, имеющее конечное число значений, принадлежит выпуклой конической оболочке $F^2(\omega)$. Пусть значения функции φ суть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$, причем $\alpha_1 \geq 0$. Легко проверить справедливость следующего разложения функции φ:

$$\varphi = \alpha_1 \chi_{A_1} + (\alpha_2 - \alpha_1)\chi_{A_2} + \dots + (\alpha_r - \alpha_{r-1})\chi_{A_r}, \tag{1}$$

где χ_{A_k} — характеристическая функция множества $A_k = \{a \in A : \varphi(a) \geq \alpha_k\}$ $(k = \overline{1,r})$. Ввиду мажорантной стабильности подмножества A_k выполняется $\chi_{A_k} \in F^2(\omega)$, и в силу (1) получаем $\varphi \in \operatorname{cone} F^2(\omega)$. □

Лемма 4. *Для любого $H \subseteq F(\omega)$ выполняется $\omega^{\operatorname{cone} H} = \omega^H$.*

Доказательство. Включение $\omega^{\operatorname{cone} H} \subseteq \omega^H$ очевидно. Установим обратное включение. Пусть $\mu \leqq^{\omega^H} \nu$. Возьмем $\varphi \in \operatorname{cone} H$. Функция φ может быть представлена в виде неотрицательной линейной комбинации: $\varphi = \sum c_s \varphi_s$, где $\varphi_s \in H$, $c_s \geq 0$. По предположению $\overline{\varphi}_s(\mu) \leq \overline{\varphi}_s(\nu)$. Умножая эти неравенства на c_s, складывая и используя линейность интеграла Лебега, получаем $\overline{\varphi}(\mu) \leq \overline{\varphi}(\nu)$. □

Доказательство теоремы 1 получается последовательным применением лемм 1–4:

$$\omega^{F(\omega)} = \omega^{F^f(\omega)} = \omega^{F_+^f(\omega)} = \omega^{\operatorname{cone} F^2(\omega)} = \omega^{F^2(\omega)}.$$

Положим $\overline{\omega} = \omega^{F(\omega)}$. Отношение $\overline{\omega}$ будем называть *каноническим продолжением* порядка ω на множество вероятностных мер. По определению

$$\mu \leqq^{\overline{\omega}} \nu \iff (\forall \varphi \in F(\omega))\ \overline{\varphi}(\mu) \leq \overline{\varphi}(\nu) \quad (\mu, \nu \in \mathcal{P}_\omega(A)). \tag{2}$$

Так как $F^2(\omega)$ совпадает с множеством характеристических функций мажорантно-стабильных в (A, ω) подмножеств, из теоремы 1 получаем следующее эффективное выражение канонического продолжения порядка ω на множество вероятностных мер.

Следствие. Соотношение $\mu \leqq^{\overline{\omega}} \nu$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(B) \leq \nu(B)$ для любого мажорантно-стабильного подмножества $B \in M(\omega)$.

Теорема 2. *Каноническое продолжение порядка на множество вероятностных мер является отношением порядка.*

Рефлексивность и транзитивность отношения $\overline{\omega}$ очевидны. Доказательство антисимметричности отношения $\overline{\omega}$ основано на следующих трех леммах.

Лемма 5. *Подмножество $B \subseteq A$ является мажорантно-стабильным в упорядоченном множестве (A, ω) тогда и только тогда, когда его теоретико-множественное дополнение B' минорантно-стабильно.*

Действительно, пусть B мажорантно-стабильно, $a \in B'$ и $a_1 \leqq^\omega a$. Если бы выполнялось $a_1 \notin B'$, то тогда $a_1 \in B$, откуда $a \in B$ в противоречие с предположением. Таким образом, B' минорантно-стабильно. Вторая часть утверждения леммы 5 получается по принципу двойственности.

Напомним, что подмножество $B \subseteq A$ называется *выпуклым* в упорядоченном множестве (A, ω), если условия $b_1 \leqq^\omega a \leqq^\omega b_2$, $b_1, b_2 \in B$ влекут $a \in B$. В частности, всякое мажорантно-стабильное и всякое минорантно-стабильное подмножество является выпуклым.

Лемма 6. *Подмножество $B \subseteq A$ является выпуклым в упорядоченном множестве (A, ω) тогда и только тогда, когда $B = B^\uparrow \cap B^\downarrow$.*

Действительно, поскольку $B^{\uparrow}$ и $B^{\downarrow}$ выпуклы, то $B = B^{\uparrow} \cap B^{\downarrow}$ также выпукло. Проверим обратное. Включение $B \subseteq B^{\uparrow} \cap B^{\downarrow}$ выполняется при всяком B. Покажем, что при выпуклом B имеет место также обратное включение. Пусть $a \in B^{\uparrow} \cap B^{\downarrow}$, т. е. $a \geqq^{\omega} b_1$, $a \leqq^{\omega} b_2$ при некоторых $b_1, b_2 \in B$; по условию выпуклости $a \in B$.

Следствие 1. σ-алгебра, порожденная семейством $\mathrm{Co}(\omega)$ выпуклых в (A, ω) подмножеств, совпадает с σ-алгеброй, порожденной семейством мажорантно-стабильных подмножеств $\mathcal{B}(\mathrm{Co}(\omega)) = \mathcal{B}(M(\omega))$.

Действительно, включение $\mathcal{B}(M(\omega)) \subseteq \mathcal{B}(\mathrm{Co}(\omega))$ очевидно. Обратно, если $B \in \mathcal{B}(\mathrm{Co}(\omega))$, то ввиду лемм 5 и 6 $B = B^{\uparrow} \cap B^{\downarrow} \in \mathcal{B}(M(\omega))$, откуда $\mathcal{B}(\mathrm{Co}(\omega)) \subseteq \mathcal{B}(M(\omega))$.

Следствие 2. Всякое выпуклое в (A, ω) подмножество B может быть представлено в виде разности двух мажорантно-стабильных подмножеств, одно из которых содержится в другом

$$B = B^{\uparrow} \setminus (B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow}). \tag{3}$$

Действительно, используя лемму 6, имеем

$$B = B^{\uparrow} \cap B^{\downarrow} = B^{\uparrow} \setminus (B^{\downarrow})' = B^{\uparrow} \setminus B^{\uparrow} \cap (B^{\downarrow})' = B^{\uparrow} \setminus (B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow}).$$

Основную роль в этой серии лемм играет

Лемма 7. *Семейство* $\mathrm{Co}(\omega)$ *выпуклых подмножеств упорядоченного множества* (A, ω) *образует булеву полуалгебру в смысле* ([4], *с.28*).

Доказательство. Семейство $\mathrm{Co}(\omega)$ выпуклых подмножеств замкнуто относительно конечных пересечений и $A \in \mathrm{Co}(\omega)$. Остается проверить следующее условие:

(i). Для всякого $B \in \mathrm{Co}(\omega)$ его теоретико-множественное дополнение B' может быть представлено в виде конечного объединения попарно дизъюнктных подмножеств из $\mathrm{Co}(\omega)$.

Для проверки (i) заметим вначале, что $B^{\uparrow} \cup B^{\downarrow}$ есть множество элементов, сравнимых относительно порядка ω хотя бы с одним элементом из B. Представим B' в виде непересекающегося объединения двух подмножеств, первое из которых состоит из элементов, не принадлежащих B и сравнимых хотя бы с одним элеменом из B, а второе – из элементов, не сравнимых ни с одним элементом из B: $B' = ((B^{\uparrow} \cup B^{\downarrow}) \setminus B) \cup (B^{\uparrow} \cup B^{\downarrow})'$. Используя лемму 6, получаем

$$(B^{\uparrow} \cup B^{\downarrow}) \setminus B = (B^{\uparrow} \setminus B) \cup (B^{\downarrow} \setminus B) = B^{\uparrow} \setminus (B^{\uparrow} \cap B^{\downarrow}) \cup B^{\downarrow} \setminus (B^{\downarrow} \cap B^{\uparrow}) = (B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow}) \cup (B^{\downarrow} \setminus B^{\uparrow}),$$

откуда имеем окончательно

$$B' = (B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow}) \cup (B^{\downarrow} \setminus B^{\uparrow}) \cup (B^{\uparrow} \cup B^{\downarrow})'. \tag{4}$$

Равенство (4) дает искомое разложение подмножества B' в виде объединения трех попарно дизъюнктных выпуклых подмножеств (выпуклость подмножества $(B^{\uparrow} \cup B^{\downarrow})' = (B^{\uparrow})' \cap (B^{\downarrow})'$ следует из леммы 5).

Докажем теперь антисимметричность отношения $\overline{\omega}$. Пусть $\mu_1 \leqq^{\overline{\omega}} \mu_2$ и $\mu_2 \leqq^{\overline{\omega}} \mu_1$. Тогда по следствию теоремы 1 $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ $(\forall B \in M(\omega))$. Возьмем любое выпуклое подмножество $B \in \mathrm{Co}(\omega)$. Представляя B в виде разности мажорантно-стабильных подмножеств согласно (3) и учитывая, что $B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow} \subseteq B^{\uparrow}$, имеем $\mu_1(B) = \mu_1(B^{\uparrow}) - \mu_1(B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow})$, $\mu_2(B) = \mu_2(B^{\uparrow}) - \mu_2(B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow})$. Так как $B^{\uparrow}, B^{\uparrow} \setminus B^{\downarrow} \in M(\omega)$, то ввиду совпадения мер μ_1 и μ_2 на мажорантно-стабильных подмножествах, получаем $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ $(\forall B \in \mathrm{Co}(\omega))$. В силу единственности счетно-аддитивного продолжения меры с булевой полуалгебры на σ-алгебру [4] выполняется $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ $(\forall B \in \mathcal{B}(\mathrm{Co}(\omega)))$. Наконец, учитывая, что σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathrm{Co}(\omega))$ и $\mathcal{B}(M(\omega))$ совпадают (следствие 1 леммы 6), получаем окончательно $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ $(\forall B \in \mathcal{B}(M(\omega)))$, т. е. $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

2. Условия продолжимости порядка, заданного на выпуклом подмножестве линейного пространства

Пусть L — действительное линейное пространство, $C \subseteq L$, ρ^0 — отношение порядка на C. Будем говорить, что порядок ρ^0 является *продолжимым* на линейное пространство L, если на множестве L существует согласованный с линейной структурой порядок ρ, ограничение которого на C совпадает с ρ^0, т. е. $\rho \cap C^2 = \rho^0$ (такой порядок ρ называется продолжением порядка ρ^0 на все пространство L). В этом параграфе укажем условия, являющиеся необходимыми и достаточными для продолжимости порядка, заданного на выпуклом подмножестве линейного пространства.

Теорема 3. *Пусть C — непустое выпуклое подмножество линейного пространства L, ρ^0 — отношение порядка на C. Для того чтобы порядок ρ^0 был продолжимым на все L, необходимо и достаточно, чтобы при любых $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ выполнялись условия*

(A3) $x \leqq^{\rho^0} y \iff \alpha x + \beta z \leqq^{\rho^0} \alpha y + \beta z \quad (x, y, z \in C)$;

(A4) *если $x_1 \leqq^{\rho^0} y_1$, $x_2 \leqq^{\rho^0} y_2$, то равенство $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$ влечет $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.*

Замечание. Будем называть (A3) условием двусторонней выпуклости, а (A4) — условием положительной неразложимости нуля. Отметим, что следствием (A3) является условие

(A3′) $x_1 \leqq^{\rho^0} y_1,\, x_2 \leqq^{\rho^0} y_2 \Longrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \leqq^{\rho^0} \alpha y_1 + \beta y_2$,

означающее выпуклость отношения ρ^0 в линейном пространстве L^2.

Доказательство. Необходимость. Аксиома (A3) легко выводится из аксиом (A1) и (A2), следовательно она выполняется для любого конического порядка. Поскольку в записи условия (A3) участвуют лишь выпуклые комбинации элементов, оно сохраняется при переходе от конического порядка к его ограничению на любом выпуклом подмножестве пространства L. Аксиома (A4) следует из свойства заостренности конуса, наводящего продолжение порядка ρ^0.

Достаточность. Пусть ρ^0 удовлетворяет (A3) и (A4). Покажем, что ρ^0 совпадает с ограничением на C порядка, наведенного на линейном пространстве L конусом $K = \{\lambda(y - x) : \lambda \geq 0,\ x, y \in C,\ x \leqq^{\rho^0} y\}$. Убедимся, во-первых, что K действительно является выпуклым конусом. Хотя это можно сделать и непосредственно, быстрее приводит к цели следующий прием. Положим $\mathcal{D} = \{y - x : x, y \in C,\ x \leqq^{\rho^0} y\}$ и покажем, что множество $\mathcal{D}$ выпуклое. Пусть $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тогда $z_1 = y_1 - x_1$, $z_2 = y_2 - x_2$, где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in C$, $x_1 \leqq^{\rho^0} y_1$, $x_2 \leqq^{\rho^0} y_2$. Имеем $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$. Ввиду выпуклости множества C выполняется $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in C$, $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in C$, и по аксиоме (A3′), являющейся следствием (A3), $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqq^{\rho^0} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Таким образом, $(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \in \mathcal{D}$, что и доказывает выпуклость $\mathcal{D}$. Замечая, что $K = \bigcup\limits_{\lambda \geq 0} \lambda \mathcal{D}$, получаем, что K — выпуклый конус.

Установим теперь, что конус K заострен, т. е. $K \cap (-K) = \mathbf{0}$. Пусть $u \in K \cap (-K)$, тогда $u = \lambda_1(y_1 - x_1)$ и $u = -\lambda_2(y_2 - x_2)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $x_1 \leqq^{\rho^0} y_1$, $x_2 \leqq^{\rho^0} y_2$. Выполняется $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Покажем, что $u = \mathbf{0}$. Если $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, то это очевидно. Считая далее $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и полагая $\alpha = \lambda_1/\lambda_1 + \lambda_2$, $\beta = \lambda_2/\lambda_1 + \lambda_2$, имеем $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$, причем $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$. По аксиоме (A4) $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$, откуда $u = \mathbf{0}$.

Для завершения доказательства достаточности осталось проверить, что ρ^0 совпадает с ограничением на C конического порядка, наведенного конусом K; последнее сводится к тому, что при любых $x, y \in C$ имеет место равносильность

$$x \leqq^{\rho^0} y \iff (y - x) \in K.$$

Прямая импликация здесь очевидна. Установим обратную импликацию. Пусть $(y - x) \in K$, т. е. $y - x = \lambda(y_0 - x_0)$, где $x_0, y_0 \in C$, $\lambda \geq 0$, $x_0 \leqq^{\rho^0} y_0$. Так как C выпукло, то $((1/2)x + (1/2)y) \in C$, из соотношения $x_0 \leqq^{\rho^0} y_0$ по (A3) получаем

$$\frac{\lambda}{\lambda+2}x_0 + \frac{2}{\lambda+2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqq^{\rho^0} \frac{\lambda}{\lambda+2}y_0 + \frac{2}{\lambda+2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right). \tag{5}$$

Положим $z = \frac{\lambda}{\lambda+1}x_0 + \frac{1}{\lambda+1}y = \frac{\lambda}{\lambda+1}y_0 \frac{1}{\lambda+1}x$. Так как z есть выпуклая комбинация точек множества C, то $z \in C$. Рассмотрим элементы, стоящие в левой и правой частях (5). Имеем

$$\frac{\lambda}{\lambda+2}x_0 + \frac{2}{\lambda+2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{\lambda+2}x + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}z,$$

аналогично

$$\frac{\lambda}{\lambda+2}y_0 + \frac{2}{\lambda+2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{\lambda+2}y + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}z.$$

Таким образом, (5) переходит в соотношение

$$\frac{1}{\lambda+2}x + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}z \leqq^{\rho^0} \frac{1}{\lambda+2}y + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}z. \tag{6}$$

Применяя к (6) аксиому (A3), получаем $x \leqq^{\rho^0} y$ $\square$.

3. Основная теорема

Основным результатом данной работы является

Теорема 4. *Всякое упорядоченное множество может быть изоморфно вложено в некоторое упорядоченное линейное пространство.*

Доказательство. Пусть (A, ω) — произвольное упорядоченное множество. В качестве искомого линейного пространства возьмем линейное пространство $L_\omega(A)$, элементами которого являются действительные счетно-аддитивные функции, определенные на σ-алгебре $\mathcal{B}(M(\omega))$. Для $f_1, f_2 \in L_\omega(A)$ полагаем

$$\overbrace{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}(B) = \lambda_1 f_1(B) + \lambda_2 f_2(B) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathcal{B}(M(\omega))). \tag{7}$$

Из (7) следует, что если μ_1, μ_2 — вероятностные меры и $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ — также вероятностная мера. Таким образом, множество вероятностных мер $\mathcal{P}_\omega(A)$ является выпуклым подмножеством линейного пространства $L_\omega(A)$. Проверим, что определенное формулой (2) каноническое продолжение $\overline{\omega}$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Аксиома (A3) означает здесь, что при любых $\mu_1, \mu_2, \mu \in \mathcal{P}_\omega(A)$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ соотношения $\mu_1 \leqq^{\overline{\omega}} \mu_2$ и $\alpha\mu_1 + \beta\mu \leqq^{\overline{\omega}} \alpha\mu_2 + \beta\mu$ равносильны между собой. Действительно, первое из этих соотношений означает по определению, что при любом $\varphi \in F(\omega)$ выполняется $\overline{\varphi}(\mu_1) \leq \overline{\varphi}(\mu_2)$, а второе — что $\overline{\varphi}(\alpha\mu_1 + \beta\mu) \leq \overline{\varphi}(\alpha\mu_2 + \beta\mu)$. Так как $\overline{\varphi}(\alpha\mu_1 + \beta\mu) = \alpha\overline{\varphi}(\mu_1) + \beta\overline{\varphi}(\mu)$, $\overline{\varphi}(\alpha\mu_2 + \beta\mu) = \alpha\overline{\varphi}(\mu_2) + \beta\overline{\varphi}(\mu)$, то эти соотношения равносильны. Проверим (A4). Пусть $\mu_1 \leqq^{\overline{\omega}} \nu_1$, $\mu_2 \leqq^{\overline{\omega}} \nu_2$ и для некоторых $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ выполняется $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 = \alpha\nu_1 + \beta\nu_2$. Тогда при любом $B \in M(\omega)$ имеем $\alpha\mu_1(B) + \beta\mu_2(B) = \alpha\nu_1(B) + \beta\nu_2(B)$, т. е. $\alpha(\nu_1(B) - \mu_1(B)) + \beta(\nu_2(B) - \mu_2(B)) = 0$. Так как $\mu_1 \leqq^{\overline{\omega}} \nu_1$ и $\mu_2 \leqq^{\overline{\omega}} \nu_2$, то по следствию теоремы 1 $\nu_1(B) - \mu_1(B) \geq 0$ и $\nu_2(B) - \mu_2(B) \geq 0$. С учетом того, что $\alpha, \beta > 0$, вышенаписанное равенство возможно лишь при $\nu_1(B) = \mu_1(B)$, $\nu_2(B) = \mu_2(B)$. Как показано в доказательстве теоремы 2, отсюда следует $\nu_1 = \mu_1$ и $\nu_2 = \mu_2$.

Согласно теореме 3 отношение порядка $\overline{\omega}$ может быть продолжено до отношения порядка $\widetilde{\omega}$ на всем линейном пространстве $L_\omega(A)$, где порядок $\widetilde{\omega}$ наводится выпуклым конусом $\widetilde{K} = \{\lambda(\mu_2 - \mu_1) : \lambda \geq 0,\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_\omega(A),\ \mu_1 \leqq^{\overline{\omega}} \mu_2\}$. Покажем вложимость упорядоченного множества (A, ω) в упорядоченное линейное пространство $\langle L_\omega(A), \widetilde{\omega}\rangle$. Пусть δ_a — вырожденная вероятностная мера, сосредоточенная в точке a (формально δ_a определяется условием: для любого $B \in \mathcal{B}(M(\omega))$ $\delta_a(B) = 1$, если $a \in B$ и $\delta_a(B) = 0$ в противном случае). Нетрудно показать, что при любом $\varphi \in F(\omega)$ выполняется $\int\limits_A \varphi d(\delta_a) = \varphi(a)$, т. е. $\overline{\varphi}(\delta_a) = \varphi(a)$. Проверим равносильность

$$a_1 \leqq^{\omega} a_2 \Longleftrightarrow (\forall \varphi \in F(\omega))\ \varphi(a_1) \leq \varphi(a_2). \tag{8}$$

Импликация слева направо следует из определения изотонного отображения. Обратно, пусть выполнена правая часть (8). Полагая $\varphi = \chi_{a_1^{\uparrow}}$, где $\chi_{a_1^{\uparrow}}$ — характеристическая функция мажорантно-стабильного подмножества $a_1^{\uparrow}$, и учитывая, что $\chi_{a_1^{\uparrow}} \in F(\omega)$, получаем $\chi_{a_1^{\uparrow}}(a_2) \geq \chi_{a_1^{\uparrow}}(a_1) = 1$, откуда $\chi_{a_1^{\uparrow}}(a_2) = 1$, т. е. $a_2 \geqq^{\omega} a_1$. Поскольку $\varphi(a) = \overline{\varphi}(\delta_a)$, равносильность (8) может быть переписана в виде $a_1 \leqq^{\omega} a_2 \Longleftrightarrow \delta_{a_1} \leqq^{\overline{\omega}} \delta_{a_2}$. Так как $\overline{\omega}$ совпадает с ограничением порядка $\widetilde{\omega}$ на подмножестве $\mathcal{P}_{\omega}(A)$, то $a_1 \leqq^{\omega} a_2 \Longleftrightarrow \delta_{a_1} \leqq^{\widetilde{\omega}} \delta_{a_2}$. Последняя равносильность означает, что отображение $\delta : A \to L_{\omega}(A)$, определенное равенством $\delta(a) = \delta_a$, осуществляет изоморфное вложение упорядоченного множества (A, ω) в упорядоченное линейное пространство $\langle L_{\omega}(A), \widetilde{\omega} \rangle$. $\square$

Литература

1. Розен В.В. *Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные векторные пространства* // Упорядочен. множества и решетки. – Саратов, 1995, вып. 11. – С. 45–51.
2. Розен В.В. *Об упорядоченности множества вероятностных мер* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 11. – С. 72–74.
3. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1971. – 359 с.
4. Партасарати К. *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.* – М.: Мир, 1983. – 343 с.

Саратовский государственный университет

Поступила 17.10.1995