ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.983

А.Ю. НОВОСЕЛЬЦЕВ, И.Б. СИМОНЕНКО

ЗАВИСИМОСТЬ АСИМПТОТИКИ СТАРШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УСЕЧЕННОЙ КОНТИНУАЛЬНОЙ СВЕРТКИ ОТ СКОРОСТИ ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА СИМВОЛОМ

В работе исследуется асимптотическое поведение крайних собственных значений оператора усеченной континуальной свертки

$$[A_y f](t) = \int_0^y k(t-s)f(s)ds, \quad y > 0, \quad t \in [0, y], \tag{0.1}$$

с вещественнозначным символом $K(x)$, достигающим своего максимума в одной или в конечном числе точек.

Основными результатами данной работы являются теоремы 2.1 и 2.2, в которых установлено, что старшие собственные числа оператора A_y при $y \to +\infty$ стремятся к $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} K(x)$ со скоростью $1/y^\nu$, где $\nu > 0$ — порядок нуля функции $M - K(x)$.

Исследование представляет собой как бы ответ на работу [1], где аналогичный результат для оператора усеченной дискретной свертки был получен лишь для четных ν, а в других случаях доказаны оценки, использующие окаймляющие ν четные числа. При этом автор опирался на основополагающие результаты работ [2]–[4], содержащиеся также в [5] (русский перевод предыдущего издания этой книги — [6]). Наш метод не использует их и позволяет получить точные по порядку оценки сверху и снизу для любых $\nu > 0$.

1. Обозначения

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел соответственно; $\mathbf{i}$ — мнимая единица, $\mathbf{e}$ — основание натурального логарифма; μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Через $\mathcal{F}$ обозначим преобразование Фурье, действующее на функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ следующим образом: $[\mathcal{F}f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\mathbf{e}^{-\mathbf{i}xt}dt$. Хорошо известно, что преобразование Фурье обратимо и $\|f\|_{L_2} = \|\mathcal{F}f\|_{L_2}$.

Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}$ введем полуторалинейную форму ("скалярное произведение") $(f, g)_X = \int\limits_X f(x)\overline{g(x)}dx$ для функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, а также полунорму $\|f\|_X = \sqrt{(f, f)_X}$.

Пусть I, I_y — тождественные операторы в пространства $L_2(\mathbb{R})$ и $L_2(0, y)$ соответственно.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция f имеет в точке x_0 нуль порядка $\nu > 0$, если существуют такая окрестность U точки x_0 и такие положительные числа C_1 и C_2, что для любого $x \in U - \{x_0\}$ выполняются неравенства $C_1 \leqslant \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\nu} \leqslant C_2$.

2. Основные результаты

Пусть всюду далее $k \in L_1(\mathbb{R})$ — ядро оператора A_y, определенного равенством (0.1) и действующего в пространстве $L_2(0,y)$, $K = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}k$ — его символ, K — вещественнозначная функция, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} K(x) = 1$. Пусть, кроме того, $N(y)$ — число положительных собственных чисел оператора A_y с учетом их кратности; $\lambda_n(y)$ $(n \in \mathbb{N},\ n \leqslant N(y))$ — упорядоченный набор этих чисел, занумерованных в порядке убывания. Введем также оператор $[Af](t) = \int\limits_{\mathbb{R}} k(t-s)f(s)ds$ свертки A, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

В этом разделе сформулируем основные результаты работы, доказательство которых будет дано в разделах 3–5.

Теорема 2.1. *Пусть функция $1-K(x)$ имеет на вещественной прямой единственный нуль в точке $x=0$ и его порядок равен $\nu > 0$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ существуют такие положительные константы y_0, C_- и C_+, что при всех $y > y_0$ выполняется неравенство $N(y) \geqslant j$ и для собственного числа $\lambda_j(y)$ имеют место оценки*

$$1 - \frac{C_-}{y^\nu} \leqslant \lambda_j(y) \leqslant 1 - \frac{C_+}{y^\nu}.$$

Теорема 2.2. *Пусть функция $1-K(x)$ имеет на вещественной прямой нули в точках x_l, $l \in \{1,2,\ldots,n\}$, и только в них; порядки этих нулей равны $\nu_l > 0$. Обозначим $\nu_{\max} = \max\limits_{l\in\{1,2,\ldots,n\}} \nu_l$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ существуют такие положительные константы y_0, C_- и C_+, что при всех $y > y_0$ выполняется неравенство $N(y) \geqslant j$ и для собственного числа $\lambda_j(y)$ имеют место оценки*

$$1 - \frac{C_-}{y^{\nu_{\max}}} \leqslant \lambda_j(y) \leqslant 1 - \frac{C_+}{y^{\nu_{\max}}}.$$

В разделах 3 и 4 будем считать, что символ K удовлетворяет условию теоремы 2.1.

3. Оценка снизу

Лемма 3.1. *Существуют такие константы $y_0 > 0$ и $\widetilde{C}_- > 0$, что при всех $y > y_0$ выполняется неравенство $N(y) \geqslant 1$ и для старшего собственного числа $\lambda_1(y)$ оператора A_y имеет место оценка*

$$1 - \frac{\widetilde{C}_-}{y^\nu} \leqslant \lambda_1(y).$$

Доказательство. Пусть $C > 0$ — такое число, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $1 - K(x) \leqslant C\,|x|^\nu$. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant \frac{\nu+1}{2}$, $\alpha = \frac{y}{2m}$. Введем функции $\Phi_m(x) = C_m\big(\frac{\sin x}{x}\big)^m$, где $C_m > 0$ — нормировочная константа, т. е. C_m — такое число, что $\|\Phi_m\| = 1$. Пусть $\varphi_m = \mathcal{F}^{-1}\Phi_m$, $\psi_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi_m\big(\frac{x}{\alpha} - m\big)$, $\Psi_m = \mathcal{F}\psi_m$.

Заметим, что $2\varphi_1$ — характеристическая функция сегмента $[-1,1]$, поэтому $\operatorname{supp}\varphi_m \subset [-m,m]$, $\operatorname{supp}\psi_m \subset [0,y]$. В силу свойств преобразования Фурье $\Psi_m(x) = \sqrt{\alpha}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\alpha m x}\Phi_m(\alpha x)$, $\|\Psi_m\| = \|\psi_m\| = \|\varphi_m\| = \|\Phi_m\| = 1$.

Далее имеем

$$\begin{aligned}
&\big((I_y - A_y)(\psi_m|_{[0,y]}), \psi_m|_{[0,y]}\big)_{[0,y]} = \big([(I-A)\psi_m]|_{[0,y]}, \psi_m|_{[0,y]}\big)_{[0,y]} = \\
&\quad = \big((I-A)\psi_m, \psi_m\big)_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} (1 - K(x))\,|\Psi_m(x)|^2\,dx \leqslant \alpha C \int_{\mathbb{R}} |x|^\nu\,|\Phi_m(\alpha x)|^2\,dx = \\
&\qquad = \frac{C}{\alpha^\nu}\int_{\mathbb{R}} |x|^\nu\,|\Phi_m(x)|^2\,dx = \frac{C2^\nu m^\nu C_m^2}{y^\nu}\int_{\mathbb{R}} |x|^\nu \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{2m} dx = \frac{\widetilde{C}_-}{y^\nu},
\end{aligned}$$

где $\widetilde{C}_- = C2^\nu m^\nu C_m^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^\nu \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{2m} dx$.

Отсюда следует, что оператор $I_y - A_y$ имеет собственное число на отрезке $[0, \frac{\tilde{C}_-}{y^\nu}]$, а оператор A_y — на отрезке $[1-\frac{\tilde{C}_-}{y^\nu}, 1]$. Выберем y_0 так, чтобы $1-\frac{\tilde{C}_-}{y_0^\nu} > 0$. Тогда при всех $y > y_0$ оператор A_y будет иметь положительное собственное значение, для которого будет выполняться указанная оценка. □

Лемма 3.2. *Для любого $j \in \mathbb{N}$ существуют такие константы $y_0 > 0$ и $C_- > 0$, что при всех $y > y_0$ выполняется неравенство $N(y) \geqslant j$ и для собственного числа $\lambda_j(y)$ оператора A_y имеет место оценка*

$$1 - \frac{C_-}{y^\nu} \leqslant \lambda_j(y).$$

Доказательство. Пусть $C, m, \Phi_m, C_m, \varphi_m, \widetilde{C}_-$ — те же, что и при доказательстве леммы 3.1, $\alpha = \dfrac{y}{2mj}$. Введем функции $\psi_{m,l} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi_m(\frac{x}{\alpha} - (2l-1)m)$, $\Psi_{m,l} = \mathcal{F}\psi_{m,l}$ для $l \in \{1, 2, \dots, j\}$. Тогда $\operatorname{supp}\psi_{m,l} \subset [\frac{l-1}{j}y, \dfrac{l}{j}y]$, $\Psi_{m,l}(x) = \sqrt{\alpha}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\alpha(2l-1)mx}\Phi_m(\alpha x)$, $\|\Psi_{m,l}\| = \|\psi_{m,l}\| = \|\varphi_m\| = \|\Phi_m\| = 1$. Заметим, что носители функций $\psi_{m,l}$ при разных l имеют не более одной общей точки, а значит, эти функции образуют ортонормированный базис в j-мерном подпространстве пространства $L_2(0, y)$.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j \in \mathbb{C}$, $\psi = \sum\limits_{l=1}^{j} \gamma_l \psi_{m,l}$, $\|\psi\| = 1$, $\Psi = \mathcal{F}\psi$. Действуя так же, как и в лемме 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
\left((I_y - A_y)(\psi|_{[0,y]}), \psi|_{[0,y]}\right)_{[0,y]} &= \int_{\mathbb{R}} (1 - K(x))\, |\Psi(x)|^2\, dx \leqslant \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}} |x|^\nu \left| \sum_{l=1}^{j} \gamma_l \Psi_{m,l}(x) \right|^2 dx = C \sum_{l=1}^{j} |\gamma_l|^2 \int_{\mathbb{R}} |x|^\nu\, |\Psi_{m,l}(x)|^2\, dx = \\
&= \alpha C \int_{\mathbb{R}} |x|^\nu\, |\Phi_m(\alpha x)|^2\, dx = \frac{C 2^\nu m^\nu j^\nu C_m^2}{y^\nu} \int_{\mathbb{R}} |x|^\nu \left| \frac{\sin x}{x} \right|^{2m} dx = \frac{j^\nu \widetilde{C}_-}{y^\nu} = \frac{C_-}{y^\nu},
\end{aligned}$$

где $C_- = j^\nu \widetilde{C}_-$.

Таким образом, существует такое подпространство пространства $L_2(0, y)$ размерности j, что для любой нормированной функции ψ имеем $((I_y - A_y)\psi, \psi) \leqslant \frac{C_-}{y^\nu}$. Из этого следует, что оператор $I_y - A_y$ имеет на отрезке $[0, \frac{C_-}{y^\nu}]$ не менее j собственных чисел, а оператор A_y — не менее j собственных чисел на отрезке $[1 - \frac{C_-}{y^\nu}, 1]$. Выберем y_0 так, чтобы $1 - \frac{C_-}{y_0^\nu} > 0$. Тогда при всех $y > y_0$ оператор A_y будет иметь не менее j положительных собственных значений и для $\lambda_j(y)$ будет выполняться указанная оценка. □

4. Оценка сверху

Здесь сначала докажем несколько требуемых в дальнейшем вспомогательных положений, представляющих, возможно, и некоторый самостоятельный интерес.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $m = \mu(\operatorname{supp} f) < +\infty$, $F = \mathcal{F}f$. Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| \leqslant \sqrt{\frac{m}{2\pi}}\, \|F\|_{L_2}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$|F(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathbf{e}^{-\mathbf{i}xt} dt \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\operatorname{supp} f} |f(t)|\, \left|\mathbf{e}^{-\mathbf{i}xt}\right| dt.$$

Применим неравенство Коши–Буняковского

$$|F(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\mu(\operatorname{supp} f)}\sqrt{\int_{\operatorname{supp} f} |f(t)|^2\, dt} = \sqrt{\frac{m}{2\pi}}\,\|f\|_{L_2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi}}\,\|F\|_{L_2}. \quad \square$$

Теорема 4.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, X измеримо, $0 < \mu(X) < +\infty$, $m = \frac{\pi}{\mu(X)}$. Тогда для любой такой функции $F \in L_2(\mathbb{R})$, что $\mu(\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}F) \leqslant m$, имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\|F\|_{L_2} \leqslant \|F\|_{\mathbb{R}\setminus X}.$$

Доказательтство. Воспользовавшись теоремой 4.1, получаем

$$\|F\|_{L_2}^2 = \|F\|_{\mathbb{R}\setminus X}^2 + \int_X |F(x)|^2\, dx \leqslant \|F\|_{\mathbb{R}\setminus X}^2 + \mu(X)\frac{m}{2\pi}\,\|F\|_{L_2}^2,$$

$$\left(1 - \mu(X)\frac{m}{2\pi}\right)\|F\|_{L_2}^2 \leqslant \|F\|_{\mathbb{R}\setminus X}^2, \quad \frac{1}{2}\,\|F\|_{L_2}^2 \leqslant \|F\|_{\mathbb{R}\setminus X}^2. \quad \square$$

Лемма 4.1. *Для любого $y_0 > 0$ существует такая константа $C_+ > 0$, что при всех $y > y_0$ для любого собственного числа λ оператора A_y имеет место оценка*

$$\lambda \leqslant 1 - \frac{C_+}{y^\nu}.$$

Доказательство. Выберем константу $C > 0$ так, чтобы для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство

$$1 - K(x) \geqslant C \min\left\{ |x|^\nu, \left(\frac{\pi}{2y_0}\right)^\nu \right\}.$$

Пусть $y > y_0$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [0, y]$, $\|f\| = 1$, $F = \mathcal{F}f$, $\delta = \frac{\pi}{2y}$, $X = [-\delta, \delta]$. Воспользовавшись теоремой 4.2, получим оценку

$$\left((I_y - A_y)(f|_{[0,y]}), f|_{[0,y]}\right)_{[0,y]} = \int_{\mathbb{R}} (1 - K(x))\,|F(x)|^2\, dx \geqslant$$

$$\geqslant C\delta^\nu \int_{|x|>\delta} |F(x)|^2\, dx = C\delta^\nu\,\|F\|_{\mathbb{R}\setminus X}^2 \geqslant C\left(\frac{\pi}{2y}\right)^\nu \frac{1}{2}\,\|F\|_{L_2}^2 \geqslant \frac{C_+}{y^\nu},$$

где $C_+ = \frac{C\pi^\nu}{2^{\nu+1}}$. Следовательно, старшее собственное число оператора A_y не превышает $1 - \dfrac{C_+}{y^\nu}$, но тогда эта оценка верна и для всех остальных собственных чисел. $\square$

5. Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Теорема 2.1 непосредственно следует из лемм 3.2 и 4.1.

Доказательство теоремы 2.2 отличается от доказательства теоремы 2.1 лишь техническими деталями. Для доказательства леммы, аналогичной лемме 3.2, достаточно выбрать любую точку, в которой функция $1 - K(x)$ имеет нуль порядка $\nu_{\max}$, и сдвинуть функции Φ_m так, чтобы они достигали максимума в этой точке. Для получения оценки сверху (аналога леммы 4.1) следует в качестве множества X взять объединение достаточно малых окрестностей всех нулей функции $1 - K(x)$.

Литература

1. Serra S. *On the extreme eigenvalues of Hermitian (block) Toeplitz matrices* // Linear Algebra and its Applications. – 1997. – V. 270. – P. 109–129.
2. Szegö G. *Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen*, I // Math. Ztschr. – 1920. – № 6. – P. 167–202.
3. Szegö G. *Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen*, II // Math. Ztschr. – 1921. – № 9. – P. 167–190.
4. Szegö G. *On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function* // Festskrift Marcel Riesz. – Lund. – 1952. – P. 228–238.
5. Grenander U., Szegö G. *Toeplitz forms and their applications.* – New York: Chelsea, 1984. – 245 p.
6. Гренандер У., Сегё Г. *Теплицевы формы и их приложения.* – М.: Ин. лит., 1961. – 308 с.

Ростовский государственный университет

Поступила 16.06.2003