ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 512.544

А.И. ДОЛГАРЕВ

ГРУППЫ ПРОСТОЙ ЭКСПОНЕНТЫ СТУПЕНИ 2 С ВОСЕМЬЮ ОБРАЗУЮЩИМИ И ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ

Ниже исследуются нильпотентные группы ступени 2 простой экспоненты p, порожденные восемью образующими элементами и удовлетворяющие условиям, в каком-то смысле симметризующим группы (т. н. условия минимальности и насыщения). По группе составляется таблица связей, основанная на свойствах коммутаторов образующих элементов. Таблица представляет собой латинский квадрат, симметричный относительно диагонали. По таблице связей строятся группы рассматриваемого вида (при $p = 2$ однозначно), установлены некоторые свойства групп, найдены неизоморфные группы.

1. Группы периода p и таблицы связей

1.1. *Группы периода p с циклическим коммутантом.* Пусть N_p — группа периода p, где p — простое число, т. е. для всякого элемента $g \in N$ $g^p = e$, e — единичный элемент группы. Всякая p-группа нильпотентна. Считаем, что ступень нильпотентности группы N_p равна 2. Следовательно, коммутант $C(N_p)$ группы N_p лежит в ее центре $Z(N_p) : C(N_p) \leq Z(N_p)$. Известно, что коммутант нильпотентной группы лежит в ее подгруппе Фраттини ([1], с. 178), а последняя состоит из необразующих элементов группы ([1], с. 177). Значит, если $a_1, a_2, \dots, a_m$ — неприводимая система образующих элементов группы N_p, то среди a_i нет элементов коммутанта.

Если a, b, c — произвольные элементы группы N_p, то для их коммутаторов выполняются свойства

$$[b, a] = [a, b]^{-1}, \quad [ab, c] = [a, c][b, c], \quad [a^n, b] = [a, b]^n.$$

Рассмотрим группу N_p с m образующими элементами, далее всегда $a_1, a_2, \dots, a_m$ — неприводимая система образующих элементов, m — четное число.

Пусть порядок коммутанта $C(N_p)$ равен p и $Z(N_p) = C(N_p)$. Обозначим $[a_2, a_1] = c$. На основании свойств коммутаторов выполняются

Лемма. *Для любого a_i, $i > 2$, в подгруппе $\langle a_1, a_2, a_i\rangle$, порожденной элементами a_1, a_2, a_i, существует такой элемент h, что $\langle a_1, a_2, a_i\rangle = \langle a_1, a_2\rangle \times \langle h\rangle$.*

Теорема 1. *Группа N_p с четным числом образующих элементов, для которой $Z(N_p) = C(N_p) = \langle c\rangle$, обладает такой системой образующих элементов $a_1, a_2, \dots, a_m$, что*

$$[a_2, a_1] = [a_4, a_3] = \cdots = [a_m, a_{m-1}] = c,$$

остальные $[a_i, a_j] = e$.

1.2. *Условия минимальности и насыщения.* Рассмотрим группу N_p периода p с восемью образующими a_i, $i = \overline{1, 8}$. Наложим на группу N_p следующие условия.

1. $Z(N_p) = C(N_p)$.

2. Всякие два элемента a_i, a_j, $i \neq j$, неперестановочны.

3. Условие минимальности. Для всякого фиксированного j коммутаторы $[a_i, a_j] = c_i$, $i = \overline{1, 7}$, таковы, что $\langle c_i\rangle \cap = \langle c_k\rangle = \langle e\rangle$. Считаем, что некоторые коммутаторы $[a_i, a_j]$ образующих элементов группы N_8 являются образующими элементами коммутанта $C(N_p)$, а остальные являются степенями этих образующих.

4. Условие насыщения (и симметричности). Среди коммутаторов, образующих $[a_i, a_j] \neq e$, в каждой из подгрупп $\langle c_k \rangle$ коммутанта содержится по 4 коммутатора. В общем случае в каждой из подгрупп $\langle c_k \rangle$ коммутанта содержится по $\frac{m}{2}$ коммутаторов образующих элементов группы N_p с m образующими.

5. Множество пар с различными индексами $[i, j]$ образующих a_i разбивается значениями коммутаторов $[a_i, a_j]$, входящих в подгруппы $\langle c_k \rangle$, на классы эквивалентности, здесь c_k — образующие коммутанта.

Существование групп, удовлетворяющих перечисленным условиям, доказано в п. 1.5. Условия 3 и 5 основаны на теореме из п. 1.1.

Коммутант $C(N_p)$ группы N_p является элементарной абелевой группой порядка p^7. Рассматриваемые группы имеют порядок $p^{8+7} = p^{15}$.

Существуют группы N_p, для которых перечисленные условия не выполняются (частично или все сразу). Группу N_p с m образующими, удовлетворяющую приведенным условиям, обозначаем далее N_p^m.

1.3. *Группы и наборы пар индексов.* Множество индексов образующих элементов группы N_p^m обозначаем $M = \{1, 2, \dots, 8\}$. Вместо коммутатора образующих $[a_i, a_j]$ часто будем писать неупорядоченную пару индексов $[i, j]$. Образующие элементы коммутанта обозначаем c_k, $k = \overline{1,7}$; индексы k элементов c_k не связываем с индексами образующих элементов a_i группы N_p^m.

В множестве $(M \times M)'$, отличном от $M \times M$, рассматриваем множество неупорядоченных пар индексов из M, в каждой паре индексы различны. Множество $(M \times M)'$ разбиваем на классы по условиям из п. 1.2, называем эти классы *связями.* Согласно п. 1.2 четыре значения коммутаторов образующих элементов группы N_p^m лежат в одной подгруппе $\langle c_k \rangle$. Пары индексов этих коммутаторов составляют связь, каждая связь состоит из четырех пар. Связь $[i, j], [s, t], \dots$, т. е. класс неупорядоченных пар индексов образующих a_i, для которых $[a_i, a_j], [a_s, a_t], \dots \in \langle c_k \rangle$, называется *$k$-связью.* Имеется, например, следующий набор связей, составленный согласно условиям п. 1.2:

1-связь	[1,2]	[3,4]	[5,6]	[7,8]
2-связь	[1,3]	[2,8]	[4,5]	[6,7]
3-связь	[1,4]	[2,7]	[3,5]	[6,8]
4-связь	[1,5]	[2,6]	[3,8]	[4,7]
5-связь	[1,6]	[2,5]	[3,7]	[4,8]
6-связь	[1,7]	[2,3]	[4,6]	[5,8]
7-связь	[1,8]	[2,4]	[3,6]	[5,7]

Таблица 1

Подгруппу коммутанта, порожденную всеми c_k, кроме c_j, обозначим C_j. Фактор-группа N_p/C_j имеет коммутант порядка p, и ее строение близко к описанному в теореме из п. 1.1. Это служит основанием для составления таблицы 1.

Свойства связей:

1. 1-связь выделяется среди других связей тем, что индексы $\overline{1,8}$ в ее парах могут быть упорядочены по возрастанию;
2. каждая связь содержит точно одну пару со всяким индексом из множества индексов M;
3. набор индексов, входящих в пары каждой связи, совпадает с множеством M;
4. номер связи k определяется первой парой $[1, k+1]$.

1.4. *Таблица связей группы.* Удобнее связи в множестве индексов M образующих группы N_p^m представить в виде таблицы связей группы. Составим таблицу размерами 8×8, строки и столбцы которой занумерованы (см. табл. 2). Если пара $[i, j]$ принадлежит k-связи, то в клетку таблицы связей на пересечении i-й строки и j-го столбца ставим номер k. Таблице 1, в которой перечислены все связи группы N_p, соответствует таблица связей 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	6	4	7	5
3	2	3		1	5	7	4	6
4	3	2	1		7	6	5	4
5	4	6	5	7		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	5	6	4	3	2	1	

Таблица 2

Свойства таблицы связей рассматриваемых групп:

1. диагональ таблицы связей пуста;

2. таблица симметрична относительно диагонали;

3. каждый номер связи в таблице встречается 8 раз: 4 раза над диагональю и 4 раза под диагональю;

4. в каждой строке и каждом столбце таблицы каждый номер связи встречается по одному разу.

Таким образом, таблица связей группы есть латинский квадрат 8×8, клетки которого заполнены номерами 1–7 или не заполнены ничем.

1.5. *Соответствие между группами периода p и таблицами связей группы.* Считаем, что заданы образующие элементы группы N_p^m и значения коммутаторов этих образующих. Тогда однозначно определяется таблица связей группы.

Докажем обратное утверждение.

Теорема 2. *Всякая таблица размеров* 8×8*, для которой выполняются условия* 1–4 *из п.* 1.4*, определяет группу* N_p^8*.*

Доказательство. Пусть задана таблица 8×8, удовлетворяющая указанным условиям. Вводим элементы a_i, $i = \overline{1,8}$, индексы которых суть номера входов данной таблицы. Выписываем коммутаторы $[a_i, a_j] = c_k^{t^{ij}}$, где $1 \leq t^{ij} \leq p-1$, номер k расположен в таблице на пересечении i-й строки и j-го столбца. При $k = 1$ все $t^{ij} = 1$. Для остальных значений k при $p \geq 3$ возможно $t^{ij} \neq 1$, но всегда $t^{1j} = 1$. Рассматриваем множество $\mathbf{G}$ всевозможных элементов вида $g = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_8^{n_8} c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_7^{r_7}$.

Пусть $h = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_8^{m_8} c_1^{s_1} c_2^{s_2} \ldots c_7^{s_7}$ — еще один элемент множества. Произведение gh составляем по правилу

$$gh = a_1^{n_1+m_1} a_2^{n_2+m_2} \ldots a_8^{n_8+m_8} c_1^{r_1+s_1+u_1} c_2^{r_2+s_2+u_2} \ldots c_7^{r_7+s_7+u_7},$$

где $u_1 = n_2 m_1 + n_4 m_3 + n_8 m_7$, индексы произведений $n_j m_i$ составляют пары $[i,j]$ 1-связи; $u_2 = n_3 m_1 + t^{ij} n_j m_i$, коэффициенты t^{ij} вводятся для пар $[i,j]$ 2-связи, начиная со второй пары, и так далее; $u_7 = n_8 m_1 + t^{ij} n_j m_i$, коэффициенты t^{ij} вводятся для пар $[i,j]$ 7-связи, начиная со второй пары.

Показатели степеней n_i, m_i, r_k, s_k элементов a_i, c_k, $i = \overline{1,8}$, $k = \overline{1,7}$, суть скаляры из поля Галуа $FG(p)$ характеристики p, принимают значения $0, 1, \ldots, p-1$. Элементу g множества $\mathbf{G}$ соответствует кортеж скаляров из $FG(p)$ длины $8 + 7 = 15$

$$\rho = (n_1, n_2, \ldots, n_8, r_1, r_2, \ldots, r_7).$$

Множество кортежей обозначим Σ. Соответствие между элементами множества $\mathbf{G}$ и кортежами множества Σ биективно. Операция над кортежами согласно умножению в множестве $\mathbf{G}$ такова

$$\begin{aligned}(n_1, n_2, \ldots, n_8, r_1, r_2, \ldots, r_7) + (m_1, m_2, \ldots, m_8, s_1, s_2, \ldots, r_7) = \\ = (n_1 + m_1, n_2 + m_2, \ldots, n_8 + m_8, r_1 + s_1 + n_2 m_1 + n_4 m_3 + n_8 m_7, \\ r_2 + s_2 + n_3 m_1 + t^{ij} n_j m_i, \ldots, r_7 + s_7 + n_8 m_1 + t^{ij} n_j m_i).\end{aligned}$$

Суммирование в каждой компоненте кортежей производится по $\bmod p$. Сложение кортежей ассоциативно, т. е. умножение элементов в множестве $\mathbf{G}$ ассоциативно. Нулевой кортеж: $\vartheta = (0, 0, \ldots, 0)$, $\rho + \vartheta = \rho$. В $\mathbf{G}$ нулевому кортежу соответствует единичный элемент e, $ge = g$. Противоположным для кортежа ρ является

$$-\rho = (p - n_1, p - n_2, \ldots, p - n_8, p - r_1, p - r_2, \ldots, p - r_7).$$

Кортеж $-\rho$ определяет в $\mathbf{G}$ элемент, обратный для g. Имеем группу $(\Sigma, +)$ и изоморфную ей группу $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$. Нетрудно проверить, что ступень нильпотентности группы $\mathbf{G}$ равна 2, т. е. $\mathbf{G} = N_p^8$. □

Заданная таблица, по которой мы строили группу, является таблицей связей этой группы N_p^8. Генетический код группы N_p^9 выписывается согласно таблице связей

$$N_p^8 = \langle a_i, c_k \mid [a_i, a_j] = c_k^{t_{ij}},\ i, j = \overline{1,8},\ k = \overline{1,7},\ 1 \le t_{ij} \le p - 1 \rangle.$$

Согласно теореме 1 при $k = 1$ имеем $t_{ij} = 1$. Для остальных значений k при $p \ge 3$ возможно $t_{ij} \ne 1$, но всегда $t_{1j} = 1$, и, тем самым, имеется несколько неизоморфных групп с одной и той же таблицей связей.

При $p = 2$ есть только одна возможность для значений t^{ij}. В этом случае все $t^{ij} = 1$. Таким образом, выполняется

Теорема 3. *При $p = 2$ всякая таблица связей определяет единственную группу N_p^8.*

Теперь получается следующая важная

Теорема 4. *Различных (неизоморфных) групп, удовлетворяющих условиям минимальности и насыщения, существует не больше, чем различных таблиц связей со свойствами, перечисленными в п.* 1.4.

Доказательство. Каждая группа, удовлетворяющая условиям 1–5 из п. 1.2, имеет таблицу связей, свойства которой перечислены в п. 1.4. Очевидно, группы, имеющие одинаковые таблицы связей, изоморфны. Но одна группа может иметь различные таблицы связей. Это означает, что различных групп, обладающих свойствами минимальности и насыщения, существует не больше, чем различных таблиц связей с заданными свойствами. □

Существуют еще следующие таблицы связей, которые согласно теореме 1 задают группы N_p^8:

	1	3	2	4	5	7	6	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	5	4	7	6
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	2	1		7	6	5	4
5	4	5	6	7		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	6	5	4	3	2	1	

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	4	5	6
3	2	3		1	5	6	7	4
4	3	2	1		6	7	4	5
5	4	7	5	6		1	2	3
6	5	4	6	7	1		3	2
7	6	5	7	4	2	3		1
8	7	6	4	5	3	2	1	

Таблица 4

	1	3	2	4	5	7	6	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	6	4	5
3	2	3		1	5	4	7	6
4	3	2	1		6	7	5	4
5	4	7	5	6		1	2	3
6	5	6	4	7	1		3	2
7	6	4	7	5	2	3		1
8	7	5	6	4	3	2	1	

Таблица 5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	6	7	4	5
3	2	3		1	7	6	5	4
4	3	2	1		5	4	7	6
5	4	6	7	5		1	2	3
6	5	7	6	4	1		3	2
7	6	4	5	7	2	3		1
8	7	5	4	6	3	2	1	

Таблица 6

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	6	5	3
3	2	3		1	5	4	7	6
4	3	2	1		6	7	4	5
5	4	7	5	6		1	2	3
6	5	6	4	7	1		3	2
7	6	5	7	4	2	3		1
8	7	4	6	5	3	2	1	

Таблица 7

1.6. *Замена таблицы связей.* Таблицы связей группы могут быть составлены для ее различных систем образующих. Кроме того, из одной таблицы связей можно получить несколько других, перенумеровывая образующие элементы группы и связи.

Например, 2-связи в таблице связей 2 дадим новый номер 1. По таблице 1 2-связь состоит из пар $[1,3]$, $[2,4]$, $[5,7]$, $[6,8]$. Составляем промежуточную таблицу связей 2.2п, на входах которой записываем индексы образующих элементов группы в том порядке, как они выписаны в парах 2-связи, т. е. в порядке 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8. Проставляем номер 2 в таблице 2.2п соответственно строке 2-связи таблицы 1: на пересечениях строки 1 и столбца 3, строки 2 и столбца 4, строки 5 и столбца 7, строки 6 и столбца 8. Затем в таблицу 2.2п вносим номер 1 по строке 1-связи таблицы 1, затем номер 3 и т. д.

Теперь в таблице 2.2п перенумеруем образующие и связи, записывая новые индексы образующих на входах таблицы в порядке возрастания и новые номера связей в порядке возрастания в первой строке таблицы. После этого получим окончательную таблицу 2.2. Перенумерации образующих соответствует подстановка

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

перенумерации связей соответствует подстановка

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Далее заменяем старые номера связей в таблице 2.2п новыми номерами согласно подстановке γ и получаем таблицу 2.2.

	1	3	2	4	5	7	6	8
1		2	1	3	4	6	5	7
3	2		3	1	5	4	7	6
2	1	3		2	6	7	4	5
4	3	1	2		7	5	6	4
5	4	5	6	7		2	1	3
7	6	4	7	5	2		3	1
6	5	7	4	6	1	3		2
8	7	6	5	4	3	1	2	

Таблица 2.2п

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	6	4	7	5
3	2	3		1	5	7	4	6
4	3	2	1		7	6	5	4
5	4	6	5	7		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	5	6	4	3	2	1	

Таблица 2.2

По описанному образцу получим еще одну таблицу связей. 6-связи в таблице 1 дадим новый номер 1. На входах промежуточной таблицы 2.6п проставляем индексы образующих по строке 6-связи таблицы 1. Затем в таблицу вносим номера связей по таблице 1. Производим подстановки индексов образующих и номеров связи

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

По подстановке γ заменяем старые номера связей новыми номерами в таблице 2.6п, получаем таблицу 2.6.

	1	7	2	5	3	8	4	6
1		6	1	4	2	7	3	5
7	6		7	2	4	1	5	3
2	1	7		6	3	5	2	4
5	4	2	6		5	3	7	1
3	2	4	3	5		6	1	7
8	7	1	5	3	6		4	2
4	3	5	2	7	1	4		6
6	5	3	4	1	7	2	6	

Таблица 2.6п

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		5	4	3	2	7	6
3	2	5		1	6	7	4	3
4	3	4	1		7	6	5	2
5	4	3	6	7		1	2	5
6	5	2	7	6	1		3	4
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	6	3	2	5	4	1	

Таблица 2.6

Таблицы 2 и 2.2 совпадают. В данном случае перенумерация не изменяет таблицы связей группы. Таблицы 2 и 2.6 различны, т. е. для одной группы в результате перенумерации получены различные таблицы связей.

2. Свойства групп по таблицам связей

2.1. *Сравнение различных таблиц связей группы.* Произведем всевозможные перенумерации в таблицах связей 2–7 так, как это описано в п. 1.6. Перенумерацию производим с целью сделать 1-связью каждую из k-связей. Полученную из таблицы d ($d = \overline{2,7}$), в которой k-связь стала 1-связью, таблицу, обозначаем как $d.k$. По такому же принципу обозначены в п. 1.6 таблицы 2.2 и 2.6. Затем сравним полученные таблицы связей для выявления изоморфных групп N_p^8, задаваемых этими таблицами связей.

Понятно, что если две таблицы связей задают неизоморфные группы N_2^7, то они задают и наборы неизоморфных групп N_p^8 для $p \neq 2$.

К выписанным в п. 1.6 таблицам 2.2 и 2.6 присоединим остальные таблицы $2.k$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	4	5	6
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	2	1		5	6	7	4
5	4	7	6	5		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	5	4	7	2	3		1
8	7	6	5	4	3	2	1	

Таблица 2.3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	4	5	6
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	2	1		5	6	7	4
5	4	7	6	5		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	5	4	7	2	3		1
8	7	6	5	4	3	2	1	

Таблица 2.4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	6	5	4
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	2	1		5	4	7	6
5	4	7	6	5		1	2	3
6	5	6	7	4	1		3	2
7	6	5	4	7	2	3		1
8	7	4	5	6	3	2	1	

Таблица 2.5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	4	5	6
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	2	1		5	6	7	4
5	4	7	6	5		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	5	4	7	2	3		1
8	7	6	5	4	3	2	1	

Таблица 2.7

Среди таблиц связей 2, 2.2–2.7 имеются совпадающие, это таблицы 2 и 2.2, также таблицы 2.4 и 2.7. Остальные таблицы отличаются от указанных, но все они задают одну и ту же группу. Все таблицы связей 3, 3.2–3.7 совпадают между собой. Таблица 3 близка к таблице 2 по своему строению, но отлична от таблицы 2. Все таблицы связей 4, 4.2–4.7 попарно различны и отличаются от таблиц 2, 2.k, 3,

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	6	7	5	4
3	2	3		1	7	6	4	5
4	3	2	1		5	4	7	6
5	4	6	7	5		1	2	3
6	5	7	6	4	1		3	2
7	6	5	4	7	2	3		1
8	7	4	5	6	3	2	1	

Таблица 4.2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	6	5	4
3	2	3		1	5	7	4	6
4	3	2	1		6	4	7	5
5	4	7	5	6		1	2	3
6	5	6	7	4	1		3	2
7	6	5	4	7	2	3		1
8	7	4	6	5	3	2	1	

Таблица 4.3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		5	6	3	4	7	2
3	2	5		1	2	7	4	3
4	3	6	1		7	2	5	4
5	4	3	2	7		1	2	5
6	5	4	7	2	1		3	6
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	2	3	4	5	6	1	

Таблица 4.4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		5	2	3	6	7	2
3	2	5		1	6	7	4	3
4	3	2	1		7	2	5	6
5	3	6	7	5		1	2	5
6	5	6	7	2	1		3	4
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	2	3	6	5	4	1	

Таблица 4.5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		5	2	3	6	7	4
3	2	5		1	7	6	4	3
4	3	2	1		7	4	1	6
5	4	3	6	7		1	2	5
6	5	6	7	4	1		3	2
7	6	7	4	1	2	3		1
8	7	4	3	6	5	2	1	

Таблица 4.6

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		5	6	3	2	7	4
3	2	5		1	6	7	4	3
4	3	6	1		7	4	5	2
5	4	3	6	7		1	2	5
6	5	2	7	4	1		3	6
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	4	3	2	5	6	1	

Таблица 4.7

Таблица 5 отличается от ранее рассмотренных таблиц связей, но таблица 5.3 совпадает с таблицей 4. Значит, таблицы 4 и 5 задают одни и те же группы N_p^8. Таблицы 6 и 6.3 совпадают, также совпадают таблицы 6.4, 6.5, 6.6 и 6.7. Остальные таблицы 6.k имеют вид

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	6	5	4
3	2	3		1	5	4	7	6
4	3	2	1		6	7	4	5
5	4	7	5	6		1	2	3
6	5	6	4	7	1		3	2
7	6	5	7	4	2	3		1
8	7	4	6	5	3	2	1	

Таблица 6.2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	4	5	6	7	2
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	4	1		7	2	5	6
5	4	5	6	7		1	2	3
6	5	6	7	2	1		3	4
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	2	5	6	3	4	1	

Таблица 6.4

Таблицы 6, 6.k отличаются от предыдущих. Таблица 7 не совпадает ни с одной из предыдущих, но таблица 7.2 совпадает с 6.3.

Мы получили четыре вида различных таблиц связей групп N_p^8, по теореме 1 из п. 1.5 каждая из таблиц определяет группу N_p^8. Согласно теореме 4 того же пункта существует не менее четырех попарно неизоморфных групп N_2^8.

2.2. *Латинские квадраты* 4×4. Каждая из таблиц 2, 3, 4, 6 естественно распадается на 4 блока (подтаблицы) — таблицы размерами 4×4. Указанные таблицы разделены на эти блоки. Занумеруем блоки по ходу часовой стрелки $\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$. Первый и третий блоки всех таблиц совпадают между собой, это таблица связей группы N_p^4 (см. табл. 8). Блок 4 есть транспонированный блок 2.

Рассмотрим блок 2 всех таблиц связей 2, 3, 4, 6, это таблицы 9–12. Каждый из блоков является латинским квадратом. Для $m = 4$ существует система из трех ортогональных квадратов ([2], с. 246). В ([2], с. 248) такая система выписана. Ортогональными являются латинские квадраты 10, 12 и 13, где таблица 13 есть блок 2 таблицы связей 7. Отметим еще, что латинский квадрат 10 распадается на четыре латинских квадрата размеров 2×2, он составлен как латинский квадрат 2×2 из блоков, являющихся латинскими квадратами 2×2.

	1	2	3
1		3	2
3	2	1	

Таблица 8

4	5	6	7
6	4	7	5
5	7	4	6
7	6	5	4

Таблица 9

4	5	6	7
5	4	7	6
6	7	4	5
7	6	5	4

Таблица 10

4	5	6	7
7	4	5	6
5	6	7	4
6	7	4	5

Таблица 11

4	5	6	7
6	7	4	5
7	6	5	4
5	4	7	6

Таблица 12

4	5	6	7
7	6	5	4
5	4	7	6
6	7	4	5

Таблица 13

В п. 2.1 получили четыре вида неизоморфных групп N_p^8, это не совпадает с числом 3 латинских квадратов из системы ортогональных квадратов для $\frac{8}{2} = 4$. Ортогональные латинские квадраты 12 и 13, являющиеся блоками таблиц 6 и 7 соответственно, определяют изоморфные группы N_p^8.

2.3. *Некоторые свойства групп.* Обозначим в данном пункте группы N_p^8, задаваемые таблицами связей 2, 3, 4, 6 соответственно через G_2, G_3, G_4, G_6.

Из п. 2.1 получается

Теорема 5. *Существует не менее четырех видов попарно неизоморфных групп N_p^8.*

Блоки 1 и 3 таблиц связей 2, 3, 4, 6 задают подгруппы

$$A_4 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle, \quad B_4 = \langle a_5, a_6, a_7, a_8 \rangle$$

всех групп. Каждая из них является группой N_p^4. Подгруппы A_4 и B_4 изоморфны, т. к. задаются одной таблицей связей 8.

Коммутанты $C(A_4)$ и $C(B_4)$ совпадают, это подгруппа $\langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ и это их общий центр $Z(A_4) = Z(B_4)$. Следовательно, выполняется

Теорема 6. *Каждая из групп N_p^8, совпадающая с G_i, $i = 2, 3, 4, 6$, является прямым произведением с объединенной подгруппой групп A_4 и B_4 (двух экземпляров группы N_p^4).* (Термин из [3], с. 457.)

Обозначим $C_{47} = \langle c_4, c_5, c_6, c_7 \rangle$.

Теорема 7. *Взаимный коммутант $[A_4, B_4]$ подгрупп A_4 и B_4 совпадает с коммутантом всякой группы G_i, $i = 2, 3, 4, 6$, причем*

$$C(G_i) = [A_4, B_4] = C(A_4) \times C_{47}.$$

Подгруппы C_{47} состоят из элементов (за исключением единичного), не содержащихся в подгруппах A_4 и B_4.

Множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ образующих элементов групп G_i обозначим через A.

Из совпадения таблиц 4, 4.k следует

Свойство 1. Все подгруппы группы G_4, порожденные четырьмя элементами из множества A, имеют порядок $p^{4+3} = p^7$.

По таблицам 2, 2.k получаем

Свойство 2. В группе G_2 существует подгруппа (определяемая блоком 1 таблицы 2.6), порожденная четырьмя элементами из A и имеющая порядок $p^{4+5} = p^9$, нет подгрупп порядка p^8.

По таблицам 3, 3.k имеем

Свойство 3. В группе G_3 существуют подгруппы, порожденные четырьмя элементами из множества A, порядки которых p^8, p^9.

По таблицам 6, 6.k имеем

Свойство 4. В группе G_6 имеются только подгруппы порядков p^7 и p^8, порожденные четырьмя элементами из множества A.

Группы N_p^8 различаются свойствами 1–4.

Заключение

Получено описание латинскими квадратами групп N_p^8 периода p ступени 2 с восемью образующими, удовлетворяющих условиям минимальности и насыщения (п. 1. 2). По таблице связей группы построены сами группы. Найдено четыре вида попарно неизоморфных групп, удовлетворяющих принятым условиям. Установлены некоторые свойства групп.

Выбор случая $m = 8$ обусловлен тем, что это первое (наименьшее) значение m, при котором имеются неизоморфные группы. Существует только по одной группе N_p^4 и N_p^6 при $p = 2$, удовлетворяющих условиям 1–5 из п. 1.2. Их таблицы связей суть таблицы 14 и 15 соответственно. По таблице связей группы N_p^6 видно, что эта группа не содержит в качестве подгруппы группу N_p^4 (см. табл. 15).

	1	2	3	4
1		1	2	3
2	1		3	2
3	3	2		1
4	3	2	1	

Таблица 14

	1	2	3	4	5	6
1		1	2	3	4	5
2	1		4	5	3	2
3	2	4		1	5	3
4	3	5	1		2	4
5	1	3	5	2		1
6	5	2	3	4	1	

Таблица 15

8	9	10	11
9	8	11	10
10	11	8	9
11	10	9	8

Таблица 16

Таблица связей 15 группы N_p^6 на латинские квадраты меньших размеров не распадается, хотя в ней выделяются диагональные блоки — латинские квадраты 3×3, но оставшиеся блоки латинскими квадратами не являются.

Не удалось найти группу N_p^8, таблица связей которой не распадалась бы на 4 блока, описанные в п. 2.2, т. е. группы N_p^8, не разлагающейся в произведение групп N_p^4 с объединенной подгруппой (теорема 6). Соответствующую таблицу связей группы можно указать — это таблица связей 2. 6, но в результате перенумерации образующих элементов группы и связей, эта же группа задается таблицей 2.

Свойства групп N_p^8, приведенные в п. 2.3, ясно видны на латинских квадратах.

Далее интерес представляют группы с $m = 12$, $m = 16$ и т. д. образующими, удовлетворяющими условиям минимальности и насыщения. Использованные выше методы исследования применимы и здесь. Среди групп N_p^{12} содержатся такие, которые распадаются в прямое произведение двух групп N_p^6 с объединенной подгруппой. Таблица связей этой группы распадается на латинские квадраты размеров 6×6 (см. табл. 17).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
2	1		4	5	3	2	7	6	9	8	b	a
3	2	4		1	5	3	8	9	a	b	6	7
4	5	3	1		2	4	9	8	b	a	7	6
5	4	3	5	2		1	a	b	6	7	8	9
6	5	2	3	4	1		b	a	7	6	9	8
7	6	7	8	9	a	b		1	2	3	4	5
8	7	6	9	8	b	a	1		4	5	3	2
9	9	8	a	b	6	7	2	4		1	5	3
a	9	8	b	a	7	6	5	3	1		2	4
b	a	b	6	7	8	9	5	4	3	2		1
c	b	a	7	6	9	8	5	2	4	3	1	

Таблица 17

Из девяти блоков — латинских квадратов размеров 4×4, выписанных, например, в таблицах 8, 10, 16, невозможно составить латинский квадрат 12×12, удовлетворяющий условиям из п. 1.4.

Среди групп N_p^{16} содержатся такие, которые распадаются в прямое произведение групп N_p^4 с объединенной подгруппой. Их таблицы связей распадаются на латинские квадраты размеров 4×4 (см., напр., табл. 18, где латинские квадраты A, B, C, D суть латинские квадраты соответственно табл. 14, 10, 19, 20).

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

Таблица 18

8	9	10	11
9	8	11	10
10	11	8	9
11	10	9	8

Таблица 19

12	13	14	15
13	12	15	14
14	15	12	13
15	14	13	12

Таблица 20

Существуют группы N_p^{16}, равные прямым произведениям групп N_p^8 с объединенной подгруппой. Таблицы связей таких групп N_p^{16}, распадаются на латинские квадраты размеров 8×8, диагональные блоки 1 и 3 которых в свою очередь распадаются на латинские квадраты размеров 4×4, а блоки 2 и 4 на латинские квадраты размеров 4×4 не распадаются.

Неизвестно, есть ли такие группы N_p^{12} и N_p^{16}, которые указанными свойствами не обладают.

Таблицы связей групп используются для построения таблиц инцидентности регулярных гиперболических плоскостей.

Литература

1. Холл М. *Теория групп.* – М.: Ин. лит., 1962. – 468 с.
2. Холл М. *Комбинаторика.* – М.: Мир, 1970. – 424 с.
3. Курош А.Г. *Теория групп.* 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Пензенский университет

Поступила
21.04.2003