ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.55

С. КОСБЕРГЕНОВ

О ФОРМУЛЕ КАРЛЕМАНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ШАРА

Обзор известных результатов по формулам Карлемана можно найти в книге Л.А. Айзенберга [1]. В частности, в однородных областях в $\mathbb{C}^n$ для нахождения таких формул можно использовать группы автоморфизмов (см. [1], гл. 6). В [2] рассмотрен случай областей Зигеля, т. е. неограниченных реализаций однородных областей, и приведены формулы Карлемана, восстанавливающие значения голоморфных функций на остове области Зигеля (а не в самой области). Формула Карлемана для функции от матриц приведена в [3].

В данной работе рассмотрим матричный шар $\mathfrak{B}$. Использовав свойства ядер Бергмана, Сеге и Пуассона для $\mathfrak{B}$ из [4], находим формулу Карлемана, восстанавливающую значение голоморфной функции в области $\mathfrak{B}$ по значениям на части границы.

Пусть $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ — вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m, рассматриваемых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Можно считать, что Z — элемент пространства $\mathbb{C}^{m^2 n}$. Введем в этом множестве векторов матричное "скалярное" произведение

$$\langle Z, W\rangle = Z_1 W_1^* + \dots + Z_n W_n^*,$$

где W_j^* есть матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^{m^2 n}$ область

$$\mathfrak{B} = \{Z : E^{(m)} - \langle Z, Z\rangle > 0\}, \tag{1}$$

где $E^{(m)}$ — единичная матрица порядка m, которая называется матричным шаром. Остов этой области есть многообразие вида

$$\Delta_{\mathfrak{B}} = \{Z : \langle Z, Z\rangle = E^{(m)}\}; \tag{2}$$

здесь $\mathfrak{B}$ есть ограниченная полная круговая область.

Нас будут интересовать автоморфизмы матричного шара $\mathfrak{B}$, переводящие произвольную точку $B \in \mathfrak{B}$ в начало координат. Такие группы голоморфных автоморфизмов описаны в [4].

Теорема 1 ([4]). *Для того чтобы отображение вида*

$$W_k = R^{-1}(E^{(m)} - \langle Z, B\rangle)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (Z_s - B_s) Q_{sk}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{3}$$

являлось автоморфизмом матричного шара, необходимо и достаточно, чтобы матрицы R, Q_{sk}, $s, k = 1, \dots, n$, удовлетворяли соотношениям

$$R^*(E^{(m)} - \langle B, B\rangle) R = E^{(m)},$$
$$Q^*(E^{(mn)} - B^* B) Q = E^{(mn)},$$

где B^*B — блочное произведение матриц,

$$Q = \begin{vmatrix} Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \end{vmatrix}$$

— блочная матрица.

Обозначим автоморфизмы матричного шара вида (3), переводящие точку B в нуль, через $W = \varphi_B(Z)$.

Следствие 1. Пусть ψ — произвольный автоморфизм матричного шара $\mathfrak{B}$ и $B = \psi^{-1}(0)$, тогда существует ψ_u — обобщенное унитарное преобразование (см. [4]), для которого

$$\psi = \psi_u \varphi_B^{-1}.$$

Доказательство этого следствия получается так же, как доказательство теоремы 2.2.5 из [5], при помощи леммы Картана.

Рассмотрим нормированные меры Лебега ν в шаре $\mathfrak{B}$ и σ на остове Δ, т. е.

$$\int_{\mathfrak{B}} d\nu(Z) = 1 \quad \text{и} \quad \int_{\Delta} d\sigma(Z) = 1.$$

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$ пространство функций, голоморфных в шаре $\mathfrak{B}$ и непрерывных на замыкании шара $\overline{\mathfrak{B}}$.

Теорема 2 ([4]). *Для всякой функции $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{B})$ справедлива формула*

$$f(Z) = \int_{\mathfrak{B}} f(W) K(Z, W) d\nu(W), \quad Z \in \mathfrak{B},$$

где ядро $K(Z, W)$, которое назовем ядром Бергмана, имеет вид

$$K(Z, W) = \frac{1}{\det^{mn+m}(E^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}.$$

Следствие 2. Для всякой функции $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{B})$ справедлива формула

$$f(Z) = \int_{\Delta} f(W) C(Z, W) d\sigma(W), \quad Z \in \mathfrak{B}, \tag{4}$$

где ядро $C(Z, W)$, которое назовем ядром Сеге, имеет вид

$$C(Z, W) = \frac{1}{\det^{mn}(E^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}.$$

Доказательство следствия проходит точно так же, как доказательство теоремы 3.2.4 (формулы Коши в обычном шаре) из [5], преобразованием интеграла с ядром Сеге в интеграл с ядром Бергмана по матричному шару меньшей размерности.

Следствие 3. Для любой функции $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{B})$ справедлива формула

$$f(Z) = \int_{\Delta} f(W) P(Z, W) d\sigma(W), \quad Z \in \mathfrak{B},$$

где $P(Z, W)$ — ядро Пуассона, имеющее вид

$$P(Z, W) = \frac{C(Z, W) C(W, Z)}{C(Z, Z)} = \left[\frac{\det(E^{(m)} - \langle Z, Z \rangle)}{|\det(E^{(m)} - \langle Z, W \rangle)|^2} \right]^{mn}.$$

Следствие 4. Если ψ — произвольный автоморфизм шара $\mathfrak{B}$ такой, что $\psi^{-1}(0) = B$, то

$$P(B, Z) d\sigma(Z) = d\sigma(\psi(Z)). \tag{5}$$

Определим пространство $\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$ следующим образом: функция f принадлежит $\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$, если она голоморфна в $\mathfrak{B}$ и

$$\sup_{0<r<1} = \int_\Delta |f(rZ)| d\sigma(Z) < \infty.$$

Поскольку $\mathfrak{B}$ — ограниченная полная круговая область, то функции f класса $\mathcal{H}^1$ обладают следующими свойствами (см. [1], гл. 6; а также [6]):

1) для почти всех (по мере σ) $Z \in \Delta$ срез-функции $f_Z(\lambda) = f(\lambda Z)$ принадлежат пространству $\mathcal{H}^1$ в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : |\lambda| < 1\}$;
2) функция f имеет радиальные граничные значения

$$\lim_{r\to 1} f(rZ) = f^*(Z), \quad Z \in \Delta,$$

причем эти граничные значения f^* принадлежат классу $\mathcal{L}^1(\Delta)$;
3) если срез-функции $f_Z(\lambda)$ некоторой голоморфной в шаре функции f принадлежат классу Харди $\mathcal{H}^1$ в единичном круге для почти всех $Z \in \Delta$ и радиальные граничные значения f^* лежат в $\mathcal{L}^1(\Delta)$, то $f \in \mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$;
4) если множество $E \subset \Delta$ имеет положительную меру ($\sigma(E) > 0$), то E является множеством единственности для класса Харди $\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$.

В дальнейшем будем обозначать радиальные граничные значения функции f класса Харди также через f.

Пусть E — множество положительной меры σ на остове Δ. Нас будет интересовать формула, которую назовем формулой Карлемана, восстанавливающая значение функции f класса Харди $\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$ в области $\mathfrak{B}$ по ее радиальным граничным значениям на множество E.

Прежде всего параметризуем множество Δ следующим образом: для $Z \in \Delta$ положим $Z = e^{it}U$, где $0 \le t < 2\pi$, а в матрице U_1 член $\mathcal{U}_{11}^{(1)}$, стоящий в левом верхнем углу, является положительным числом. Многообразие таких матриц обозначим через Δ_1^+, а нормированную меру Лебега на нем — через σ^+. Конечно, тем самым параметризуется не все множество Δ, а некоторое меньшее множество, отличающееся от Δ на множество меры нуль. Для наших целей этого вполне достаточно.

Применяя теорему Фубини и инвариантность меры Лебега σ относительно поворотов, мы так же, как в ([1], лемма 2.6), получим

$$d\sigma = h(U) dt\, d\sigma^+(U), \quad U \in \Delta_1^+, \tag{6}$$

где гладкая положительная функция $h(U)$ не зависит от t. Таким образом, из (6) имеем

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\lambda}{\lambda} d\sigma_1(U), \tag{7}$$

где $\lambda = e^{it}$, а мера σ_1 положительна на Δ_1^+.

Обозначим $E_{0,U} = \{W \in E;\quad W = \lambda U,\quad \lambda = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi\}$, $U \in \Delta_1^+$, а $E_0' = \{U \in \Delta_1^+;\ \ m_1(E_{0,U}) > 0\}$; здесь m_1 — одномерная нормированная мера Лебега на единичной окружности. Теорема Фубини и формула (7) показывают, что $\sigma_1(E_0^1) > 0$.

Введем одномерную формулу Карлемана (см., напр., [1], гл. 1)

$$g_0(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_{0,U}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad h_0 = \exp g_0.$$

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$. Тогда справедлива формула*

$$f(0) = \frac{1}{\int\limits_{E_0'} d\sigma_1} \lim_{j\to\infty} \int_E f(W) \left[\frac{h_0(W)}{h_0(0)}\right]^j d\sigma(W). \tag{8}$$

Доказательство. В сечении шара $\mathfrak{B}$ комплексной прямой $\{Z;\ Z=\lambda u\}$, $U\in E_0'$, воспользуемся свойствами срез-функции и классической формулой Карлемана (напр., [1], гл. 1, формула (1.3))

$$f(0)=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{E_{0,U}}f(\lambda U)\left[\frac{h_0(\lambda)}{h_0(0)}\right]^j\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Умножая обе части этого равенства на $d\sigma_1(U)$ и интегрируя по E_0', получим формулу (8). Предельный переход под знаком интеграла обосновывается точно так же, как в ([1], лемма 24.7) (см. также [6]), с использованием теоремы Лебега об ограниченной сходимости. $\square$

Пусть, как и прежде, $\varphi_B(Z)$ — автоморфизм матричного шара вида (3), переводящий точку $B\in\mathfrak{B}$ в нуль. Обозначим

$$\sigma_B(K)=\sigma_1(\varphi_B^{-1}(K)),\quad E_{B,U}=\{W\in E;\ W=\varphi_B^{-1}(\lambda\varphi_B^{-1}(U)),\ |\lambda|=1\},\quad U\in\Delta_B^+=\varphi_B(\Delta_1^+),$$
$$E_B'=\{U\in\Delta_B^+;\ m_1(E_{B,U})>0\},\quad g_B(W)=\frac{1}{2\pi i}\int_{E_{B,U}}\frac{\eta_\lambda+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta},\quad h_B=\exp g_B.$$

Будем считать, что функция g_B зависит от W, т.к. λ и U — функции от W.

Теорема 4. *Пусть функция $f\in\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$. Тогда для любой точки $B\in\mathfrak{B}$ справедлива формула*

$$f(B)=\frac{1}{\int\limits_{E_B'}d\sigma_B}\lim_{j\to\infty}\int_E f(W)\left[\frac{h_B(W)}{h_B(B)}\right]^j C(B,W)d\sigma(W). \tag{9}$$

Доказательство. Для $B=0$ формула (9) совпадает с формулой (8). Положим $f_B(W)=f(\varphi_B^{-1}(W))$, тогда $f_B\in\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$ и $f_B(0)=f(B)$. Применим к f_B теорему 3 и сделаем преобразование φ_B под знаком интеграла. Тогда

$$f(B)=\frac{1}{\int\limits_{E_B'}d\sigma_B}\lim_{j\to\infty}\int_E f(W)\left[\frac{h_B(W)}{h_B(B)}\right]^j d\sigma(\varphi_B(W)). \tag{10}$$

По формуле (5) $d\sigma(\varphi_B(W))=P(B,W)d\sigma(W)$, а

$$P(B,W)=\frac{C(B,W)C(W,B)}{C(B,B)}.$$

Применяя формулу (10) к функции $f(W)C^{-1}(W,B)\in\mathcal{H}^1(\mathfrak{B})$, получим требуемое. $\square$

Литература

1. Айзенберг Л.А. *Формула Карлемана в комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.
2. Кытманов А.М., Никитина Т.Н. *Многомерные формулы Карлемана в областях Зигеля* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 3. – С. 44–49.
3. Худайберганов Г. *Формула Карлемана для функций от матриц* // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т. 29. – № 1. – С. 207–208.
4. Косбергенов С. *Голоморфные автоморфизмы и интеграл Бергмана для матричного шара* // Докл. АН РУз. – 1998. – № 1. – С. 7–10.
5. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. – 1-е изд. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
6. Кытманов А.М., Никитина Т.Н. *Аналоги формул Карлемана для классических областей* // Матем. заметки. – 1989. – Т. 45. – № 3. – С. 87–93.

Ташкентский государственный университет

Поступила 03.03.1997