ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 512.543

*Ж.С. САТАРОВ*

# ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМИ ПОЛУЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ БЕЗ ЕДИНИЦЫ

## 1. Введение

Описание ортогональных (и близких к ним) групп в виде образующих и соотношений представляет собой одну из основных задач комбинаторной теории линейных групп. Предлагаемая работа относится к названному направлению, а точнее в ней отыскиваются образующие элементы и определяющие соотношения обобщенной ортогональной группы $O^\circ(n,R)$, $n \geq 2$, над коммутативным полулокальным кольцом (вообще говоря, без единицы) $R$, подчиненным некоторым естественным ограничениям.

Чтобы поставить задачу точно, приведем определения некоторых необходимых понятий. Пусть $\Lambda$ — произвольное ассоциативное кольцо и $\circ$ — его квазиумножение (т. е. $x\circ y = x+xy+y$). Элемент $\alpha$ из $\Lambda$ называется *квазиобратимым*, если для него $\alpha\circ\alpha' = 0 = \alpha'\circ\alpha$ при некотором $\alpha' \in \Lambda$. По квазиобратимому $\alpha$ его квазиобратное $\alpha'$ определяется однозначно. Совокупность всех квазиобратимых элементов $\Lambda^\circ$ из $\Lambda$ образует группу относительно композиции $\circ$ (где единицей будет нуль). Рассмотрим случай, когда $\Lambda = M(n,R)$ — полное матричное кольцо над (ассоциативно-)коммутативным и не обязательно с единицей кольцом $T$. Пусть $^\top$ — транспонирование в $\Lambda$. Совокупность тех квазиобратимых матриц из $\Lambda$, для которых $a' = a^\top$, образует группу относительно матричного квазиумножения. Обозначим ее через $O^\circ(n,R)$ и назовем обобщенной ортогональной группой степени $n$ над кольцом $R$. Поскольку в случае наличия единицы в $R$ отображение $O(n,R)\to O^\circ(n,R)$, $E+a\to a$, где $E$ — единичная матрица порядка $n$, задает изоморфизм, введенная группа $O^\circ(n,R)$ является обобщением понятия обычной ортогональной группы на самые общие случаи ассоциативно-коммутативных колец $R$.

Пусть теперь $R$ — коммутативное (не обязательно с единицей) полулокальное кольцо и $J = J(R)$ — его радикал Джекобсона. По определению это означает, что $R/J \cong k_1\oplus\cdots\oplus k_m$, где $k_i$ — некоторые поля ($i = 1,\dots,m$). Обозначим через $R_i$ полный прообраз слагаемого $k_i$ при естественном эпиморфизме

$$R\to\overline{R} = R/J, \quad x\to\overline{x} = x+J. \tag{1}$$

Легко видеть, что для кольца $R$ имеет место разложение

$$R = R_1+\cdots+R_m. \tag{2}$$

В этом разложении слагаемые $R_i$ образуют (коммутативные и не обязательно с единицей) локальные подкольца в $R$. Для подкольца $\Lambda$ кольца $R$ (включая и случай $\Lambda = R$) положим $\Lambda^{(2)} = \{\alpha\circ\alpha : \alpha\in\Lambda^\circ\}$. Для непустого подмножества $X \subseteq R$ примем также обозначение $X^2 = \{x^2 : x\in X\}$. Далее, пару $\langle x,y\rangle$ из $R\times R$ назовем *согласованной*, если для нее $x\circ x+y^2 = 0$. Пусть $e_i$ означает некоторый (любой) прообраз единицы $1_i\in k_i$ при эпиморфизме (1) ($i = 1,\dots,m$). Целью данной работы является нахождение образующих и определяющих соотношений обобщенной ортогональной группы $O^\circ(n,R)$, $n \geq 2$, над, вообще говоря, безъединичным коммутативным полулокальным кольцом $R$, для которого выполнены условия

$$R_i^{(2)} + R_i^2 \subseteq R_i^{(2)}; \qquad (R_i)$$

$$\text{существуют согласованные пары } \langle -e_i, y\rangle \in R\times R, \quad i=1,\dots,m; \qquad (-e_i)$$

$$R^{(2)} + J^2 \subseteq R^{(2)}. \qquad (J)$$

Ясно, что в $(-e_i)$ компонента $y$ принадлежит $R_i$.

Примарные частные случаи этой задачи, когда $R$ — упорядоченное евклидово поле, (коммутативное) локальное кольцо с единицей и без нее, рассматривались в [1], [2] и [3] соответственно. Метод трансформации, который применяется здесь, является дальнейшим развитием идей упомянутых выше работ автора. Существенным отличием данной работы от результатов [1]–[3] является введение некоторых "внутренних" образующих группы $O^\circ(n,R)$ наряду с обычными.

Очевидными примерами полулокального кольца со свойствами $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$ дают прямые суммы коммутативных (не обязательно с единицами) локальных колец $R_i$, $i=1,\dots,m$, для каждого из которых имеют место перечисленные выше условия. Приведем менее тривиальные примеры таких колец. Пусть $R$ — произвольное (не важно с единицей или нет) коммутативное полулокальное кольцо со свойствами $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$. Пусть, далее, $K$ — ненулевое кольцо с нулевым умножением. Оно является радикальным (т. е. таким, что $J(K)=K$) и, следовательно, не имеет единицы. Так как для этих колец $(R\oplus K)/J(R\oplus K) \cong (R\oplus K)/(J(R)\oplus K) \cong R/J(R) \cong k_1\oplus\dots\oplus k_m$, то прямая сумма $\widetilde{R} = R\oplus K$ является коммутативным полулокальным кольцом без единицы. Разложение (2) для такого кольца имеет вид $\widetilde{R} = \widetilde{R}_1+\dots+\widetilde{R}_m$, где $\widetilde{R}_i = R_i\oplus K$. Здесь, как в [3], проверяется, что $\widetilde{R}$ удовлетворяет условиям $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$. Итак, построенные кольца $\widetilde{R}$ дают другую серию, причем безъединичных, коммутативных полулокальных колец, для которых имеют место условия $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$.

Пусть $\operatorname{char} R$ — характеристика кольца $R$ в смысле ([4], с. 299), т. е. наименьшее неотрицательное целое, которое аннулирует все элементы этого кольца. Из условия $(R_i)$ очевидным образом следует, что $k_i^{(2)}+k_i^2 \subseteq k_i^{(2)}$, т. е. $(k_i^*)^2+k_i^2\subseteq (k_i^*)^2$, где $^*$ — взятие мультипликативной группы. Поскольку последнее возможно только при $\operatorname{char} k_i = 0$ и положительность характеристики наследуется при всяком гомоморфизме, имеем $\operatorname{char} R_i = 0$. Отсюда уже очевидным образом следует равенство нулю и характеристики самого кольца $R$.

Всюду далее будем считать $R$ произвольным (и не обязательно с единицей) коммутативным полулокальным кольцом, удовлетворяющим условиям $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$.

## 2. Образующие элементы группы $O^\circ(n,R)$

В этом пункте будем выявлять образующие элементы названной группы. Для натурального $k$ примем обозначение $I(k)=\{1,2,\dots,k\}$. Пусть далее $r(i)$ для номера $i\in I(mn)$ означает наименьший положительный вычет этого числа по модулю $m$. Чтобы упростить изложение, ниже будем считать $R_i = R_{r(i)}$ и $e_i = e_{r(i)}$ при всех $i\in I(mn)$ (напомним, что $e_{r(i)}$ — некоторый прообраз единицы $1_{r(i)}\in k_{r(i)}$ при эпиморфизме (1)).

Как показывает разложение (2), всякую матрицу $a$ из $O^\circ(n,R)$ можно представить и в "расширенном матричном" виде

$$a = (a_{ij})_{i\equiv j \pmod m}, \quad 1\leq i,j\leq mn, \qquad (3)$$

где $a_{ij}\in R_i$ при всех $i$ и $j$. Представление (3), вообще говоря, не однозначно (оно однозначно в том и только том случае, когда либо $m=1$, либо же $J=\{0\}$). В данной работе для элементов из $O^\circ(n,R)$ будут параллельно использованы как их обычные, так и расширенные записи (3). Для номера $i$ из $I(mn)$ введем также число $\mathbf{i}$, определенное как

$$i - r(i) = m(\mathbf{i}-1).$$

Ясно, что $\mathbf{i} \in I(n)$, и оно означает номер диагональной клетки при разбиении развернутой матрицы (3) на клетки порядка $m$, содержащей позицию $\langle i, i \rangle$. Далее, расширенную матрицу (3) будем называть *внедиагонально-радикальной* (коротко *ed-радикальной*), если для нее $a_{ij} \in J$ при всех $i \neq j$.

Далее используем и следующие обозначения: если иное не оговорено, то $\equiv$ — сравнение в $R$ по модулю $J$ ($J$ — радикал Джекобсона кольца $R$, ниже его элементы будут называться радикальными); $'$ — как и выше, взятие квазиобратного элемента (или матрицы); $E_i(R \times R)$ — совокупность согласованных пар $\langle x, y \rangle$ из $R \times R$, для которых либо $x \in R_i^\circ$, либо $x \equiv -e_i$; $E(R \times J)$ — совокупность тех согласованных пар $\langle x, y \rangle \in R \times R$, для которых $y \equiv 0$; $O(R) = \{\varepsilon \in R : \varepsilon \circ \varepsilon = 0\}$; для $i \in I(m(n-1))$ $P_i = \{t \in I(mn) : i < t \equiv i \pmod m\}$; для элемента $x \in R_i$, $i \in I(mn)$, $d_i(x) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$ — расширенная диагональная матрица, где $x$ стоит на $i$-м месте; для $y \in R_i$ и индекса $i \neq j \equiv i \pmod m$, аналогичным образом, $t_{ij}(y)$ — расширенная матрица, где $y$ стоит на позиции $\langle i, j \rangle$, а остальные позиции заполнены нулями; $T_{ij}(x, y) = d_i(x) + t_{ij}(y) - t_{ji}(y) + d_j(x)$ для индексов $i \neq j \equiv i \pmod m$ и пары $\langle x, y \rangle \in E_i(R \times R)$ (они и есть "внутренние" образующие группы $O^\circ(n, R)$).

Для пары $\langle x, y \rangle$ из $E(R \times J)$ и индексов $k, r \in I(n)$, $k \neq r$, введем также (обычные) матрицы $\mathbf{T}_{kr}(x, y)$ из $M(n, R)$, где на позициях $\langle k, k \rangle$, $\langle k, r \rangle$, $\langle r, k \rangle$, $\langle r, r \rangle$ стоят элементы $x$, $y$, $-y$, $x$ соответственно, а остальные позиции заполнены нулями. Пусть, далее, $D_k(\varepsilon) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots, 0)$ для $\varepsilon \in O(R)$ — обычная диагональная матрица из $M(n, R)$, где $\varepsilon$ стоит на $k$-м месте. Эти матрицы $\mathbf{T}_{kr}(x, y)$, $D_k(\varepsilon)$ также входят в группу $O^\circ(n, R)$ очевидным образом, причем для них $\mathbf{T}'_{kr}(x, y) = \mathbf{T}_{kr}(x, -y)$ и $D'_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon)$.

Особый интерес представляют внутренние матрицы $T_{is}(\pi, \chi)$, для которых $\pi \equiv -e_i$ (отсюда следует, что $\chi^2 \equiv e_i$). Они будут играть роль обычных матриц-транспозиций. Эти матрицы будем обозначать как $(is) = (\pi, \chi)_{is}$. Ясно, что для всякой $(is)$ ее квазиобратная $(is)' = (\pi, -\chi)_{si}$ — также транспозиционная матрица. Введенные матрицы до равных индексов доопределяем как $(ii) = 0$.

Для представления группы $O^\circ(n, R)$ используем простейшие ее элементы

$$\begin{gathered} T_{ij}(\alpha, \beta), \quad \langle \alpha, \beta \rangle \in E_i(R \times R), \quad i \neq j \equiv i \pmod m; \quad D_k(\varepsilon), \quad \varepsilon \in O(R); \\ \mathbf{T}_{kr}(\gamma, \delta), \quad \langle \gamma, \delta \rangle \in E(R \times J), \quad k \neq r \quad (1 \leq i, j \leq mn, \quad 1 \leq k, r \leq n). \end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство того факта, что группа $O^\circ(n, R)$ порождается матрицами (4), использует дизъюнктные разложения $R_i = (-\overline{e}_i) \cup R_i^\circ$ (см. [3]), условия $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$ и проводится рассуждениями, аналогичными из [2]. Эти повторяющиеся подробности опускаются.

## 3. Набор соотношений для $O^\circ(n, R)$

Здесь выпишем двадцать две серии соотношений для группы $O^\circ(n, R)$ в образующих (4) (они впоследствии составят полную систему соотношений). В работе [3] был введен квазиопределитель $\det^\circ$ порядка $n$ над произвольным (ассоциативно-)коммутативным кольцом $R$ и там же показана его полная мультипликативность (т. е. $\det^\circ(a \circ b) = \det^\circ a \circ \det^\circ b$ для любых матриц $a$ и $b$). Используя этот факт, напишем следующие непосредственно проверяемые соотношения:

1. для аргументов $\varepsilon \neq 0$, $\sigma \neq 0$
   a) $D_k(\varepsilon) \circ D_k(\sigma) = D_k(\varepsilon \circ \sigma)$;
   b) $D_k(\varepsilon) \circ D_r(\sigma) = D_r(\sigma) \circ D_k(\varepsilon)$, $k \neq r$;
2. для индексов $i < j$; $q < r$ и аргументов $\beta \not\equiv 0$, $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$
   a) $T_{ij}(\alpha, \beta) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ T_{ij}(\alpha, \beta)$, $k \neq \mathbf{i}, \mathbf{j}$;
   b) $T_{ij}(\alpha, \beta) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ T_{ij}(\alpha, \beta + \beta\varepsilon)$, $k \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$;
   c) $\mathbf{T}_{qr}(\gamma, \delta) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ \mathbf{T}_{qr}(\gamma, \delta)$, $k \neq q, r$;
   d) $\mathbf{T}_{qr}(\gamma, \delta) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ \mathbf{T}_{qr}(\gamma, \delta + \delta\varepsilon)$, $k \in \{q, r\}$;
3. для индексов $i < j$; $q < r$ и аргументов $\beta \not\equiv 0$, $\delta \not\equiv 0$, $\sigma \neq 0$, $\mu \neq 0$
   a) $T_{ij}(\alpha, \beta) \circ T_{ij}(\gamma, \delta) = T_{ij}(\alpha \circ \gamma - \beta\delta, \beta + \delta + \alpha\delta + \beta\gamma)$;

b) $T_{ji}(\alpha,\beta) = T_{ij}(\alpha, -\beta)$;
c) $\mathbf{T}_{qr}(\tau,\sigma) \circ \mathbf{T}_{qr}(\eta,\mu) = \mathbf{T}_{qr}(\tau\circ\eta - \sigma\mu, \sigma+\mu+\tau\mu+\sigma\eta)$;
d) $\mathbf{T}_{rq}(\tau,\sigma) = \mathbf{T}_{qr}(\tau, -\sigma)$;

4. a) для индексов $k \neq j$ и аргументов $\alpha, \gamma \in R_i^\circ$, $\beta \not\equiv 0$, $\delta \not\equiv 0$

$$T_{ij}(\alpha,\beta)\circ T_{ik}(\gamma,\delta) = T_{kj}(a, \beta\delta+\mu'\beta\delta)\circ T_{ik}(\mu, \delta+\alpha\delta)\circ T_{ij}(\alpha\circ\gamma\circ\mu', \beta+\mu'\beta),$$

где $a = \gamma\circ\mu + \{\delta + \delta(\alpha\circ\gamma\circ\mu')\}(\delta+\alpha\delta)$ и $\mu$ — элемент из $R_i^\circ$, определенный как $\alpha\circ\gamma\circ\alpha\circ\gamma+\beta^2 = \mu\circ\mu$;
b) для индексов $i < k \neq s$ и аргумента $\beta \not\equiv 0$

$$(\pi,\chi)_{is}\circ T_{ik}(\alpha,\beta) = T_{sk}(z,t)\circ \mathbf{T_{is}}(\varphi, -\alpha\chi-\pi\alpha\chi)\circ \mathbf{T_{ik}}(x,y)\circ(\pi,\chi)_{is},$$

где $x = (\alpha - \alpha\chi^2)\circ\varphi'$, $y = \beta+\pi\beta+\varphi'(\beta+\pi\beta)$, $z = (\alpha\chi^2)\circ\varphi + a(\alpha\chi+\pi\alpha\chi)$, $a = -\chi\alpha - \pi\chi\alpha - (\chi\alpha+\pi\chi\alpha)x - \chi\beta y$, $t = -\chi\beta + (\chi\alpha+\pi\chi\alpha)y - \chi\beta x$ и $\varphi$ — элемент из $R_i^\circ$, определенный как $(\alpha-\alpha\chi^2)\circ(\alpha-\alpha\chi^2)+(\beta+\pi\beta)^2 = \varphi\circ\varphi$;
c) для индексов $i < k, r$; $j > r$, для которых либо $\mathbf{i} = \mathbf{r}$, $\mathbf{k} = \mathbf{j}$, либо же $\{\mathbf{i},\mathbf{k}\}\cap\{\mathbf{r},\mathbf{j}\} \neq \varnothing$, а также аргументов $\beta \not\equiv 0$, $\delta \not\equiv 0$

$$T_{ik}(\alpha,\beta)\circ T_{rj}(\gamma,\delta) = T_{rj}(\gamma,\delta)\circ T_{ik}(\alpha,\beta);$$

d) для индексов $i < k, r$; $j > r$, для которых $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{j}$, $j > \min\{i,k\}$, и аргументов $\beta \not\equiv 0$, $\delta \not\equiv 0$

$$T_{ik}(\alpha,\beta)\circ T_{rj}(\gamma,\delta) = \mathbf{T_{kj}}(x,y)\circ \mathbf{T_{ik}}(\varphi, -\beta\gamma-\alpha\beta\gamma)\circ T_{rj}(z,t)\circ T_{ik}(\alpha,\beta),$$

где $x = (\gamma\beta^2)\circ\varphi + d(\beta\gamma+\alpha\beta\gamma)$, $y = \alpha\beta\gamma\delta - \beta\delta - b(c+\varphi' c) + (\alpha\beta\gamma\delta - \beta\delta)(a\circ\varphi')$, $z = a\circ\varphi'\circ\gamma - c\delta - \varphi' c\delta$, $t = c+\varphi' c + \delta + (a\circ\varphi')\delta + (c+\varphi' c)\gamma$, $d = b + b(a\circ\varphi') + (\alpha\beta\gamma\delta-\beta\delta)(c+\varphi' c)$, $a = \alpha\delta^2 - \gamma\beta^2 - (\beta\gamma)^2$, $b = \beta(\gamma - \alpha\gamma - \alpha\gamma^2)$, $c = \alpha\delta + \alpha\delta\gamma + \gamma\delta\beta^2$ и $\varphi$ — элемент из $R_r^\circ$, определенный как $a\circ a + c^2 = \varphi\circ\varphi$;

5. a) для индексов $i < k$; $r < j$, для которых либо $\mathbf{i} = r$, $\mathbf{k} = j$, либо же $\{\mathbf{i},\mathbf{k}\}\cap\{r,j\} = \varnothing$, а также аргументов $\beta \not\equiv 0$, $\delta \neq 0$

$$T_{ik}(\alpha,\beta)\circ \mathbf{T}_{rj}(\gamma,\delta) = \mathbf{T}_{rj}(\gamma,\delta)\circ T_{ik}(\alpha,\beta);$$

b) для индексов $\mathbf{i} = r$; $\mathbf{k} \neq j$ и аргументов $\alpha \in R_i^\circ$, $\beta \not\equiv 0$, $\delta \neq 0$

$$T_{ik}(\alpha,\beta)\circ \mathbf{T}_{rj}(\gamma,\delta) = \mathbf{T}_{\mathbf{k}j}(y,z)\circ \mathbf{T}_{r\mathbf{k}}(\psi,b)\circ \mathbf{T}_{rj}(a\circ\psi', x)\circ T_{ik}(\alpha\circ\gamma_i\circ\varphi', \beta+\varphi'\beta),$$

где $x = \delta+\alpha\delta+\varphi'(\delta+\alpha\delta)$, $y = d\circ\psi - be$, $z = -\beta\delta - cx - \beta\delta(a\circ\psi')$, $e = c + c(a\circ\psi') - \beta\delta x$, $a = \alpha\circ\gamma\circ\alpha\circ\gamma_i\circ\varphi' + \beta(\beta+\beta\varphi')$, $b = [\alpha(\gamma_i - \gamma) + \gamma_i - \gamma](\beta+\varphi'\beta)$, $c = \beta\varphi' - \beta\gamma - (\beta+\beta\gamma)(\alpha\circ\gamma_i\circ\varphi') + \alpha(\beta+\varphi'\beta)$, $d = \alpha\circ\alpha\circ\gamma_i\circ\varphi' + (\beta+\beta\gamma)(\beta+\varphi'\beta)$ и $\varphi$, $\psi$ — элементы из $R_i^\circ$, $R^\circ$, определенные как $\alpha\circ\gamma_i\circ\alpha\circ\gamma_i+\beta^2 = \varphi\circ\varphi$, $a\circ a + (\delta+\alpha\delta)^2 = \psi\circ\psi$ соответственно (здесь $\gamma_i$ — слагаемое из $\gamma$ при его разложении (2), принадлежащее $R_{r(i)}$);
c) для индексов $\mathbf{i} = k$; $\mathbf{j} \neq r$ и аргумента $\delta \neq 0$

$$(\pi,\chi)_{ij}\circ \mathbf{T}_{kr}(\gamma,\delta) = \mathbf{T}_{\mathbf{j}r}(z,t)\circ \mathbf{T}_{k\mathbf{j}}(\varphi, -\gamma\chi - \pi\gamma\chi)\circ \mathbf{T}_{kr}(x,y)\circ(\pi,\chi)_{ij},$$

где $x = (\gamma-\gamma\chi^2)\circ\varphi'$, $y = \delta+\pi\delta+\varphi'(\delta+\pi\delta)$, $z = \varphi\circ(\gamma\chi^2) + a(\gamma\chi+\pi\gamma\chi)$, $t = (\chi\gamma+\pi\chi\gamma)y - \chi\delta - \chi\delta x$, $a = -\chi\gamma - \pi\chi\gamma - (\chi\gamma+\pi\chi\gamma)x - \chi\delta y$ и $\varphi$ — элемент из $R^\circ$, определенный как $(\gamma-\gamma\chi^2)\circ(\gamma-\gamma\chi^2) + (\delta+\pi\delta)^2 = \varphi\circ\varphi$;
d) для индексов $i < r, j$ и аргументов $\alpha \in R_i^\circ$, $\beta \not\equiv 0$, $\delta \not\equiv 0$

$$T_{ik}(\alpha,\beta)\circ T_{rj}(\gamma,\delta) = T_{rj}(y,z)\circ T_{ir}(\varphi, -\beta\delta)\circ T_{ij}(\alpha\circ\varphi', x),$$

где $x = \beta+\beta\gamma+\varphi'(\beta+\beta\gamma)$, $y = \gamma\circ\varphi + \delta^2 x\beta$, $z = \delta + \delta(\alpha\circ\varphi')$ и $\varphi$ — элемент из $R_i^\circ$, определенный как $\alpha\circ\alpha + (\beta+\beta\gamma)^2 = \varphi\circ\varphi$;

6. a) для индексов $i < k, j$; $k \neq j$ и аргументов $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$

$$\mathbf{T}_{ij}(\alpha,\beta) \circ \mathbf{T}_{ik}(\gamma,\delta) = \mathbf{T}_{kj}(x,\delta y) \circ \mathbf{T}_{ik}(\varphi,\delta+\alpha\delta) \circ \mathbf{T}_{ij}(z,y),$$

где $x = \gamma\circ\varphi + (\delta+\delta z)(\delta+\alpha\delta)$, $y = \beta + \varphi'\beta$, $z = \alpha\circ\gamma\circ\varphi'$ и $\varphi$ — элемент из $R^\circ$, определенный как $\alpha\circ\gamma\circ\alpha\circ\gamma + \beta^2 = \varphi\circ\varphi$;
b) для индексов $i < k, j$ и аргументов $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$

$$\mathbf{T}_{ik}(\alpha,\beta) \circ \mathbf{T}_{kj}(\gamma,\delta) = \mathbf{T}_{kj}(x,y) \circ \mathbf{T}_{ik}(\varphi,\beta+\beta\gamma) \circ \mathbf{T}_{ij}(\alpha\circ\varphi',z),$$

где $x = \alpha\circ\gamma\circ\varphi - a(\beta+\beta\gamma)$, $y = \delta+\alpha\delta+\beta z + (\delta+\alpha\delta)(\alpha\circ\varphi')$, $a = (\alpha+\alpha\delta)z - \beta - \beta(\alpha\circ\varphi')$, $z = \beta\delta + \varphi'\beta\delta$ и $\varphi$ — элемент из $R^\circ$, определенный как $\alpha\circ\alpha + (\beta\delta)^2 = \varphi\circ\varphi$;
c) для индексов $i < k$; $r < j$, $\{i,k\}\cap\{r,j\} = \varnothing$ и аргументов $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$

$$\mathbf{T}_{ik}(\alpha,\beta) \circ \mathbf{T}_{rj}(\gamma,\delta) = \mathbf{T}_{rj}(\gamma,\delta) \circ \mathbf{T}_{ik}(\alpha,\beta);$$

d) для индексов $i < k$

$$\mathbf{T}_{ik}(\gamma,0) = D_i(\gamma) \circ D_k(\gamma).$$

## 4. Узловые леммы

Сформулируем две леммы, которые необходимы для наших дальнейших рассуждений. Введем сначала на множестве всех слов алфавита (4) отношения $\overset{i}{\tilde{\to}}$, $1 \le i \le m(n-1)$ : $W \overset{i}{\tilde{\to}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W = X \circ V$, где $X$ — некоторое слово, не содержащее буквы вида $T_{kr}(\alpha,\beta)$ $(k \neq r)$, $\beta \not\equiv 0$, где $i \ge \min\{k,r\}$. Введенные отношения являются рефлексивными и транзитивными. Для тех же индексов $i$ $(1 \le i \le m(n-1))$ введем формы $F_i = \prod\limits_{q\in P_i} T_{iq}(\alpha_q,\beta_p)$, где квазисомножители $T_{iq}(\alpha_q,\beta_p)$ либо нулевые, либо для них $\alpha_q \in R_i^\circ$ и $\beta_q \not\equiv 0$ (здесь порядок сомножителей не существен).

**Лемма 1.** *Пусть* $F_i = T_{ik}(\alpha_k,\beta_k) \circ \cdots \circ T_{ij}(\alpha_j,\beta_j)$ *— форма длины не меньше двух (все фигурирующие здесь буквы ненулевые);* $p,\ldots,q$ *— некоторая перестановка из чисел* $k,\ldots,j$. *Тогда, применяя соотношения* 4a) *и* 4c)*, можно выполнить преобразование*

$$F_i \overset{i}{\tilde{\to}} T_{ip}(\gamma_p,\delta_p) \circ \cdots \circ T_{iq}(\gamma_q,\delta_q) = \widetilde{F}_i,$$

*где для формы* $\widetilde{F}_i$ *также* $\gamma_k \in R_i^\circ$ *и* $\delta_k \not\equiv 0$ *при всех* $k = p,\ldots,q$.

**Доказательство.** Пусть $T_{ia}(\alpha_a,\beta_a)$, $T_{ib}(\alpha_b,\beta_b)$ — произвольные соседние буквы из $F_i$. Представим рассматриваемую форму в виде $F_i = X \circ [T_{ia}(\alpha_a,\beta_a) \circ T_{ib}(\alpha_b,\beta_b)] \circ Y$, где $X$ и $Y$ — соответствующие дополнения. Применяя к выделенному участку 4a) и 4c), будем иметь $F_i = T_{ba}(x,y) \circ X \circ T_{ib}(\widetilde{\alpha}_b,\widetilde{\beta}_b) \circ T_{ia}(\widetilde{\alpha}_a,\widetilde{\beta}_a) \circ Y \overset{i}{\tilde{\to}} X \circ T_{ib}(\widetilde{\alpha}_b,\widetilde{\beta}_b) \circ T_{ia}(\widetilde{\alpha}_a,\widetilde{\beta}_a) \circ Y$ (в этой записи $\widetilde{\alpha}_a, \widetilde{\alpha}_b \in R_i^\circ$ и $\widetilde{\beta}_a\widetilde{\beta}_b \notin J$, что легко усматривается из формул соотношения 4a)). Итак, при указанных требованиях на аргументы, в $F_i$ "переставлялись" любые две ее соседние буквы. Отсюда справедливость леммы следует уже очевидным образом. □

Введем на множестве всех слов подалфавита

$$\mathbf{T}_{kr}(\gamma,\delta),\quad \langle\gamma,\delta\rangle \in E(R\times J);\quad D_k(\varepsilon),\quad \varepsilon \in O(R) \tag{5}$$

(алфавита (4)) отношения $\underset{i}{\tilde{\to}}$, $1 \le i \le n$, положив $W \underset{i}{\tilde{\to}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W = Y \circ V$, где $Y$ — некоторое слово (алфавита (5)), не содержащее недиагональные буквы вида $\mathbf{T}_{kr}(\gamma,\delta)$, для которых $i \ge \min\{k,r\}$. Эти отношения также будут рефлексивными и транзитивными. Наряду с $F_i$ рассмотрим также формы $\mathbf{F}_k = \prod\limits_{k<q\le n} \mathbf{T}_{kq}(\gamma_q,\delta_q)$, $1 \le k < n$, где при $\delta_q = 0$ соответствующий сомножитель $\mathbf{T}_{kq}(\gamma_q,\delta_q)$ считается равным нулю (и здесь порядок сомножителей произвольный).

**Лемма 2.** *Пусть задана форма* $\mathbf{F}_k = \mathbf{T}_{ks}(\gamma_s, \delta_s) \circ \cdots \circ \mathbf{T}_{kj}(\gamma_j, \delta_j)$ *длины не меньше двух* ($\delta_t \neq 0$ *при всех* $t = s, \ldots, j$) *и пусть* $p, \ldots, q$ — *произвольная перестановка из чисел* $s, \ldots, j$. *Тогда, применяя соотношения* 6a) *и* 6c), *можно выполнить преобразование*

$$\mathbf{F}_k \underset{k}{\overset{\sim}{\to}} \mathbf{T}_{kp}(\sigma_p, \tau_p) \circ \cdots \circ \mathbf{T}_{kq}(\sigma_q, \tau_q) = \mathbf{F}_k,$$

*где во второй форме* $\mathbf{F}_k$ $\tau_t \neq 0$ *при всех* $t = p, \ldots, q$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

## 5. Трансформационные преобразования

В этом пункте сформулируем две теоремы, которые при доказательстве основного результата работы будут играть базовую роль. Примем предварительно следующие обозначения и соглашения. Если в форме $F_i = \prod\limits_{q \in P_i} T_{iq}(\alpha_q, \beta_q)$ $(1 \leq i \leq m(n-1))$ ее сомножитель $T_{ik}(\alpha_k, \beta_k)$ нулевой, то это условимся обозначать как $F_i(\neq k)$. Аналогичный смысл придается и записи $F_i(\neq k, r)$. Наряду с формами $F_i$ введем также формы $f_i = F_i(\neq s) \circ (is)$, $s \geq i$ (ясно, что $F_i(\neq s) = F_i$ при $s = i$). Формы $f_i$ будем называть *внутренними* ступени $i$. Далее, две формы $F_i$ и $\widetilde{F}_i = \prod\limits_{q \in P_i} T_{iq}(\widetilde{\alpha}_q, \widetilde{\beta}_q)$ будем называть *однотипными*, если для них $\beta_q \equiv \widetilde{\beta}_q$ при всех $q \in P_i$.

**Теорема 1** (о внутренней трансформации букв). *Пусть* $f_i = F_i(\neq s) \circ (is)$ $(1 \leq i \leq m(n-1))$ — *произвольная ненулевая внутренняя форма ступени* $i$. *Пусть, далее,* $x$ *обозначает одну из следующих букв алфавита* (4): $T_{rj}(\alpha, \beta)$, $\beta \not\equiv 0$, $\min\{r, j\} \geq i$; $\mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)$, $\delta \neq 0$; $D_k(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$. *Тогда, применяя соотношения* 2a), 2b) *и* 3–5, *можно выполнить преобразование*

$$V = f_i \circ x \overset{i}{\overset{\sim}{\to}} \widetilde{f}_i, \tag{6}$$

*где* $\widetilde{f}_i$ — *некоторая (уже, вообще говоря, другая) внутренняя форма ступени* $i$.

**Доказательство.** Ниже для простоты записей под $\overset{\sim}{\to}$ условимся понимать $\overset{i}{\overset{\sim}{\to}}$. По такой же причине $*$ и $\cdot$ будут означать некоторые (различные на разных местах) элементы из $R^\circ$ и $J$ соответственно.

Доказательство является комбинаторным и различает следующие случаи.

I. $x = D_k(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$. В этом случае, используя соотношения 2a), 2b), требуемую форму получаем сразу $V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is)$ (здесь $\widetilde{F}_i(\neq s)$ — некоторая, однотипная с $F_i(\neq s)$, форма).

II. $x = \mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)$, $\delta \neq 0$. Различаем следующие подслучаи.

a) $s = i$, т. е. $V = F_i \circ \mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)$. Пусть $T_{ik}(\alpha_k, \beta_k)$ — последняя ненулевая буква в $F_i$. Если здесь множества $\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, $\{p, q\}$ не пересекаются или совпадают, то, применяя 3d) и 5a), будем иметь $V = F_i(\neq k) \circ [T_{ik}(\alpha_k, \beta_k) \circ \mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)] = F_i(\neq k) \circ \mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta) \circ T_{ik}(\alpha_k, \beta_k)$. Пусть $\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, $\{p, q\}$ пересекаются по одному элементу. Если здесь $\mathbf{i} \in \{p, q\}$ $(\to \mathbf{k} \neq p, q)$, то при необходимости используя 3d), можем считать $p = \mathbf{i}$, и, применяя 5b), приходим к $V = F_i(\neq k) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{k}q}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{p\mathbf{k}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{pq}(*, \cdot) \circ T_{ik}(\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\beta}_k)$. Если же $\mathbf{k} \in \{p, q\}$, то, применяя 3b), 3d) и 5b), будем иметь $V = F_i(\neq k) \circ [T_{ki}(\alpha_k, -\beta_k) \circ \mathbf{T}_{rq}(\gamma, \delta)] = F_i(\neq k) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{i}q}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{r\mathbf{i}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{rq}(*, \cdot) \circ T_{ki}(\widetilde{\alpha}_k, -\widetilde{\beta}_k) = F_i(\neq k) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{i}q}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{r\mathbf{i}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{rq}(*, \cdot) \circ T_{ik}(\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\beta}_k)$. Итак, в рассматриваемом случае буква $\mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)$ переставляется с $T_{ik}(\alpha_k, \beta_k)$ в виде некоторого “жирного” слова (т. е. слова, составленного из “жирных” букв). Продолжая эти перестановки и впредь, приходим к записи $V = \mathbf{V} \circ \widetilde{F}_i$, где $\widetilde{F}_i$ — некоторая однотипная с $F_i$ форма, а $\mathbf{V}$ — также некоторое “жирное” слово. Последнее согласно определению $\overset{i}{\overset{\sim}{\to}}$ означает и $V \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i$.

b) $s > i$. В этом случае рассматриваемое слово имеет вид $V = F_i(\neq s) \circ [(\pi, \chi)_{is} \circ \mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)]$. Если здесь множества $\{\mathbf{i}, \mathbf{s}\}$, $\{p, q\}$ не пересекаются или совпадают, то, используя 5a) и 3d), будем иметь $V = F_i(\neq s) \circ \mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta) \circ (\pi, \chi)_{is}$. Пусть они пересекаются по одному элементу и пусть для определенности $\mathbf{i} \in \{p, q\}$ $(\to \mathbf{s} \neq p, q)$. Применяя (к выделенному отрезку) соотношения 5c) и 3d), получаем $V = F_i(\neq s) \circ [(\pi, \chi)_{is} \circ \mathbf{T}_{\mathbf{i}a}(*, \cdot)] = F_i(\neq s) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{s}a}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{is}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{i}a}(*, \cdot) \circ (\pi, \chi)_{is}$, где $a$ — номер из $\{p, q\}$, отличный от $\mathbf{i}$. Оба эти случая применением (уже разобранного) п. a) приводят нас к $V \mathrel{=\!\!\tilde{\to}} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$, т. е. к требуемой записи. А что касается случая $\mathbf{s} \in \{p, q\}$ $(\to \mathbf{i} \neq p, q)$, то он сводится к случаю $\mathbf{i} \in \{p, q\}$ ввиду соотношения 3b).

III. $x = T_{rj}(\alpha, \beta)$, $r \equiv i \pmod m$ $(\beta \not\equiv 0)$. Разберем сначала случай $s = i$. Здесь рассматриваемое слово имеет вид $V = F_i \circ T_{rj}(\alpha, \beta)$. Не теряя общности, в нем ввиду 3b) можно считать $r < j$. Рассмотрим следующие подслучаи.

a) $r = i$. Применяя лемму 1 и соотношения 3a), будем иметь $V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq j) \circ [T_{ij}(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j) \circ T_{ij}(\alpha, \beta)] = \widetilde{F}_i(\neq j) \circ T_{ij}(*, \delta)$. Приводимость полученного слова к виду (6) при $\delta \equiv 0$ сводится к разобранному п. II (т. к. в этом случае $T_{ij}(*, \delta) = \mathbf{T}_{\mathbf{ij}}(*, \delta)$). В других случаях оно дает требуемую форму.

b) $r > i$. Используя лемму 1, а также соотношения 5d), 3b) и 4c), будем иметь

$$V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ [T_{ir}(\widetilde{\alpha}_r, \widetilde{\beta}_r) \circ T_{jr}(\alpha, -\beta)] \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ [T_{ij}(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j) \circ T_{rj}(*, *)] \circ T_{ij}(\alpha, *) \circ$$
$$\circ T_{ir}(\beta, *) = [\widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ T_{rj}(*, *)] \circ T_{ir}(\gamma, *) \circ T_{ij}(\delta, *) \circ T_{ij}(\alpha, *) \circ T_{ir}(\beta, *) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ$$
$$\circ T_{ir}(\gamma, *) \circ T_{ij}(\delta, *) \circ T_{ij}(\alpha, *) \circ T_{ir}(\beta, *) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in R_i^\circ),$$

т. е. приводимость (6) сводится к последовательному выполнению уже разобранного п. IIIa) (звездочки — какие-то элементы из $R_i$).

Переходим к рассмотрению случаев $s > i$. Здесь для слова $V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ T_{rj}(\alpha, \beta)$ возможны следующие подслучаи.

c) $r = i$. Если при этом и $j = s$, то, используя 3a), будем иметь $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ T_{is}(\alpha, \beta)] = F_i(\neq s) \circ T_{is}(*, *)$, т. е. имеем слово из п. IIIa). Пусть $j \neq s$. Применяя 4b), получаем $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ T_{ij}(\alpha, \beta)] = [F_i(\neq s) \circ T_{sj}(*, *) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{is}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{ij}}(*, \cdot)] \circ (is)$. Дальнейшее применение к этому выражению результатов пп. IIIb), IIIa) и II приводит его к требуемому виду $V \tilde{\to} \widetilde{F}_i \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{f}_i$.

d) $r > i$. Если $r = s$, то, применяя соотношения 3b), 4b), а также результаты разобранных пп. IIIa), II, преобразование (6) выполняется в виде

$$V = F_i(\neq s) \circ [(si) \circ T_{sj}(\alpha, -\beta)] = [F_i(\neq s) \circ T_{ij}(*, *) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{si}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{sj}}(*, \cdot)] \circ (si) \tilde{\to} \widetilde{f}_i \circ (si) = \widetilde{f}_i \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{f}_i.$$

При $j = s$, используя 3b), имеем $V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ T_{sr}(\alpha, -\beta)$, т. е. приводимость (6) в этом случае сводится к только что разобранному случаю $r = s$.

e) $\{i, s\} \cap \{r, j\} = \varnothing$. Используя 4c) и результаты разобранного подпункта IIIb), получаем требуемую форму $V = [F_i(\neq s) \circ T_{rj}(\alpha, \beta)] \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$.

IV. $x = T_{rj}(\alpha, \beta)$, $i < r \not\equiv \pmod m$ $(\beta \not\equiv 0)$. Ясно, что этот случай имеет место только при $m \geq 2$. Ввиду 3b) ниже будем считать $j > r$, здесь $j\{i\} = m(\mathbf{j} - 1) + r(i)$.

Рассмотрим сначала случаи $s = i$, т. е. $V = F_i \circ T_{rj}(\alpha, \beta)$.

a) $\mathbf{r} = \mathbf{i}$ и $F_i$ не содержит ненулевые сомножители вида $T_{i, j\{i\}}(*, *)$. Пусть $T_{ik}(\alpha_k, \beta_k)$ — последняя ненулевая буква из $F_i$. Применяя 4d) и п. II, будем иметь $V = F_i(\neq j\{i\}, k) \circ [T_{ik}(\alpha_k, \beta_k) \circ T_{rj}(\alpha, \beta)] = [F_i(\neq j\{i\}, k) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{kj}}(*, \cdot) \circ \mathbf{T}_{\mathbf{ik}}(*, \cdot)] \circ T_{rj}(*, *) \circ T_{ik}(\alpha_k, \beta_k) \tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq j\{i\}, k) \circ T_{rj}(*, *)] \circ T_{ik}(\alpha_k, \beta_k)$. Продолжая описанный процесс передвижения (налево) букв $T_{rj}(*, *)$, приходим к $V \tilde{\to} T_{rj}(*, *) \circ \widetilde{F}_i(\neq j\{i\}) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq j\{i\})$, т. е. к требуемому виду.

b) $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, но $F_i$ содержит ненулевую букву $T_{i, j\{i\}}(*, *)$. Используя лемму 1, 4c), а также результат разобранного п. IVa), получаем требуемую форму $V \tilde{\to} F_i(\neq j\{i\}) \circ [T_{i, j\{i\}}(\widetilde{\alpha}_{j\{i\}}, \widetilde{\beta}_{j\{i\}}) \circ T_{rj}(\alpha, \beta)] = [\widetilde{F}_i(\neq j\{i\}) \circ T_{rj}(\alpha, \beta)] \circ T_{i, j\{i\}}(\widetilde{\alpha}_{j\{i\}}, \widetilde{\beta}_{j\{i\}}) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq j\{i\}) \circ T_{i, j\{i\}}(\widetilde{\alpha}_{j\{i\}}, \widetilde{\beta}_{j\{i\}}) = \widetilde{F}_i$.

c) $\mathbf{r} > \mathbf{i}$. В этом случае, используя лемму 1, соотношения 3b), 4d), п. II, а также 4c), получаем требуемый вид

$$V \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq r\{i\}) \circ [T_{i,r\{i\}}(*,*) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)] = \widetilde{F}_i(\neq r\{i\}) \circ [T_{r\{i\},i}(*,*) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)] =$$
$$= [\widetilde{F}_i(\neq r\{i\}) \circ \mathbf{T_{ij}}(*,\cdot) \circ \mathbf{T_{ri}}(*,\cdot)] \circ T_{rj}(*,*) \circ T_{r\{i\},i} \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq r\{i\}) \circ T_{rj}(*,*) \circ T_{r\{i\},i}(*,*) \overset{\sim}{\to}$$
$$\overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq r\{i\}, j\{i\}) \circ [T_{i,j\{i\}}(*,*) \circ T_{rj}(*,*)] \circ T_{i,r\{i\}}(*,*) = \widetilde{F}_i(\neq r\{i\}, j\{i\}) \circ [T_{j\{i\},i}(*,*) \circ T_{jr}(*,*)] \circ$$
$$\circ T_{i,r\{i\}}(*,*) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq r\{i\}, j\{i\}) \circ \mathbf{T_{ir}}(*,\cdot) \circ \mathbf{T_{ji}}(*,\cdot)] \circ T_{jr}(*,*) \circ T_{j\{i\},i}(*,*) \circ T_{i,r\{i\}}(*,*) \overset{\sim}{\to}$$
$$\overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq r\{i\}, j\{i\}) \circ T_{rj}(*,*)] \circ T_{i,j\{i\}}(*,*) \circ T_{i,r\{i\}}(*,*) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq r\{i\}, j\{i\}) \circ T_{i,j\{i\}}(*,*) \circ T_{i,r\{i\}}(*,*) = \widetilde{F}_i.$$

Пусть теперь $s > i$, т. е. $V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)$. Здесь возможны следующие случаи.

d) $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \neq \mathbf{s}$, В этом случае, применяя 4d) и результаты пп. II, IVa), IVb), будем иметь $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)] = [F_i(\neq s) \circ \mathbf{T_{sj}}(*,\cdot) \circ \mathbf{T_{is}}(*,\cdot)] \circ T_{rj}(*,*) \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ T_{rj}(*,*)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$.

e) $\mathbf{s} \in \{\mathbf{r}, \mathbf{j}\}$. Если $\mathbf{s} = \mathbf{r}$ ($\to \mathbf{j} \neq \mathbf{s}$), то используя 3b), 4d) и пп. II, IVc), приходим к требуемой форме

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)] = F_i(\neq s) \circ [(si) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)] = [F_i(\neq s) \circ \mathbf{T_{ij}}(*,\cdot) \circ \mathbf{T_{si}}(*,\cdot)] \circ$$
$$\circ T_{rj}(*,*) \circ (si) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ T_{rj}(*,*)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i.$$

Случай $\mathbf{j} = \mathbf{s}$ ($\to \mathbf{r} \neq \mathbf{s}$) приведет к этому же результату при помощи тех же 3b), 4d) и пп. II, IVc).

f) $\mathbf{r}=\mathbf{i}$, $\mathbf{j}=\mathbf{s}$ или $\{\mathbf{i},\mathbf{s}\} \cap \{\mathbf{r},\mathbf{j}\} = \varnothing$. Применяя 4c) и IVa)–c), будем иметь $V = [F_i(\neq s) \circ T_{rj}(\alpha,\beta)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$.

Таким образом, во всех имеющихся случаях преобразование (6) в силу указанных в формулировке соотношений выполнимо. □

**Теорема 2** (о внешней трансформации букв). *Пусть задана ненулевая внешняя форма* $\mathbf{F}_i$, $1 \leq i < n$, *и* $\mathbf{x}$ *означает одну из букв*: $D_k(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$, *или* $\mathbf{T}_{pq}(\alpha,\beta)$, $\beta \neq 0$, $\min\{p,q\} \geq i$. *Тогда, применяя соотношения* 2c), 2d), 3c), 3d) *и* 6, *можно выполнить преобразование*

$$\mathbf{F}_i \circ \mathbf{x} \underset{i}{\overset{\sim}{\to}} \mathbf{F}_i,$$

*где вторая* $\mathbf{F}_i$ — *некоторая* (*уже другая*) *внешняя форма ступени* $i$.

Доказательство этой теоремы проводится рассуждениями, аналогичными пп. I и III из доказательства теоремы 1.

## 6. Представимость в стандартной форме

Дальнейшие рассуждения используют стандартные формы матриц из $O^\circ(n,R)$. *Стандартными формами* в $O^\circ(n,R)$ объявляем всевозможные комбинации алфавита (4) вида

$$D_1(\sigma_1) \circ \cdots \circ D_n(\sigma_n) \circ \mathbf{F}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{F}_1 \circ f_{m(n-1)} \circ \cdots \circ f_1. \qquad (sf)$$

Представления $(sf)$, очевидно, не однозначны.

Целью этого пункта является доказательство следующего утверждения:

**Теорема 3.** *Применяя соотношения* 1–6, *всякое слово* $W$ *алфавита* (4) *можно преобразовать к стандартному виду* $(sf)$.

Доказательство проведем в три этапа.

I. Выделение внутренних форм. Не теряя общности, заданное слово можно считать представленным в виде $W \overset{\sim}{\underset{1}{\to}} f_1 \circ Y$, где $f_1$ — некоторая внутренняя форма ступени 1, а $Y$ — соответствующее ей дополнение. Пусть $Y = y \circ \widetilde{Y}$, т. е. $y$ — первая ненулевая буква $Y$. Применяя к стыку $V = f_1 \circ y$ трансформационную теорему 1, получаем $W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1 \circ \widetilde{Y}$, где $f_1$ — (вообще говоря, уже другая) внутренняя форма ступени 1. Продолжая это сокращение дополнения несколько раз, приходим к записи вида $W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1$, т. е. к разложению $W = X^1 \circ f_1$, где $X^1$ — некоторое слово (согласно определению $\overset{1}{\tilde{\to}}$), не содержащее буквы вида $T_{kr}(\alpha, \beta)$, $\beta \not\equiv 0$, $\min\{k, r\} = 1$. Точно таким же образом, поступая с сомножителем $X^1$, выделяем из него внутреннюю форму $f_2$ (ступени 2), т. е. будем иметь $W = X^2 \circ f_2 \circ f_1$, где слово $X^2$ уже не содержит буквы вида $T_{kr}(\alpha, \beta)$, $\beta \not\equiv 0$, $\min\{k, r\} \le 2$, и т. д. Описанный процесс отщепления форм на $m(n-1)$-м шаге приводит к $W = X^{m(n-1)} \circ f_{m(n-1)} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$. В полученной записи слово $X^{m(n-1)}$ уже не содержит (по определению $\overset{m(n-1)}{\tilde{\to}}$) буквы вида $T_{kr}(\alpha, \beta)$, $\beta \not\equiv 0$, т. е. является некоторым словом алфавита (5).

II. Выделение внешних форм. Теперь (опять без потери общности) слово $X^{m(n-1)}$ будем считать представленным в виде $X^{m(n-1)} \underset{1}{\tilde{\to}} \mathbf{F_1} \circ \mathbf{Z}$, где $\mathbf{F}_1$ — некоторая внешняя форма ступени 1, а $\mathbf{Z}$ — ее дополнение. Применяя к $\mathbf{F}_1 \circ \mathbf{Z}$ трансформационную теорему 2 несколько раз (как и выше), приходим к $X^{m(n-1)} \underset{1}{\tilde{\to}} \mathbf{F}_1$, т. е. к разложению $X^{m(n-1)} = \mathbf{V}^1 \circ \mathbf{F}_1$, где $\mathbf{F}_1$ имеет прежний смысл и $\mathbf{V}$ — некоторое слово, не содержащее буквы вида $\mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)$, $\delta \ne 0$, $\min\{p, q\} = 1$. Аналогичным образом, вытягивая из $\mathbf{V}^1$ внешнюю форму $\mathbf{F}_2$, получаем представление $X^{m(n-1)} = \mathbf{V}^2 \circ \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1$, где $\mathbf{V}^2$ не содержит буквы вида $\mathbf{T}_{pq}(\gamma, \delta)$, $\delta \ne 0$, $\min\{p, q\} \le 2$, и т. д. Этот процесс на $(n-1)$-м шаге даст $X^{m(n-1)} = D \circ \mathbf{F}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1$, где сомножитель $D$ (согласно определению $\underset{n-1}{\tilde{\to}}$ и ввиду 6d)) состоит уже только из диагональных букв.

III. Разложение сомножителя $D$. То, что этот сомножитель представляется в виде $D = D_1(\sigma_1) \circ \cdots \circ D_n(\sigma_n)$ при помощи соотношений 1, уже очевидно.

Подставляя теперь вместо $X^{m(n-1)}$ и $D$ их выражения, приходим к стандартной записи слова $W$. $\square$

## 7. Основной результат

Ниже $s(W)$ будет обозначать одну (не важно какую) из стандартных форм слова $W$. Далее, две строки $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{mn} \rangle$ и $\langle y_1, y_2, \ldots, y_{mn} \rangle$ с элементами из $R_i$ $(1 \le i \le m)$ будем называть *сравнимыми*, если для них $x_k \equiv y_k$ при всех $k = 1, \ldots, mn$.

**Теорема 4.** *Обобщенная ортогональная группа* $O^\circ(n, R)$, $n \ge 2$, *над коммутативным полулокальным кольцом* $R$ *с условиями* $(R_i)$, $(-e_i)$, $(J)$ *в образующих* (4) *представляется соотношениями* 1–6.

**Доказательство.** Пусть $W = 0$ — произвольное соотношение группы $O^\circ(n, R)$ в алфавите (4). Применяя к левой части теорему 3, представим его в виде

$$s(W) = D_1(\sigma_1) \circ \cdots \circ D_n(\sigma_n) \circ \mathbf{F}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1 \circ f_{m(n-1)} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = 0. \tag{7}$$

Покажем, что равенство (7) возможно только тогда, когда все его буквы нулевые. Установление этого факта в соответствии с теоремой 3 осуществляется в три этапа.

I. Аннуляция внутренних букв. Ясно, что в (7) отрезок $a = D_1(\sigma_1) \circ \cdots \circ D_n(\sigma_n) \circ \mathbf{F}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{F}_1 = (a_{ij})$ — $ed$-радикальная матрица и $a_{ii} \in R_i^\circ$ при всех $i = 1, \ldots, mn$. Очевидно, первая строка отрезка $f_{m(n-1)} \circ \cdots \circ f_2$ (при расширенном представлении) является радикальной (т. е. составленной сплошь из радикальных элементов). Пусть $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{mn} \rangle$ — первая строка формы $f_1$. Тогда, как легко видеть, первая строка в $s(W)$ будет сравнима с $\langle a_{11} \circ x_1, x_2 + a_{11}x_2, \ldots, x_{mn} + a_{11}x_{mn} \rangle$, что ввиду (7) дает $a_{11} \circ x_1 \equiv x_k + a_{11}x_k \equiv 0$. Последнее очевидным образом влечет за собой $x_1 \in R_1^\circ$ и $x_k \equiv 0$ при всех $k = 2, \ldots, mn$ (т. к. $x_k + a_{11}x_k \equiv 0 \to a_{11} \circ x_k \equiv a_{11}$).

Пусть теперь $f_1 = F_1 \circ (1s)$ — разложение формы $f_1$. Если допустить, что $s > 1$, то это означало бы $x_1 \equiv -e_1$ (т. е. дало бы противоречие с $x_1 \in R_1^\circ$). Поэтому должно быть $s = 1$ (это означает, что $(1s) = 0$) и $f_1 = F_1 = \prod\limits_{k \in P_1} T_{1k}(\alpha_k, \beta_k)$. Легко проверить, что позиции $\langle 1, k \rangle$, $k \in P_1$, формы $F_1$ сравнимы с суммами вида $\beta_k + \gamma_k\beta_k$, где $\gamma_k$ — некоторые элементы из $R_1^\circ$. Согласно установленному выше, имеем $\beta_k + \gamma_k\beta_k \equiv 0$, что, в свою очередь, влечет за собой $\beta_k \equiv 0$ при всех $k \in P_1$. А это по определению формы $f_1$ означает равенство нулю всех ее букв $T_{1k}(\alpha_k, \beta_k)$.

Удалив теперь из (7) сомножитель $f_1$ и точно таким же образом поступая с его второй строкой, доказываем равенство нулю всех букв из $f_2$ и т. д. Этот процесс на $m(n-1)$-м шаге приводит к

$$s(W) = D_1(\sigma_1) \circ \cdots \circ D_n(\sigma_n) \circ \mathbf{F}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1 = 0. \qquad (8)$$

II. Аннуляция внешних недиагональных букв. Начиная отсюда, форму $s(W)$ из (8) будем интерпретировать как некоторую нерасширенную матрицу. Ясно, что $s(W)$ и $D_1(\sigma_1) \circ \mathbf{F}_1$ имеют одинаковые первые строки. Пусть $\mathbf{F}_1 = \prod\limits_{1<k\le n} \mathbf{T}_{1k}(\gamma_k, \delta_k)$ — разложение (внешней) формы $\mathbf{F}_1$. Позиции $\langle 1, k\rangle$, $1 < k \le n$, в $D_1(\sigma_1) \circ \mathbf{F}_1$ представляются в виде сумм $\delta_k + \mu_k\delta_k$, где $\mu_k$ — некоторые элементы из $R^\circ$, и, как показывает (8), все они равны нулю. Отсюда имеем $\mu_k \circ \delta_k = \mu_k$, т. е. $\delta_k = 0$ при всех $k = 2, \ldots, n$. А это по определению $\mathbf{F}_1$ означает равенство нулю всех ее букв.

Удалив теперь из (8) форму $\mathbf{F}_1$ и повторяя проделанные рассуждения со второй строкой полученного равенства, устанавливаем равенство нулю и всех букв $\mathbf{F}_2$ и т. д. Описанный процесс на $(n-1)$-м шаге приводит к

$$s(W) = D_1(\sigma_1) \circ \cdots \circ D_n(\sigma_n) = 0.$$

III. Аннуляция диагональных букв. Последнее равенство теперь уже влечет за собой $D_k(\sigma_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, очевидным образом.

Итак, показано, что равенство (7) возможно только тогда, когда его форма $s(W)$ графически нулевая. А это и означает, что $W = 0$ есть следствие соотношений из 1–6. $\square$

В заключение автор искренне благодарит профессоров Левчука В.М. и Михалева А.В. за полезные советы при оформлении работы. Он выражает признательность также рецензенту за ценные рекомендации.

## Литература

1. Сатаров Ж.С. *Определяющие соотношения ортогональной группы над упорядоченным евклидовым полем* // Сиб. матем. журн. – 1986. – Т. 27. – № 2. – С. 171–175.
2. Сатаров Ж.С. *Определяющие соотношения классических ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 66–74.
3. Сатаров Ж.С. *Определяющие соотношения обобщенных ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами без единицы* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 24–32.
4. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., Скорняков Л.А., Шестаков И.П. *Общая алгебра.* – М.: Наука, 1990. – 591 с.

*Ошский технологический университет (Кыргызстан)*

*Поступили*
*первый вариант* 20.01.2003
*окончательный вариант* 28.04.2006