ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.93+531.38

Ю.В. КОГАН, А.В. РУБИНОВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДРЕЙФОВ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ

В данной работе рассматривается задача Коши

$$\frac{d\theta}{dt} = p + q\sin 2\theta + r\sin(4\theta - \varphi), \quad \theta(0) = \eta, \tag{1}$$

решение которой описывает дрейфы волнового твердотельного гироскопа [1]–[3], где p, q, r, φ — постоянные величины, $t \in [0, \infty)$, $\eta \in \mathbb{R}$. Изучена зависимость от параметров свойств решения этой задачи, важных для понимания характера функционирования гироскопа, а также определены значения параметров, разделяющие режимы функционирования гироскопа и определяющие его переход в режим полного угла (режим интегрирующего гироскопа) [4].

Задача (1) является частным случаем более общей задачи вида

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta), \quad \theta(0) = \eta, \quad t \in [0, \infty), \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f(\theta)$ — регулярная периодическая функция с периодом π.

Теорема 1. *Пусть $f(\theta)$ — регулярная периодическая функция с периодом π. Тогда*

a) *если функция $f(\theta) \neq 0$ для всех $\theta \in [0, \pi)$, то решение задачи (2) имеет вид*

$$\theta(t) = kt + h(t), \tag{3}$$

где $h(t)$ — периодическая функция с периодом $T = \int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{f(\theta)}$, а коэффициент k определяется равенством $k = \frac{\pi}{T}$;

b) *если функция $f(\theta)$ обращается в нуль на $[0, \pi)$ и $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m$ — все нули этой функции на промежутке $[0, \pi)$, $\eta \in (\theta_{j-1}, \theta_j)$, $j \in \{1, \dots, m+1\}$ (где $\theta_0 = \theta_m - \pi$, $\theta_{m+1} = \theta_1 + \pi$), то в случае $f(\eta) > 0$ решение $\theta(t)$ возрастает и $\theta(t) \to \theta_j$ при $t \to \infty$, а в случае $f(\eta) < 0$ решение $\theta(t)$ убывает и $\theta(t) \to \theta_{j-1}$ при $t \to \infty$. Если $\eta = \theta_j$ при некотором j, то $\theta(t) \equiv \theta_j$. Аналогичное поведение решения справедливо и при $\eta \in [\pi n, \pi n + \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. В случае a) (без ограничения общности можно считать, что $f(\theta) > 0$ для всех $\theta \in [0, \pi)$) из равенства $t = \int\limits_\eta^{\theta(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)}$, справедливого для решения $\theta(t)$ задачи (2), π-периодичности функции $f(\theta)$ и возрастания функции $\theta(t)$ вытекает, что $\theta(T) = \eta + \pi$. Отсюда следует, что функция $\widetilde{\theta}(t) = \theta(t+T) - \pi$ также удовлетворяет условиям задачи (2) и поэтому $\widetilde{\theta}(t) \equiv \theta(t)$. Далее, функция $h(t) = \theta(t) - kt$ является периодической с периодом T, т. к.

$$h(t+T) - h(t) = \theta(t+T) - \theta(t) - \pi \equiv 0.$$

В случае b) при $f(\eta) > 0$ ($f(\eta) < 0$) утверждение теоремы непосредственно вытекает из расходимости интеграла $\int\limits_\eta^{\theta_j} \frac{d\xi}{f(\xi)}$ (функция $f(\xi)$ регулярна и имеет нуль кратности не меньше единицы в точке θ_j) и возрастания (убывания) функции $\theta(t)$. При $\eta = \theta_j$ единственным решением уравнения (2) является решение $\theta(t) \equiv \theta_j$. $\square$

Рассмотрим теперь следующий вопрос: при каких соотношениях между параметрами p, q, r, φ функция $f(\theta) = p + q\sin 2\theta + r\sin(4\theta - \varphi)$ обращается в нуль на отрезке $[0, \pi]$. Пусть $g(\theta; q, r, \varphi) = -q\sin(2\theta) - r\sin(4\theta - \varphi)$. Введем следующие обозначения:

$$p_+(q,r,\varphi) = \max_{\theta\in[0,\pi]} g(\theta; q, r, \varphi), \quad p_-(q,r,\varphi) = \min_{\theta\in[0,\pi]} g(\theta; q, r, \varphi),$$

где $(q, r, \varphi) \in \mathbb{R}^3$. Тогда множество $G \subset \mathbb{R}^4$ тех значений параметров (p, q, r, φ), при которых функция $f(\theta) = f(\theta; p, q, r, \varphi)$ не обращается в нуль на отрезке $[0, \pi]$, представляется в виде

$$G = \{(p, q, r, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \mid p > p_+(q, r, \varphi)\} \cup \{(p, q, r, \varphi) \in \mathbb{R}^4 \mid p < p_-(q, r, \varphi)\}.$$

Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^3 \to C_R[0, \pi]$ ($C_R[0, \pi]$ — вещественное пространство непрерывных на $[0, \pi]$ функций с нормой $\|g\| = \max_{\theta\in[0,\pi]} |g(\theta)|$), задаваемое как $(q, r, \varphi) \mapsto g(\cdot; q, r, \varphi)$. Так как это отображение непрерывно и функционалы $F_+(g) = \max_{\theta\in[0,\pi]} g(\theta)$ и $F_-(g) = \min_{\theta\in[0,\pi]} g(\theta)$ также непрерывны в $C_R[0, \pi]$, то функции $p_\pm(q, r, \varphi)$ непрерывны по совокупности переменных в $\mathbb{R}^3$, а G — открытое множество. В дальнейшем покажем, что функции $p_\pm(q, r, \varphi)$ являются (кроме некоторых исключительных случаев) соответственно наибольшим и наименьшим корнями многочлена степени не выше четырех с коэффициентами, зависящими от (q, r, φ). Такое представление функций $p_\pm(q, r, \varphi)$ как корней многочлена удобно в ряде вопросов, связанных с задачей (1), например, при нахождении с заданными значениями p и некоторых из параметров q, r, φ значений остальных параметров, для которых в теореме 1 имеет место случай а).

Из определения функций $p = p_\pm(q, r, \varphi)$ следует, что функция $f(\theta)$ при $p = p_\pm(q, r, \varphi)$ имеет кратные нули. В выражении $f(\theta; p, q, r, \varphi) = p + q\sin 2\theta + r\sin(4\theta - \varphi)$ сделаем замену переменного $s = \operatorname{ctg}\theta$, $\theta \in (0, \pi)$. Получим представление $f(\theta; p, q, r, \varphi) = Q(s; p, q, r, \varphi)(1 + s^2)^{-2}$, где

$$Q(s; p, q, r, \varphi) = (p - b)s^4 + 2(q + 2a)s^3 + 2(p + 3b)s^2 + 2(q - 2a)s + (p - b),$$

$a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Точка $\theta \in (0, \pi)$ является кратным нулем функции $f(\theta)$ тогда и только тогда, когда соответствующая ей точка $s \in \mathbb{R}$ является кратным нулем функции $Q(s)$. Многочлен $Q(s)$ с ненулевым старшим коэффициентом имеет кратный корень тогда и только тогда, когда дискриминант этого многочлена

$$\begin{aligned} D(p; q, r, \varphi) = 128[2(p^2 - q^2)q^4 + (128p^4 - 160p^2q^2 - 3q^4)r^2 - \\ - 32(8p^2 + 3q^2)r^4 + 128r^6 + q^2r(27q^2r\cos(2\varphi) - 32p^3\sin\varphi + 36p(q^2 + 8r^2)\sin\varphi)] \quad (4) \end{aligned}$$

равен нулю ([5], гл. 5, § 34, с. 126). Если же $p - r\sin\varphi = 0$, а $q + 2r\cos\varphi \neq 0$, то у многочлена $Q(s)$ старший коэффициент и свободный член равны нулю, и в этом случае $Q(s)$ является многочленом третьей степени с ненулевым старшим коэффициентом $q + 2r\cos\varphi$. Непосредственно из формулы для дискриминанта многочлена четвертой степени следует, что при обращении в нуль одновременно старшего коэффициента и свободного члена получится дискриминант этого же многочлена, но уже рассматриваемого как многочлен третьей степени, умноженный на квадрат коэффициента при s^3. Таким образом, и при выполнении условий $p - b = 0$, $q + 2a \neq 0$ обращение в нуль дискриминанта является необходимым и достаточным условием существования кратных корней многочлена $Q(s)$.

Случай, когда кратными нулями функции $f(\theta)$ являются точки $\theta = 0$, $\theta = \pi$, не охватывается указанной заменой, но он сводится к рассмотренному выше, поскольку $f(\theta; p, q, r, \varphi) = f(\theta + \frac{\pi}{2}; p, -q, r, \varphi)$, а поэтому $p_\pm(q, r, \varphi) = p_\pm(-q, r, \varphi)$ и, кроме того, из (4) следует

$$D(p; q, r, \varphi) = D(p; -q, r, \varphi). \quad \square$$

Далее рассмотрим вопрос о невещественных кратных нулях многочлена $Q(s)$. Заметим, что у многочлена третьей степени с вещественными коэффициентами не может быть невещественных кратных корней. Условия, когда многочлен $Q(s)$ с ненулевым старшим коэффициентом имеет невещественные кратные корни, дает

Лемма. *При $q^2 + r^2 \neq 0$ и $p \neq r \sin\varphi$ многочлен $Q(s; p, q, r, \varphi)$, как многочлен от s, имеет невещественные кратные корни тогда и только тогда, когда выполняется одна из двух систем соотношений*

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad q^2 - 8pr + 8r^2 = 0, \quad |q| > 4|r|$$

или

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad q^2 + 8pr + 8r^2 = 0, \quad |q| > 4|r|.$$

Доказательство. Так как коэффициенты многочлена $Q(s)$ — вещественные числа, то вместе с каждым корнем кратности два этого многочлена корнем многочлена является и комплексно сопряженное число, причем оно имеет также кратность два. Поэтому невещественные кратные корни существуют тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$A(s^2 + \mu s + \nu)^2 = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E, \quad \mu^2 - 4\nu < 0,$$

в котором A, B, C, D, E — коэффициенты многочлена $Q(s)$, а $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Из последнего равенства получим систему соотношений

$$\begin{aligned} 2A\mu &= B, \\ A(\mu^2 + 2\nu) &= C, \\ 2A\mu\nu &= D, \\ A\nu^2 &= E, \\ \mu^2 - 4\nu &< 0. \end{aligned}$$

Заметим, что по условию леммы $A = E = p - r\sin\varphi \neq 0$, откуда следует, что $\nu = 1$, $B = D$. Так как $B = 2(q + 2r\cos\varphi)$, $D = 2(q - 2r\cos\varphi)$, то это означает, что либо $r = 0$, либо $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $A = p - r\sin\varphi$, в первом случае получаем $q = 0$, $r = 0$, что исключается условиями леммы. Пусть $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае $A = p - r$, $C = 2(p + 3r)$. Решая систему, находим, что выполнено соотношение $q^2 - 8pr + 8r^2 = 0$. Так как $p - r \neq 0$, то $\mu = \frac{q}{p-r}$, и неравенство $\mu^2 - 4 < 0$ вместе с предыдущим соотношением дают условие $q^2 = 8pr - 8r^2 < 4(p-r)^2$, откуда следует, что $(p - r)(p - 3r) > 0$. Если $r > 0$, то $p > 3r$ или $p < r$, т. е. $\frac{q^2}{8r} + r > 3r$, что дает условие $|q| > 4r$, а если $r < 0$, то $p < 3r$ или $p > r$, т. е. $\frac{q^2}{8r} + r < 3r$, что дает условие $|q| > -4r$. В итоге получаем неравенство $|q| > 4|r|$ независимо от знака r. Случай $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, рассматривается аналогично. $\square$

Докажем теперь теорему, позволяющую находить функции $p_\pm(q, r, \varphi)$ как нули многочлена $D(p)$.

Теорема 2. *При условии $q^2 + r^2 \neq 0$ значение функции $p_+(q, r, \varphi)$ ($p_-(q, r, \varphi)$) равно наибольшему (наименьшему) корню многочлена $D(p; q, r, \varphi)$, как функции от p, для всех точек (q, r, φ), кроме тех, для которых выполнены соотношения*

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |q| > 4|r|. \tag{5}$$

Для точек (q, r, φ), для которых выполнены условия (5), справедливы равенства

$$p_\pm(q, r, \varphi) = -r\sin\varphi \pm |q|.$$

Доказательство. Пусть $q^2 + r^2 \neq 0$ и $q + 2r\cos\varphi \neq 0$. Как следует из замечания, многочлен $Q(s)$ при $p = p_\pm(q, r, \varphi)$ имеет кратные корни. Поэтому при выполнении указанных условий дискриминант $D(p)$ обращается в нуль при $p = p_\pm(q, r, \varphi)$. С другой стороны, при $p > p_+(q, r, \varphi)$ или при $p < p_-(q, r, \varphi)$ у многочлена $Q(s)$, в силу его определения, нет вещественных корней. Из леммы и замечания следует, что если не выполнены условия (5), то у этого многочлена нет и невещественных кратных корней. Это означает, что $p_+(q,r,\varphi)$ наибольший, а $p_-(q,r,\varphi)$ наименьший из корней $D(p)$. Далее, если $q+2r\cos\varphi=0$, то среди корней многочлена $D(p)$ есть корень $p=r\sin\varphi$, что непосредственно проверяется из формулы для дискриминанта. Подставляя это значение p и значение $q=-2r\cos\varphi$ в формулу для $Q(s)$, находим, что многочлен $Q(s)$ имеет кратные корни, только если $q=2r\cos\varphi$. Из условий $q^2+r^2\neq 0$ следует, что это возможно только при $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. В этом случае корни многочлена $D(p)$ равны $\pm r$ и совпадают со значениями $p_\pm(q,r,\varphi)$. При $\varphi\neq\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, значения $p_\pm(q,r,\varphi)$ являются корнями $D(p)$, отличными от корня $p=r\sin\varphi$, т. к. при этих значениях многочлен $Q(s)$, как следует из замечания, имеет кратные корни, а при $p=r\sin\varphi$ — нет. При значениях $p=p_\pm(q,r,\varphi)$ старший коэффициент многочлена $Q(s)$ отличен от нуля и в силу леммы эти значения являются наибольшими и наименьшими корнями $D(p)$. Наконец, в случае (5) минимум и максимум функции $-q\sin(2\theta)-r\sin(4\theta-\varphi)=-q\sin(2\theta)\pm r\cos(4\theta)=-qt\pm r(1-2t^2)$, где $t=\sin(2\theta)\in[-1,1]$, находятся непосредственно. $\square$

Рассмотрим следующую задачу, интересную с точки зрения приложений: при каких условиях, накладываемых на параметры (p,q,r,φ), выполняется неравенство

$$p-k(p,q,r,\varphi)<\alpha, \tag{6}$$

где $k=k(p,q,r,\varphi)$ — коэффициент в (3), α — максимально допустимый дрейф гироскопа, $p>0$. Будем рассматривать величины q, r, φ как переменные и сделаем замену $q=\rho\cos\psi$, $r=\rho\sin\psi$, $\tau=\frac{\rho}{p}$, где $p>0$, $\rho\geq 0$. В этих обозначениях $f(\theta;p,q,r,\varphi)=p\sigma(\theta;\tau,\psi,\varphi)$, где $\sigma(\theta;\tau,\psi,\varphi)=1+\tau[\cos\psi\sin(2\theta)+\sin\psi\cos(4\theta-\varphi)]$. Если $|\tau|<\frac{1}{2}$, то функция $f(\theta)$ не обращается в нуль, т. е. в теореме 1 имеет место случай а). Пусть

$$\varepsilon(\tau;\psi,\varphi)=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sigma(\theta;\tau,\psi,\varphi)}\right)^{-1}. \tag{7}$$

В этих обозначениях неравенство (6) при условии $|\tau|<\frac{1}{2}$ принимает вид $\varepsilon(\tau;\psi,\varphi)>1-\beta\tau$, $\beta=\frac{\alpha}{\rho}$. Пусть константа c такова, что $0<c<\frac{1}{2}$. Тогда функция $\sigma(\theta;\tau,\psi,\varphi)^{-1}$ раскладывается в равномерно сходящийся по $(\theta;\tau,\psi,\varphi)$ при $\theta\in[0,\pi]$, $|\tau|\leq c$, $\psi\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ ряд по степеням τ, подставляя который в (7), получим

$$\varepsilon(\tau;\psi,\varphi)=\left(1+\sum_{k=1}^\infty d_k(\psi,\varphi)\tau^k\right)^{-1},$$

где

$$d_1(\psi,\varphi)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\psi\sin(2\theta)+\sin\psi\sin(4\theta-\varphi))d\theta=0,$$
$$d_2(\psi,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\psi\sin(2\theta)+\sin\psi\sin(4\theta-\varphi))^2d\theta=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует представление $\varepsilon(\tau;\psi,\varphi)=1-\frac{\tau^2}{2}+O(\tau^3)$, равномерное по (ψ,φ).

Таким образом, неравенство (6) можно записать как $\tau<2\beta+O(\beta^2)$ или окончательно

$$p>\frac{\rho^2}{2\alpha}[1+O(\tfrac{\alpha}{\rho})],\quad \rho=\sqrt{q^2+r^2}. \tag{8}$$

Итак, доказано

Предложение. *Пусть константа c такова, что $0<c<\frac{1}{2}$, и $\alpha>0$, $p>0$. Тогда при условии, что $q^2+r^2\leq cp^2$, неравенство (6) эквивалентно неравенству (8).*

Литература

1. Loper E.J., Lynch D.D., Stevenson K.M. *Projected performance of smaller hemispherical resonator gyros* // IEEE PLANS'86: Positon location and Navigator Symposium. USA Record 86, ch. 2365-5, 1986. – P. 61–64.
2. Егармин Н.Е. *Нелинейные эффекты в динамике вращающегося кругового кольца* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1993. – № 3. – С. 50–59.
3. Егармин Н.Е. *Динамика неидеальной оболочки и управление ее колебаниями* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1993. – № 4. – С. 49–59.
4. Lynch D.D., Matthews A. *Dual-mode hemispherical resonator gyro operating characteristics* // Proc. 2[nd] St. Petersburg International Conf. On Cyroscopic Technology and Navigation. – St. Petersburg, Russia, May 24–25, 1995. – P. 37–44.
5. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра.* – М.: Наука, 1976. – 648 с.

Удмуртский государственный университет

Поступила 13.12.2000