И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.929

В.Г. ИЛЬИЧЕВ

НАСЛЕДУЕМЫЕ СВОЙСТВА НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В МОДЕЛЯХ КОНКУРЕНЦИИ

Введение

Анализ нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений представляет собой непростую математическую задачу из-за трудностей нахождения свойств глобального отображения Пуанкаре (сдвиг-отображение за период). В данной работе предложен и обоснован принцип наследования локальных свойств глобальным отображением Пуанкаре для неавтономных динамических систем. А именно, если некоторое свойство является грубым, локально универсальным и полугрупповым, то этим свойством обладает и глобальное отображение Пуанкаре. Более формально, пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X,t) \tag{0.1}$$

с гладкой правой частью, где $F(X,t) = F(X,t+T)$ для всех (X,t); T — период; X — вектор с компонентами $(x_1,\dots,x_n)$. Предполагаем, что при каждом начальном X^0 решения (0.1) продолжаются вперед неограниченно. При исследовании динамики таких непрерывных моделей ключевую роль играет сдвиг-отображение $X^h = G(X,t,h)$ по траекториям (0.1) с началом в точке X на временно́м интервале $[t,t+h]$, где $h>0$. Известно [1], что если F — гладкая вектор-функция, то G — гладкое отображение. Отображение (Пуанкаре) — сдвиг за время $[0,T]$ будем задавать как в векторной форме $X^T = P(X^0)$, так и в координатной

$$x_1^T = P_1(x_1,\dots,x_n),\dots,x_n^T = P_n(x_1,\dots,x_n).$$

Разумеется, свойства отображения Пуанкаре определяют особенности поведения системы (0.1). Например, знаки отдельных элементов матрицы DP (дифференциала P) доставляют ценную информацию о характере монотонности соответствующих координатных функций. Однако нахождение таких, по сути, глобальных свойств представляет собой непростую задачу. Напротив, совсем просто находятся свойства (эйлеровой) аппроксимации локальных отображений (0.1)

$$X^h = L(X,t,h) = X + hF(X,t),$$

где h мало. Очевидно, при фиксированном h имеем L — гладкое, T — периодическое отображения $R^n \times R$ в себя. Кроме того, имеет место

$$DL(X,t,h) = E + hDF(X,t). \tag{0.2}$$

Здесь актуальна задача: *какие свойства отображения DL наследуются глобальным отображением DP*?

Отдельные примеры таких свойств были приведены в [2]. В общем же случае необходимо задать некоторую математическую версию понятия *свойства*. Здесь полезно предварительно рассмотреть дискретный вариант аналогичной проблемы наследования свойств. Оказывается,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00725.

что ее решение почти тривиально, но позволяет выявить ряд эффективных понятий и для непрерывных моделей.

1. Наследуемые свойства в дискретных моделях

Здесь локальное поведение фазового вектора X задается гладкой системой

$$X^{t+1} = G(X^t, t), \tag{1.1}$$

где $G(X,t) = G(X, t+T)$ для всех X из R^n и $t \geq 0$; натуральное $T > 1$. Данная модель индуцирует (глобальное) гладкое отображение за период $X^T = P(X^0)$.

Пусть ρ — произвольная (возможно разрывная) числовая функция, заданная на множестве всех матриц размера $n \times n$ (фактически ρ зависит от n^2 переменных). С помощью функции ρ будем задавать так называемые *ρ-свойства.* А именно, будем говорить: матрица A обладает ρ-свойством, если выполняется строгое неравенство $\rho(A) > 0$. Например, если $\rho(A) = \det A$, то данным ρ-свойством обладают все матрицы с положительным определителем.

Далее, назовем ρ-свойство *полугрупповым*, если множество всех $n \times n$ матриц, обладающих ρ-свойством, образует мультипликативную полугруппу. Иными словами, из $\rho(A) > 0$ и $\rho(B) > 0$ следует $\rho(AB) > 0$.

Наконец, назовем ρ-свойство *универсальным* для DG (дифференциала G), если неравенство $\rho[DG(X,t)] > 0$ выполняется при всех X и $t \geq 0$. Универсальность ρ-свойства для DP означает, что $\rho[DP(X)] > 0$ при всех X.

Очевидно, имеет место композиция отображений $P = G_1 \circ \cdots \circ G_T$, в которой $G_t = G(X^t, t)$ для целых $t = 1, \ldots, T$. Поэтому возникает произведение соответствующих матриц $DP = DG_1 \times \cdots \times DG_T$. Отсюда получаем следующий принцип наследования локальных свойств DG глобальным отображением DP.

Теорема 1. *Пусть свойство ρ является полугрупповым и универсальным для DG, тогда оно универсально и для DP.*

Пример 1. Пусть для некоторой трехмерной системы (1.1) знаковая структура DG имеет вид S (см. ниже). Хотя семейство таких матриц не замкнуто относительно операции умножения, однако оно порождает мультипликативную полугруппу типа Z,

$$S = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Z = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Объединение семейств S и Z также образует полугруппу (SZ) по умножению. В силу принципа переноса DP принадлежит SZ. На самом деле DP лежит в более узкой полугруппе Z. Действительно, представим P в виде композиции двух отображений Q_1 и Q_2, определенных на $[0,1]$ и $[0,T]$ соответственно. Тогда DQ_1 и DQ_2 находятся в SZ, и, значит, для каждого из них возможны два варианта: DQ_i лежит или в S или в Z. Непосредственно убеждаемся, что во всех четырех вариантах $DQ_1 \times DQ_2$ принадлежит Z.

В этой связи представляет интерес задача описания всех полугрупп матриц (размера $n \times n$) с операцией умножения. Укажем довольно популярный способ их построения. Пусть V — некоторое подмножество в R^n. Тогда семейство (M) всех матриц, переводящих V в себя, является полугруппой по умножению. Если V отлично от нулевого вектора и от всего R^n, то будем говорить: *M допускает (нетривиальное) геометрическое представление V*. Но справедливо

Предложение 1. *Полугруппа вырожденных матриц не допускает геометрического представления.*

Доказательство. Пусть x — ненулевой вектор из V. Тогда для любого y из R^n выполняется соотношение $y = Mx$ для некоторой вырожденной матрицы M. Значит, V совпадает со всем R^n.

2. Наследуемые свойства в непрерывных моделях

В данной ситуации переход от свойств DL к свойствам DP требует не только модификации вышеприведенных понятий, но и привлечения новых.

Ниже часто будет использоваться

Лемма Адамара [1]. *Пусть $u(h)$ — гладкая функция и $u(0) = 0$. Тогда $u(h) = hw(h)$, где $w(h)$ — некоторая гладкая функция.*

Отсюда можно получать сколь угодно длинные адамаровские представления для произвольной гладкой функции $u(h)$. Например,

а) $u(h) = u(0) + hw_1(h)$, где w_1 — гладкая функция;

б) $u(h) = u(0) + hu'(0) + h^2 w_2(h)$, где w_2 — гладкая функция.

Промежуточное положение между отображениями L и P занимает $\pi(X, t, h)$ — локальное сдвиг-отображение на малом временно́м интервале $[t, t + h]$ по траекториям системы (0.1) с началом в точке X. Отметим, что из леммы Адамара вытекает представление

$$\pi(X, t, h) = L(X, t, h) + h^2 W(X, t, h), \tag{2.1}$$

где $W(X, t, h)$ — некоторое гладкое отображение.

1. Определим понятие *свойства* для дифференциала произвольного отображения $Q(X, t)$. Будем говорить: DQ обладает свойством ρ в точке (X, t), если выполняется неравенство

$$\rho(DQ) > 0. \tag{2.2}$$

Здесь ρ — гладкая функция от n^2 аргументов, а матрица $DQ = (\partial Q/\partial x_j)$ — дифференциал отображения $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ в точке (X, t).

В частности, свойство ρ отображения DL задается неравенством (2.2), в котором элементы матрицы $DQ = (q_{ij})$ имеют вид $q_{ii} = 1 + h\partial F_i(X, t)/\partial x_i$ и $q_{ij} = h\partial F_i(X, t)/\partial x_j$ для $i \neq j$.

Аналогично определяется свойство ρ и для отображения $D\pi$.

Разумеется, для DP реализация свойства ρ в точке X соответствует неравенству $\rho[DP(X)] > 0$.

Пусть в фазовом пространстве системы (0.1) выбрано некоторое множество возможных начальных точек N. Из каждой точки X_0 множества N выпустим траекторию системы (0.1) при изменении времени в интервале $[0, T]$. Полученное множество в расширенном фазовом пространстве обозначим через $M = \mathrm{Tr}(N)$. Приведем понятия, характеризующие свойство ρ для отображений DL и $D\pi$ системы (0.1) в заранее выбранном M из R^{n+1}.

2. Свойство ρ назовем *локально универсальным* для DL на M, если $\rho(DL) > 0$ выполняется в каждой точке M при всех достаточно малых h $(0 < h < \delta)$. Разумеется, значение δ может зависеть от (X, t). Здесь будем говорить: *ρ равномерно локально универсально* для DL на M, если удается выбрать общую для всех (X, t) из M границу δ^*.

Аналогично определяется равномерная локальная универсальность ρ и для отображения $D\pi$ на M.

Для отображения DP универсальность ρ на множестве M означает, что неравенство $\rho(DP)>0$ выполняется в каждой точке X из M.

3. Свойство ρ назовем *полугрупповым*, если все $n \times n$ матрицы, обладающие свойством ρ, образуют мультипликативную полугруппу.

Переход от свойств $D\pi$ к свойствам DP совсем прост.

Теорема 2. *Пусть свойство ρ является полугрупповым и равномерно локально универсальным для $D\pi$ на $\mathrm{Tr}(N)$. Тогда ρ универсально для DP на N.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку X^0 из N. Из равномерной локальной универсальности ρ для $D\pi$ на $\mathrm{Tr}(X^0)$ следует существование такого δ^*, что выполняется неравенство $\rho(D\pi(X, t, h)) > 0$ для всех (X, t) из $\mathrm{Tr}(X^0)$ и всех h из $(0, \delta^*)$.

Далее, разобьем $[0,T]$ на k равных временны́х участков так, чтобы $T/k < \delta^*$. Поэтому на каждом i-ом участке соответствующее локальное отображение $D\pi_i$ обладает свойством ρ. Поскольку $DP = D\pi_1 \times \cdots \times D\pi_k$ и ρ — полугрупповое свойство, то и DP обладает свойством ρ в точке X^0. Так как X^0 — произвольная точка из N, то DP обладает свойством ρ во всех точках N. $\square$

Обсудим переход от свойств DL к свойствам $D\pi$. Интересной представляется гипотеза: если ρ локально универсально для DL на $\mathrm{Tr}(X^0)$, то ρ равномерно локально универсально для $D\pi$ на $\mathrm{Tr}(X^0)$. Однако без дополнительных ограничений на функцию ρ эта гипотеза сомнительна. Для пояснения рассмотрим близкую задачу из математического анализа. Пусть $u(x,h)$ — гладкая функция и для каждого x из $[0,1]$ существует такое локальное $\delta(x) > 0$, что $u(x,h) > 0$ для всех h из $(0,\delta(x))$. Поскольку неравенство $u(x,h) = h(h-x)(h-2x) > 0$ выполняется при $\delta(x) = x$ для $x > 0$, а при $x = 0$ в качестве δ можно взять, например, 1, то универсального δ^* не существует.

Приведем один из возможных вариантов дополнительных условий, гарантирующих равномерную локальную универсальность. Для наглядности возьмем $n = 2$ и обозначим через E единичную матрицу и $k_{ij} = \partial F_i(X,t)/\partial x_j$ для всех $1 \le i,j \le 2$. С учетом (0.2) построим простейшее адамаровское представление

$$\rho(DL) = \rho(1 + hk_{11}, hk_{12}, hk_{21}, 1 + hk_{22}) = a + hb(X,t,h). \tag{2.3}$$

Здесь константа a равна $\rho(1,0,0,1)$; $b(X,t,h)$ — гладкая по всем переменным функция. Отметим, что $b(X,t,0)$ является скалярным произведением вектора $(k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})$ и градиента функции ρ в точке E.

4. В этой связи будем называть ρ *грубым свойством* для DL на $\mathrm{Tr}(X_0)$, если для элементов представления (2.3) выполняется хотя бы одно из двух условий: Γ_1) $a > 0$; Γ_2) если $a = 0$, то $b(X,t,0) > 0$ для всех (X,t) из $\mathrm{Tr}(X_0)$.

Напомним, что $a = \rho(1,0,0,1)$. Поэтому при выполнении условия Γ_1) свойство ρ будет грубым для любых DL (т. е. ρ грубо в абсолютном смысле). Напротив, при реализации условия Γ_2) грубость ρ относительна, поскольку зависит еще и от DL.

Лемма 1. *Пусть свойство ρ локально универсально и грубо для DL на $\mathrm{Tr}(X_0)$, тогда оно равномерно локально универсально и для DL, и для $D\pi$ на $\mathrm{Tr}(X_0)$.*

Доказательство. 1°. Сначала докажем утверждение для DL. Так из локальной универсальности DL следует $a + hb(X,t,h) > 0$ для всех $0 < h < \delta(X,t)$. В силу грубости ρ здесь должен выполняться один из следующих двух вариантов.

Γ_1) $a > 0$. Обозначим $B = \min[b(X,t,h)]$ по всем (X,t,h) из компакта $\mathrm{Tr}(X_0)\times[0,1]$. Тогда при $h > 0$ имеет место неравенство $a + hb(X,t,h) \ge a + hB$. При $B \ge 0$ положим $\Delta = 1$. Если $B < 0$, то положим $\Delta = \min(1, -a/b)$. Ясно, что при всех h из $(0,\Delta)$ правая часть данного неравенства положительна. Значит, будет положительна и левая часть.

Γ_2) $a = 0$ и $b(X,t,h) > 0$ для всех (X,t) из $\mathrm{Tr}(X_0)$. Воспользуемся разложением Адамара для функции $b(X,t,h) = b(X,t,0) + hc(X,t,h)$, где $c(X,t,h)$ — гладкая функция. Пусть β — минимальное значение функции $b(X,t,0)$ при (X,t) из $\mathrm{Tr}(X_0)$. Тогда $\beta > 0$ согласно допущению. Пусть γ — минимальное значение $c(X,t,h)$ по всем (X,t) из $\mathrm{Tr}(X_0)$ и $0 \le h \le 1$. Для таких h выполняется неравенство $b(X,t,h) \ge \beta + h\gamma$. Очевидно, при $\gamma \ge 0$ имеет место $b(X,t,h) > 0$ равномерно для всех $h \le 1$. При $\gamma < 0$ справедливо $b(X,t,h) > 0$ равномерно для всех $h \le \beta/|\gamma|$.

2°. Теперь с учетом оценок из предыдущего пункта докажем утверждение леммы для $D\pi$. А именно, построим адамаровское представление (до членов порядка h^3)

$$\lambda(h) = \rho(D\pi(X,t,h)) = a + hb(X,t,0) + h^2c(X,t,h).$$

Поскольку $D\pi$ совпадает с DL с точностью до h^2, то в этом представлении a и b имеют прежний смысл, а c — некоторая гладкая по всем переменным функция.

Обозначим через B и C минимальные значения гладких функций $b(X,t,0)$ и $c(X,t,h)$ по всем (X,t) из компакта $\mathrm{Tr}(X_0)$ и $0 \le h \le 1$. Далее построим специальную квадратичную форму $\mu(h) = a + hB + h^2C$. Очевидно, $\lambda(h) > \mu(h)$ для всех $h > 0$. Оценим снизу μ при малых h. Здесь возникают следующие варианты.

Γ_1) $a > 0$. Тогда найдется такое малое $\Delta > 0$, что при всех h из $(0, \Delta)$ имеет место $\mu(h) > 0$. Значит, тем более $\lambda(h) > 0$ для таких h;

Γ_2) $a = 0$. Поскольку $b(X,t,0) > 0$ для всех (X,t) из $\mathrm{Tr}(X_0)$, то $B > 0$. Значит, найдется такое $\Delta > 0$, что при всех h из $(0, \Delta)$ имеет место $\mu(h) = h(B + hC) > 0$. Поэтому и $\lambda(h) > 0$ для таких h. $\square$

Пример 2. Рассмотрим T-периодическое одномерное уравнение

$$dx/dt = f(x,t). \tag{2.4}$$

Для каждой пары (x,t) выполняется неравенство $\partial L/\partial x = 1 + h\partial f(x,t)/\partial x > 0$ при малых h. Здесь $\rho(\partial L/\partial x) \equiv \partial L/\partial x > 0$ является грубым свойством согласно условию Γ_1. Так как положительные числа образуют мультипликативную полугруппу, то $\partial P/\partial x > 0$. Поэтому функция $P(x)$ и любое сдвиг-отображение, порожденное уравнением (2.4), оказывается возрастающей функцией.

Отсюда, в частности, следует, что известная дискретная модель популяции [3], [4] $x^{t+1} = \gamma x^t \exp(-x^t)$ не может быть получена как отображение Пуанкаре для некоторого уравнения (2.4).

Пример 3. Проведем анализ общей модели [5] динамики численности одной популяции (x) в T-периодической среде

$$dx/dt = xf(x,t), \tag{2.5}$$

где $f(x,t)$ — гладкая, T-периодическая функция; $\partial f/\partial x < 0$ и при достаточно больших x выполняется неравенство $f(x,t) < 0$; $x(0) > 0$, поэтому $x(t) > 0$ при всех $t > 0$. Напомним, что $P(x)$ — отображение Пуанкаре, индуцированное (2.5). Очевидно, $P(0) = 0$. Менее тривиальные свойства можно обнаружить с помощью принципа наследования.

Свойство $P'(x^0) < 1$ при достаточно больших x^0. Если начальное значение x^0 велико, то $x(t)$ велико для всех t из $[0,T]$. Поэтому здесь $f(x,t) < 0$. Кроме того, всегда $f'_x < 0$, значит,

$$\rho(\partial L/\partial x) = 1 - \partial L/\partial x = h[-f(x,t) - xf'_x(x,t)] > 0$$

оказывается грубым свойством согласно условию Γ_2). Следовательно, $0 < \partial P/\partial x < 1$ при больших x.

Свойство логарифмической сжимаемости. После замены $y = \ln x$ уравнение (2.4) приобретает вид $dy/dt = f(\exp y, t)$. В этом случае $\partial L^*/\partial y = 1 + hf'_x(\exp y, t)\exp y$. Из $f'_x < 0$ следует $0 < \partial L^*/\partial y < 1$ при малых $h > 0$. Поскольку числа из интервала $(0,1)$ образуют полугруппу по умножению и свойство $\rho(\partial L^*/\partial y) = 1 - \partial L^*/\partial y > 0$ является грубым (см. выше), то и $0 < \partial P^*/\partial y < 1$. Поэтому если в данном уравнении существует положительное равновесие, то оно единственно и глобально устойчиво.

Условия невырождения. Обозначим через λ значение интеграла от $f(0,t)$ на $I = [0,T]$. Величина λ/T представляет собой среднюю за период разность между ростом и смертностью популяции (при ее "бесконечно малой" численности). Отметим, что при $\lambda < 0$ интеграл от $f(x(t),t)$ по I и подавно будет отрицателен. Поэтому $\lambda > 0$ есть необходимое условие невымирания популяции. Оказывается, оно и достаточно. Действительно, с одной стороны $P'(0) = \exp\lambda > 1$, а с другой — $P'(\infty) < 1$ (см. выше). Поэтому график P пересекает биссектрису в некоторой положительной точке (x^*). С учетом свойства сжимаемости заключаем, что равновесие x^* глобально устойчиво в R_+.

Изложенный выше подход может быть использован и для анализа наследуемых свойств, которые описываются вторыми (и выше) частными производными компонент локальных и глобальных отображений.

3. Наследуемость знак-инвариантных структур

Расширим множество гладких наследуемых свойств до класса непрерывных наследуемых свойств. Так, справедлива

Лемма 2. *Пусть каждое из свойств $\rho_1, \dots, \rho_n$ локально универсально и грубо для DL на $\mathrm{Tr}(N)$. Если $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ — полугрупповое свойство, то ρ универсально для DP на N.*

Доказательство. Возьмем точку X^0 из N. С учетом первого допущения и леммы 1 каждое ρ_i равномерно локально универсально на $\mathrm{Tr}(X_0)$. Обозначим через δ_i равномерную оценку, при которой для всех (X,t) из $\mathrm{Tr}(X^0)$ и $0 < h < \delta_i$ выполняется неравенство

$$\rho_i(DL) > 0, \tag{3.1}$$

где $DL = DL(X,t,h)$. Положим $\Delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$, тогда при всех $0 < h < \Delta$ реализуется (3.1) для каждого i. Значит, для таких h и всех (X,t) из $\mathrm{Tr}(X^0)$ имеет место неравенство $\rho(DL) > 0$, где $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$. Поэтому ρ равномерно локально универсально для DL на $\mathrm{Tr}(X_0)$. Так как ρ — полугрупповое свойство, то с учетом предыдущего заключаем: $\rho(DP) > 0$ в произвольной точке X^0 из N. Поэтому ρ универсально для DP на всем N. $\square$

Такие кусочно-гладкие свойства возникают при описании характера монотонности компонент многомерных сдвиг-отображений для систем дифференциальных уравнений.

Пример 4. Пусть у всех локальных дифференциалов $DL = (l_{ij})$ некоторой двумерной системы (0.1) внедиагональные элементы $l_{ij} = h\partial F_i(X,t)/\partial x_j$ отрицательны при всех (X,t). Отметим, что диагональные элементы $l_{ii} = 1 + h\partial F_i(X,t)/\partial x_i$ положительны при малых h. Определим здесь четыре гладкие функции

$$\rho_{11}(DL) = l_{11}, \quad \rho_{22}(DL) = l_{22}, \quad \rho_{12}(DL) = -l_{12}, \quad \rho_{21}(DL) = -l_{21}.$$

Каждое из приведенных четырех свойств $\rho_{ij}(DL) > 0$ является грубым. В самом деле, ρ_{11} и ρ_{22} грубые согласно условию Γ_1); ρ_{12} и ρ_{21} грубые согласно условию Γ_2). Далее, все матрицы (DL), удовлетворяющие неравенству

$$\rho(DL) = \min\{l_{11}, l_{22}, -l_{12}, -l_{21}\} > 0,$$

образуют мультипликативную полугруппу (в DL диагональные элементы положительны, а внедиагональные отрицательны). Ввиду леммы 2 знаковая структура DP имеет тот же вид.

Пример 5. Пусть у всех локальных дифференциалов $DL = (l_{ij})$ некоторой двумерной системы (0.1) внедиагональные элементы положительны, а диагональные элементы матрицы DL строго больше единицы. Такие матрицы образуют мультипликативную полугруппу, а соответствующее свойство выразимо в форме

$$\rho(DL) = \min\{l_{11} - 1, l_{22} - 1, l_{12}, l_{21}\} > 0.$$

Согласно лемме 2 отображение DP обладает свойством ρ: диагональные элементы положительной матрицы DP строго больше единицы.

Поставим вопрос: если все DL представляются одной и той же знаковой матрицей Σ для всех (X,t), то когда DP описывается той же матрицей Σ?

Для удобства вместо знаков $+$ и $-$ будем писать $+1$ и -1 соответственно. Все такие (*знак-инвариантные*) матрицы допускают полное описание [6], [7]. Они задаются таблицей $\Sigma(c_1, \dots, c_n) = (\sigma_{ij})$, элементы которой равны $\sigma_{ij} = c_i c_j$. Здесь каждый параметр c_i может принимать одно из двух значений ± 1. Например, при $n = 2$ существуют только две разные знак-инвариантные матрицы

$$\Sigma(1,1) = \Sigma(-1,-1) = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Sigma(-1,1) = \Sigma(1,-1) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрицы с фиксированной знак-инвариантной структурой $\Sigma(c_1, \ldots, c_n)$ образуют полугруппу по умножению.

Из леммы 2 с использованием свойства

$$\rho(DL) = \min\{\sigma_{11} l_{11}, \ldots, \sigma_{ij} l_{ij}, \ldots, \sigma_{nn} l_{nn}\} > 0$$

устанавливается

Теорема 3. *Если все DL принадлежат одной и той же знак-инвариантной структуре Σ, то и DP принадлежит Σ.*

Пусть ниже дифференциал отображения P описывается знак-инвариантной структурой $\Sigma(c_1, \ldots, c_n)$. Тогда на точках $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$ определим специальное отношение частичного порядка. А именно, положим $A \ll B$, если $a_i c_i \le b_i c_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Оказывается, такие отображения P и отношение порядка согласованы. Совсем просто обосновывается монотонность P.

Свойство 1. *Из $A \ll B$ следует $P(A) \ll P(B)$.*

Предположим, что точки A и B связаны отношением $A \ll B$. Тогда “конусный отрезок” $\Pi(A, B)$ — это множество “промежуточных” точек X, удовлетворяющих одновременно условиям $A \ll X$ и $X \ll B$ [8]. Геометрически $\Pi(A, B)$ — прямоугольник, в котором точка A находится на северо-западе, а точка B лежит на юго-востоке.

Свойство 2. *Под действием P образ конусного отрезка $\Pi(A, B)$ вложен в конусный отрезок $\Pi(P(A), P(B))$.*

Будем говорить: отображение P стягивает компакт D, если образ $P(D)$ вложен в D. В силу свойства 2 для проверки “стягивания” конусного отрезка $\Pi = \Pi(A, B)$ достаточно установить, что “экстремальные” точки A и B отображаются внутрь Π.

4. Наследуемые свойства в моделях конкуренции

Во многих случаях конкуренция двух участников задается системой

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, x_2, t), \quad \dot{x}_2 = x_2 f_2(x_1, x_2, t), \tag{4.1}$$

где каждая функция f_i гладкая и убывает по переменным x_i и x_j; по аргументу t функция f_i является T-периодической; при больших x_1 и x_2 выполняется неравенство $f_i(x_1, x_2, t) < 0$ для всех t и $i = 1, 2$. Начальные значения переменных положительны, поэтому в силу специфики правых частей (4.1) они остаются положительными все время. Решения (4.1) растут не быстрее экспоненты, значит, они продолжаются вперед неограниченно.

Самое главное, дифференциал локального отображения (4.1) представляется знак-инвариантной структурой $\Sigma(1, -1)$. Значит, в силу признака наследования знаковая структура дифференциала глобального отображения Пуанкаре $P = (P_1, P_2)$ также имеет вид $\Sigma(1, -1)$. Иными словами, каждая функция P_i монотонно возрастает по “своей” переменной (x_i) и убывает по “чужой” переменной.

Согласно предыдущему разделу для точек $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ естественно положить $A \ll B$, когда выполняются неравенства $a_1 \le b_1$ и $-a_2 \le -b_2$. Отметим, что аналогичное отношение порядка используется в работе [9]. В этом случае выполняются свойства 1 и 2.

Дальнейший анализ конкуренции двух участников основывается на характере взаимного расположения изоклин E_1 и E_2 в R_+^2, где $E_i = \{(x_1^0, x_2^0) \mid x_i^0 = x_i^T > 0\}$. Обозначим через λ_i

величину интеграла от функции $f_i(0,0,t)$ на $[0,T]$. С учетом примера 3 (условие невырождения) совсем просто устанавливается: множество E_i непусто при и только при $\lambda_i > 0$.

Ниже предполагаем, что $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$. В этом случае обе изоклины существуют. Более содержательный способ задания изоклины E_i доставляет уравнение

$$x_i = P_i(x_1, x_2). \tag{4.2}$$

Поскольку $\partial P_i/\partial x_j \neq 0$ для $i \neq j$, то уравнение (4.2) имеет гладкое решение $x_j = E_i(x_i)$. Каждая из функций E_i определена на своем полуинтервале $(0, r_i]$, при этом $E_i(r_i) = 0$. В частности, r_1 — неподвижная точка отображения Пуанкаре, порожденного уравнением

$$dx_1/dt = x_1 f_1(x_1, 0, t). \tag{4.3}$$

Несмотря на малую информацию о P_i, имеется возможность исследовать существенные аспекты поведения изоклин. Так, пусть в правую часть модели конкуренции включен (гладко) некоторый параметр ε:

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, x_2, t), \quad \dot{x}_2 = x_2 f_2(x_1, x_2, t, \varepsilon). \tag{4.4}$$

Считаем, что при $\varepsilon = 0$ система (4.4) совпадает с исходной (4.1). Оказывается, некоторые локальные ε-свойства семейства (4.4) глобально наследуются. Обозначим здесь координатные функции $x_1^T = P_1(x_1^0, x_2^0, \varepsilon)$ и $x_2^T = P_2(x_1^0, x_2^0, \varepsilon)$. Пусть

$$\partial f_2/\partial\varepsilon < 0 \ \text{ для всех } x_1,\ x_2 \text{ и } t, \tag{4.5}$$

тогда справедлива

Лемма 3. *При $x_1^0 > 0$, $x_2^0 > 0$ и условии (4.5) выполняются неравенства $\partial P_1/\partial\varepsilon > 0$ и $\partial P_2/\partial\varepsilon < 0$.*

Доказательство. Для $i = 1, 2$ положим $u_i(t) = \partial x_i(t,\varepsilon)/\partial\varepsilon$. После дифференцирования обоих уравнений (4.4) по ε получаем

$$du_1/dt = Au_1 - Bu_2, \quad du_2/dt = -Cu_1 + Du_2 - R,$$

где $u_1(0) = 0$ и $u_2(0) = 0$. При положительных $x_1(t)$ и $x_2(t)$ переменные коэффициенты B, C, R положительны, а коэффициенты A и D не являются знакоопределенными. Легко устанавливаем следующие результаты:

а) $du_1/dt = 0$ и $du_2/dt < 0$ при $t = 0$, поэтому, спустя "первое мгновение" ($t = +0$), получаем $u_1 = 0$ и $u_2 < 0$;

б) $du_1/dt > 0$ и $du_2/dt < 0$ при $t = +0$, поэтому, спустя "второе мгновение" ($t = ++0$), получаем $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$.

Итак, точка $U = \langle u_1, u_2\rangle$ оказывается строго внутри четвертого квадранта K (в котором $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$). Далее, для точек из K выполняются оценки $du_1/dt \geq Au_1$ и $du_2/dt \leq Du_2$. Поэтому точка U не может достичь границы K (где $u_1 = 0$ или $u_2 = 0$) и остается в нем навечно. В частности, имеют место $u_1(T) > 0$ и $u_2(T) < 0$. Эти неравенства и доказывают требуемое.

При фиксированном x_1 решение (x_2) уравнения $x_1 = P_1(x_1, x_2, \varepsilon)$ гладко зависит от ε. Обозначим $z = \partial x_2/\partial\varepsilon$ и после дифференцирования данного уравнения по ε получаем $0 = z[\partial P_1/\partial x_2] + [\partial P_1/\partial\varepsilon]$. Здесь первая квадратная скобка отрицательна, а вторая положительна, поэтому $z = \partial E_1(x_1,\varepsilon)/\partial\varepsilon > 0$. Это означает, что с ростом ε график изоклины $E_1(\varepsilon)$ непрерывно поднимается. Отметим, что величина r_1 определяется уравнением (4.3) и не зависит от ε. Поэтому все данные изоклины проходят через одну и ту же точку $(r_1, 0)$.

Аналогично показываем, что с ростом ε график изоклины $E_2(\varepsilon)$ непрерывно опускается. В отличие от предыдущего случая здесь точка $(0, r_2)$ опускается по оси ординат при увеличении ε. Если интеграл от функции $f_2(0,0,t,\varepsilon)$ на отрезке $[0,T]$ становится отрицательным, то изоклина E_2 вообще исчезает. Установлено

Предложение 2. *При условии* (4.5) *график* $E_1(\varepsilon)$ *непрерывно поднимается, а график* $E_2(\varepsilon)$ *непрерывно опускается с ростом* ε.

Далее, ввиду монотонности оператора P в (4.1) реализуются достаточно простые динамические режимы. Они определяются взаимным расположением изоклин. Будем говорить, что точка (x_1, x_2) находится ниже E_i, если $x_i < P_i(x_1, x_2)$. Теперь, игнорируя детали, обсудим возможные варианты поведения переменных в (4.1).

1. *Изоклины не пересекаются в* R^2_+ (см. рис.). Например, пусть E_2 расположена ниже E_1. Тогда в (4.1) первый конкурент вытесняет второго. Действительно, пусть ξ — произвольная положительная константа. Построим k-параметрическое семейство конусных отрезков $\Pi(k) = \Pi(A_k, B)$, стягивающихся к "самой сильной" точке $B = \langle r_1 + \xi, 0\rangle$. Здесь "самая слабая" вершина $A_k = \langle kr_1, E_1(kr_1)\rangle$ располагается на изоклине E_1 при k из $[0, 1]$. Чем больше номер k, тем меньше соответствующий конусный отрезок. Так, $\Pi(1)$ совпадает с промежутком $[r_1, r_1 + \xi]$ на оси абсцисс. Под действием композиции $Q = P \cdot P$ точка A_k переходит внутрь прямоугольника $\Pi(k)$, а точка B не покидает границы $\Pi(k)$. Тогда согласно свойству 2 образ $Q(\Pi(k))$ вложен в $\Pi(k)$, и, значит, $Q(\Pi(k))$ принадлежит прямоугольнику с бóльшим номером. Отсюда заключаем, что под действием "бесконечного числа" итераций Q всякая фазовая точка оказывается в $\Pi(1)$. В силу произвольности ξ точка $\langle r_1, 0\rangle$ глобально устойчива в R^2_+.

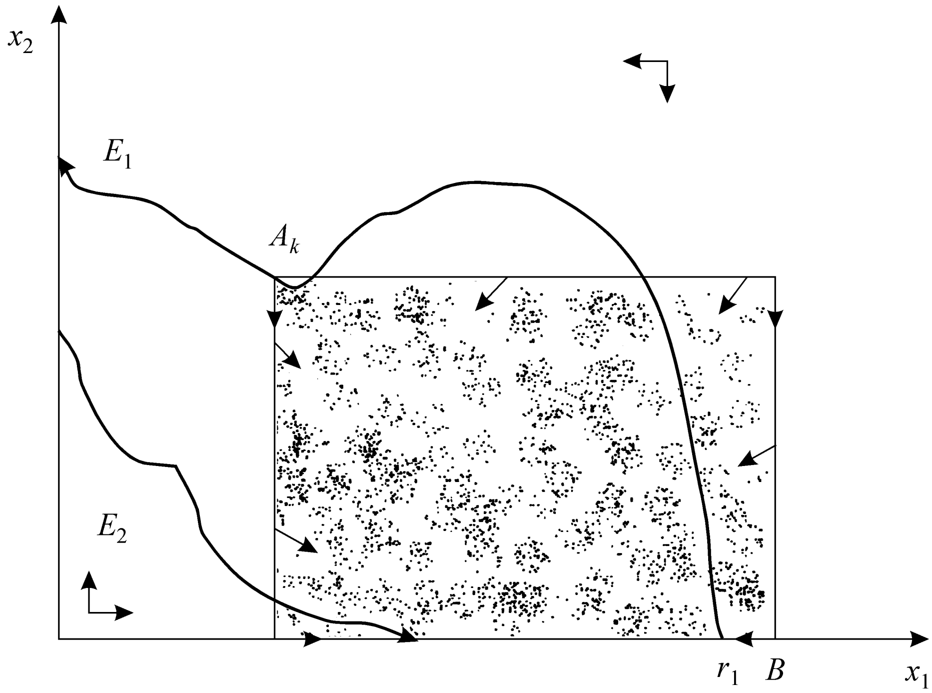

Рис. К обоснованию глобальной устойчивости точки $(r_1, 0)$ в системе (4.1), когда изоклина E_2 лежит ниже изоклины E_1.

2. *Изоклины пересекаются в* R^2_+. Тогда возможно как устойчивое, так и неустойчивое сосуществование конкурентов.

Поэтому актуальна проблема нахождения условий, которые гарантируют реализацию какого-либо из приведенных вариантов. Здесь для получения содержательных результатов следует несколько конкретизировать систему (4.1). Рассмотрим следующую экологическую версию модели конкуренции, в которой разделены процессы роста и смертности:

$$\dot{x}_1 = x_1[-1 + \beta_1(t)/V], \quad \dot{x}_2 = x_2[-1 + \beta_2(t)/V], \tag{4.6}$$

где $\beta_i(t)$ — гладкая, T-периодическая, неотрицательная функции роста; гладкая функция $V =$

$v(x_1, x_2)$ возрастает по каждой переменной x_1 и x_2; $v(0,0) = 1$. Считаем v медленно растущей функцией: для всех $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и всех k из $(0,1)$ справедливо неравенство

$$kv(x_1, x_2) \leq v(kx_1, kx_2). \tag{4.7}$$

Например, всякая вогнутая функция является медленно растущей.

Пусть μ_i — величина интеграла от $\beta_i(t)$ на $[0,T]$. Данный параметр (характеристика чистого роста) связан с введенным ранее λ_i соотношением $\lambda_i = \mu_i - T$. Поэтому предполагаем, что $\mu_i > T$ (иначе i-я популяция вымирает даже при отсутствии конкурента).

Далее, пусть в (4.6) изоклины пересекаются. Тогда существует положительное, T-периодическое решение $\langle x_1(t), x_2(t)\rangle$. Пусть M_i — максимальное значение $x_i(t)$ на $[0,T]$. Независимо от индекса $i = 1,2$ справедлива

Лемма 4. *Величина* $T\nu(M_1, M_2)$ *принадлежит* $I_i = [\mu_i, \mu_i \exp T]$.

Доказательство. Обозначим через m_i минимальное значение данного $x_i(t)$ на $[0,T]$. Предварительно установим неравенства

$$Tv(m_1, m_2) \leq \mu_i \quad \text{и} \quad Tv(M_1, M_2) \geq \mu_i. \tag{4.8}$$

Обоснуем только левую оценку. Очевидно, для данного периодического решения выполняется неравенство $v(x_1, x_2) \geq v(m_1, m_2)$. Далее, из уравнения (4.6) вытекает

$$dx_i/x_i \leq [-1 + \beta_i(t)/v(m_1, m_2)]dt.$$

После интегрирования по интервалу $[0,T]$ и с учетом $x_i(0) = x_i(T)$ находим $0 \leq -T + \mu_i/v(m_1, m_2)$. Значит, $Tv(m_1, m_2) \leq \mu_i$.

Аналогично, исходя из неравенства $v(x_1, x_2) \leq v(M_1, M_2)$, устанавливаем правую оценку (4.8).

Далее, ввиду неотрицательности $\beta_j(t)$ для обеих переменных модели (4.6) выполняется неравенство $dx_j/dt \geq -x_j$. Поэтому

$$m_j \geq M_j \exp(-T) \tag{4.9}$$

при всех j. Теперь с учетом (4.7), (4.9) и (4.8) получаем

$$Tv(M_1, M_2)e^{-T} \leq Tv(M_1 e^{-T}, M_2 e^{-T}) \leq Tv(m_1, m_2) \leq \mu_i.$$

Отсюда и из правого неравенства (4.8) заключаем: величина $Tv(M_1, M_2)$ лежит в отрезке $I_i = [\mu_i, \mu_i \exp T]$ при любом i.

Из леммы 4 вытекает, что при условии (запаса)

$$\mu_1 > \mu_2 \exp T \tag{4.10}$$

отрезки I_1 и I_2 не пересекаются. Поэтому один конкурент вытесняет другого. Осталось только выяснить, какая изоклина лежит выше.

Лемма 5. *При условии* (4.10) *изоклина* E_2 *находится ниже* E_1.

Доказательство. Предположим противное: E_1 лежит ниже E_2. Тогда из (4.6) построим вспомогательную систему

$$\dot{x}_1 = x_1[-1 + \beta_1(t)/V], \quad \dot{x}_2 = x_2[-1 + (1-\varepsilon)\beta_2(t)/V], \tag{4.11}$$

где $\varepsilon \in [0,1]$. Положение изоклин (4.11) непрерывно зависит от ε. Отметим, что изоклина $E_1(\varepsilon)$ существует при всех ε, а изоклина $E_2(\varepsilon)$ — только при $(1-\varepsilon)\mu_2 > T$. Обсудим эволюцию взаимного расположения изоклин при увеличении параметра ε от 0 до 1.

При $\varepsilon = 0$ изоклины $E_1(0)$ и $E_2(0)$ совпадают с исходными, поэтому кривая $E_1(0)$ лежит ниже кривой $E_2(0)$.

При $\varepsilon \in (0,1)$ согласно предложению 2 график нижней кривой $E_1(\varepsilon)$ поднимается, а график верхней кривой $E_2(\varepsilon)$ опускается.

При $\varepsilon = 1$ кривая $E_1(1)$ существует, а кривая $E_2(1)$ давно уже исчезла (при $\varepsilon = 1 - T/\mu_2$ она проваливается в начало координат).

Следовательно, при некотором промежуточном $0 < \varepsilon^* < 1$ изоклины пересекаются во внутренней точке первого квадранта. Но в этом случае для характеристик чистого роста с учетом (4.10) имеем $\mu_1 > (1 - \varepsilon^* \mu_2) \exp T$. Такая ситуация (условие запаса и пересечение изоклин) невозможна. Поэтому E_2 лежит ниже E_1.

Теорема 4. *При выполнении условия запаса* (4.10) *в системе* (4.6) *первый конкурент вытесняет второго.*

Заключение

Приведенная версия понятия свойства ρ заключалась в выполнении строгого неравенства $\rho(A) > 0$, где A — матрица и ρ — гладкая функция. Однако некоторые явно наследуемые свойства невыразимы в такой форме. Например, если в свойстве ρ важную роль играют нулевые элементы типа: A — треугольная матрица (и т. д.).

Поэтому представляет интерес разработка признаков наследования, когда свойство ρ задается нестрогим неравенством $\rho(A) \geq 0$. В этом случае ряд (громоздко доказываемых) утверждений можно совсем просто установить. Так, приведем гипотетическое обоснование леммы 3 о действии параметра ε, а именно, расширим двумерную систему (4.4) до трехмерной

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, x_2, t), \quad \dot{x}_2 = x_2 f_2(x_1, x_2, t, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = 0.$$

С учетом конкуренции и ограничения (4.5) знаковая структура DL в пространстве (x_1, x_2, ε) имеет вид S из (1.2). Поэтому знаковая структура DP имеет вид Z из (1.2). Согласно последнему столбцу матрицы Z устанавливаем требуемое $\partial P_1/\partial\varepsilon > 0$ и $\partial P_2/\partial\varepsilon < 0$. Весьма перспективна разработка признаков наследования в данной ситуации.

Литература

1. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1984. – 271 с.
2. Ильичев В.Г., Ильичева О.А. *Универсальные константы запаса и критерии отбора в периодически изменяющейся среде* // Журн. общей биологии. – 2000. – Т. 61. – № 6. – С. 565–582.
3. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. *Динамические модели экологических систем.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 288 с.
4. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. *Устойчивость биологических сообществ.* – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. Vance R.R., Coddington E.A. *A nonautonomous model of population growth* // J. Math. Biology. – 1989. – V. 27. – № 5. – P. 491–506.
6. Ильичев В.Г., Ильичева О.А. *Дискретные модели и знак-инвариантные матрицы* // Изв. АН. Теория и системы управления. – 1998. – № 4. – С. 110–117.
7. Ильичев В.Г., Ильичева О.А. *Знак-инвариантные структуры матриц и дискретные модели* // Дискретн. матем. – 1999. – Т. 11. – № 4. – С. 89–100.
8. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 511 с.
9. Smith H.L., Waltman P. *Competition in the periodic gradostat* // Nonlinear Analysis: Real World Application. – 2000. – № 1. – P. 177–188.

Ростовский государственный университет

Поступили
первый вариант 04.09.2000
окончательный вариант 07.03.2002