ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.988

*В.Я. ПРУДНИКОВ*

# О КОЭРЦИТИВНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Для существования решения вариационных неравенств на соответствующий функционал часто налагается требование его коэрцитивности [1], [2]. Если функционал не коэрцитивен, то существует, как отмечено, например, в [3], конструктивный метод исследования вариационных неравенств, основанный на построении коэрцитивных задач.

В данной работе дан критерий коэрцитивности выпуклых по направлению функционалов на замкнутом выпуклом конусе.

Будем предполагать, что $K$ — замкнутый выпуклый конус из рефлексивного банахова пространства $X$, $S=\{u\in X:\|u\|=1\}$, $B=\{u\in X:\|u\|<1\}$, $SK=S\cap K$, $BK=B\cap K$. Под коэрцитивностью функционала $p:K\to R$ понимается существование предела $p(u)\to+\infty$, если $\|u\|\to+\infty$, $u\in K$.

**Теорема.** *Пусть функционал $p:K\to R$ таков, что*

1) *функция $t\to p(at)$ выпукла в интервале $(0,+\infty)$ для любого $a\in SK$;*
2) *функционал $a\to p(at)$ слабо полунепрерывен снизу на $\overline{BK}$ для любого $t\in(0,+\infty)$.*

*Тогда*

$$(p \text{ коэрцитивен на } K\ ) \iff \Big(\inf_{a\in SK}\lim_{t\to+\infty}\frac{p(at)}{t}>0\Big).$$

Для доказательства теоремы докажем три леммы, предполагая выполнимость условий теоремы.

**Лемма 1.** ($p$ *коэрцитивен на* $K$) $\iff\big(\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}\frac{p(at)}{t}>0\big)$.

**Доказательство. Необходимость.** Из существования предела $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty}p(u)=+\infty$ для данного $A>0$ следует существование такого числа $R_A>0$, что при $\|u\|>R_A$ выполнимо неравенство $p(u)>A$. Полагая здесь $u=ta$, где $t=\|u\|$, $a\in SK$, получим неравенство $p(ta)>A$, справедливое при любых $t>R_A$ равномерно относительно $a\in SK$, а потому

$$\inf_{a\in SK}p(ta)>A,\quad t>R_A,$$

что и означает существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}p(at)=+\infty$. Поэтому существует такое $t_0>0$, что $\inf\limits_{a\in SK}p(t_0a)>1+p(\theta)$. Функция $t\to p(ta)$ выпукла по условию теоремы, значит, функция $t\to\frac{p(at)-p(\theta)}{t}$ не убывает в $(0,+\infty)$. Но тогда

$$\frac{p(at)-p(\theta)}{t}\ge\frac{p(at_0)-p(\theta)}{t_0},\quad t>t_0,$$

для любых $a\in SK$, а потому

$$\inf_{a\in SK}\frac{p(at)-p(\theta)}{t}\ge\inf_{a\in SK}\frac{p(at_0)-p(\theta)}{t_0}\ge\frac{1}{t_0},\quad t>t_0,$$

и $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}\frac{p(at)-p(\theta)}{t}>0$. Учитывая, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{p(\theta)}{t}=0$, получим неравенство $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}\frac{p(at)}{t}>0$.

**Достаточность.** Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}\frac{p(at)}{t}>0$. Тогда существуют числа $\beta>0$, $t_0>0$ такие, что $\inf_{a\in SK}p(at)>t\beta$ при $t>t_0$. Следовательно, для всех $a\in SK$ независимо от $t>t_0$ справедливо неравенство $p(at)>t\beta$. Для элемента $u\in K$, $t=\|u\|$, $t>t_0$, существует $a\in SK$ такой, что $u=\|u\|a$, а потому $p(u)>\|u\|\beta$, $\|u\|>t_0$. Отсюда $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty}p(u)=+\infty$. $\square$

**Лемма 2.** ($p$ *коэрцитивен на* $K$) $\iff$ (*существует* $t_0>0:\inf\limits_{a\in SK}p(at_0)>p(\theta)$).

**Доказательство. Необходимость** следует из леммы 1.

**Достаточность.** Имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\inf_{a\in SK}\frac{p(at)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\inf_{a\in SK}\frac{p(at)-p(\theta)}{t}\geq\inf_{a\in SK}\frac{p(at_0)-p(\theta)}{t_0}>0.$$

Согласно лемме 1 функционал $p$ коэрцитивен на $K$. $\square$

**Лемма 3.** *Если* $\inf\limits_{a\in SK}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{p(at)}{t}\geq 0$, *то* $\forall\varepsilon>0$ *функционал* $p(u)+\varepsilon\|u\|^\alpha$, $\alpha\geq 1$ *коэрцитивен на* $K$.

**Доказательство.** Без ограничения общности рассуждений будем считать, что $p(\theta)=0$. Для $n\in N$ существует элемент $a_n$ такой, что $\|a_n\|=1$, $a_n\in K$ и

$$\inf_{a\in SK}\frac{p(an)+\varepsilon n^\alpha}{n}>\frac{p(a_nn)}{n}+\varepsilon n^{\alpha-1}-\frac{1}{n}.$$

Функция $t\to\frac{p(a_nt)}{t}$ не убывает в $(0,+\infty)$, поэтому при $n\geq t$ выполнено неравенство

$$\inf_{a\in SK}\frac{p(an)+\varepsilon n^\alpha}{n}>\frac{p(a_nt)}{t}+\varepsilon t^{\alpha-1}-\frac{1}{n}.$$

Вследствие рефлексивности пространства $X$ из последовательности $\{a_n\}$ выделяем слабо сходящуюся к некоторому элементу $a_0\in\overline{B}K$ подпоследовательность, за которой сохраняем обозначение $\{a_n\}$. Поскольку функционал $p(at)$ слабо полунепрерывен снизу на $\overline{B}K$, получим неравенство

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{a\in SK}\frac{p(an)+\varepsilon n^\alpha}{n}\geq\frac{p(a_0t)}{t}+\varepsilon t^{\alpha-1}.$$

Если $a_0=\theta$, то из этого неравенства следует

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{a\in SK}\frac{p(an)+\varepsilon n^\alpha}{n}>0.$$

Пусть $a_0\neq\theta$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{a\in SK}\frac{p(an)+\varepsilon n^\alpha}{n}\geq\lim_{t\to+\infty}\frac{p(a_0t)}{t}+\varepsilon=\|a_0\|\lim_{t\to+\infty}\frac{p(\frac{a_0}{\|a_0\|}t\|a_0\|)}{t\|a_0\|}+\varepsilon\geq\|a_0\|\inf_{a\in SK}\lim_{t\to+\infty}\frac{p(at)}{t}+\varepsilon>0.$$

Таким образом, существует такое $n_0\in N$, что $\inf\limits_{a\in SK}(p(an_0)+\varepsilon n_0^\alpha)>0$. Согласно лемме 2 функционал $p(u)+\varepsilon\|u\|^\alpha$ коэрцитивен на $K$. $\square$

**Доказательство теоремы. Необходимость.** Пусть $p$ коэрцитивен на $K$. Тогда из леммы 1 следует $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}\frac{p(at)}{t}>0$. Существует $\varepsilon>0$ такое, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\limits_{a\in SK}\frac{p(at)}{t}>\varepsilon$. Таким образом, для любого $a\in SK$ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{p(at)}{t}\geq\varepsilon$, а потому $\inf\limits_{a\in SK}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{p(at)}{t}\geq\varepsilon>0$.

**Достаточность.** Предполагаем без ограничения общности рассуждений, что $p(\theta)=0$. Существует число $\varepsilon>0$ такое, что

$$\inf_{a\in SK}\lim_{t\to+\infty}\frac{p(at)-\varepsilon t}{t}\geq 0. \tag{1}$$

Функционал $p(u) - \varepsilon\|u\|$ таков, что функция $t \to p(at) - \varepsilon t$ выпукла для всякого $a \in SK$ в $(0, +\infty)$, а функционал $a \to p(at) - \varepsilon t$ слабо полунепрерывен снизу на $\overline{B}K$. В силу (1) и согласно лемме 3 функционал $p(u) - \varepsilon\|u\| + \varepsilon\|u\|$ коэрцитивен на $K$. $\square$

**Замечание.** Леммы 1, 2 справедливы без требований рефлексивности пространства $X$ и слабой полунепрерывности функционала $a \to p(at)$, $a \in \overline{B}K$.

## Примеры

1. *Задача Синьорини* (напр., [4]). Пусть $K = \{u \in H^1(E) : u \geq 0$ почти всюду на $\Gamma\}$, где $\Gamma$ — достаточно гладкая граница ограниченной области $E \subset R^n$, $\operatorname{mes} E = 1$. Обозначим

$$b(u,u) = \int_E |\nabla u|^2 dE, \quad (u,f) = \int_E uf dE, \quad p(u) = \frac{1}{2}b(u,u) - (f,u), \quad \|u\| = \sqrt{b(u,u)} + \sqrt{(u,u)}.$$

Имеем

$$\inf\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{p(ta)}{t} : b(a,a) \neq 0,\ a \in SK\right\} = +\infty.$$

Пусть $b(a,a) = 0$, $a \in SK$, тогда $a = 1$. Значит, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{p(t)}{t} = -\int\limits_E f dE$. Таким образом, условие $\int\limits_E f dE < 0$ необходимо и достаточно для коэрцитивности функционала $p$.

2. *Модельная задача с трением* [4]. Пусть $K = H^1$, $p(u) = \frac{1}{2}b(u,u) + j(u) - (f,u)$, где $j(u) = \int\limits_\Gamma g|u|d\Gamma$, $g \geq 0$ на $\Gamma$. Для $a \in S$, $t > 0$ имеем $\frac{p(ta)}{t} = \frac{t}{2}b(a,a) + j(a) - (f,a)$. Если $b(a,a) > 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{p(ta)}{t} = +\infty$. Пусть $b(a,a) = 0$, $a \in S$. Тогда $a = \pm 1$, а потому $\frac{p(ta)}{t} = j(1) - \pm(f,1)$. Следовательно, неравенство $\int\limits_\Gamma g d\Gamma > \left|\int\limits_E f dE\right|$ необходимо и достаточно для коэрцитивности функционала $p$. Заметим, что в [4] это условие приводится лишь как достаточное.

## Литература


1. Экланд Н., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 400 с.
2. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1988. – 304 с.
3. Лапин А.В. *Решение вариационных неравенств с нелинейными полукоэрцитивными операторами* // Вычисл. процессы и системы. – М.: Наука, 1986. – Т. 4. – С. 219–264.
4. Намм Р.В. *Введение в теорию и методы решения вариационных неравенств.* – Хабаровск, Изд-во ХГТУ, 1999. – 72 с.



*Хабаровский государственный технический университет*



*Поступила* 03.06.2003