МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Направление: 010800.68 – Механика
Специализация: механика жидкости, газа и плазмы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА НА ТЕМУ:

«О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ»

Работа завершена:

"___"_____ 2014 г. _____С.Е. Газизова

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор кафедры аэрогидромеханики

"___"_____ 2014 г. _____Д.В. Маклаков

Заведующий кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор кафедры аэрогидромеханики

"___"_____ 2014 г. _____А.Г. Егоров

Казань – 2014

Содержание

Введение **3**

Постановка задачи о движении системы вихрей в безграничной массе жидкости. Дифференциальные уравнения движения. **7**

Результаты вычислений **8**

Задача о системе неподвижных вихрей в сносящем потоке **15**

Результаты вычислений **16**

Постановка задачи о движении вихря около цилиндрического препятствия и сведение ее к решению системы дифференциальных уравнений **22**

Задача о системе неподвижных вихрей в сносящем потоке

Результаты вычислений **23**

Список использованных источников и литературы **33**

Приложение **34**

Введение.

В ходе выполнения данной работы была составлена программа для расчета движения вихрей в безграничном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Кроме того, получен ответ на вопрос, можно ли подобрать интенсивность расположенных в потоке n вихрей так, чтобы они оставались неподвижными. Также решена задача о движении вихря около препятствия в виде цилиндра.

Рассмотрим движение жидкости в некоторой области. Если рассматривать каждый элементарный объем этой жидкости, то его перемещение можно разложить на три вида: поступательное движение, вращательное движение и движение, которое обуславливает деформацию. Вихревым движением называется такое движение жидкости (или газа), при котором их малые объемы перемещаются не только поступательно, но и вращаются вокруг некоторой мгновенной оси. Эти малые или, по-другому, элементарные объемы движутся поступательно со скоростью $\overline{V}$, определяемой какой-либо точкой этого объема, принимаемой за полюс, и вращательного движения вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\overline{\omega} = \frac{1}{2} rot\overline{V}$. Таким образом, движение жидкости, которое сопровождается вращением отдельных ее элементарных объемов, называется вихревым, а сам вращающийся объем – вихрем (см. [1-3]). В том случае, когда элементарные объемы движутся поступательно, при этом, возможно деформируясь, движение жидкости называют безвихревым.

Область, занятую движущейся жидкостью, можно представить как векторное поле скоростей. Стационарное течение называется потенциальным, если в каждой его точке скорость $\overline{V}$ является градиентом некоторой скалярной функции координат $\varphi(x, y)$, т.е. $\overline{V} = grad\varphi = \nabla\varphi$, где $\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y}$ - дифференциальный оператор Гамильтона. Функция $\varphi(x, y)$ называется потенциалом скорости. Через функцию φ проекции скорости определяются по формулам $V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Из этих формул следует, что потенциал скорости определяется с точностью до постоянной, так как для проекций скорости на координатные оси требуются только частные производные по координатам от этой функции и добавление постоянной к функции φ не влияет на значения V_x, V_y.

Если даны проекции скорости V_x, V_y на оси декартовых координат и надо определить, является ли течение жидкости потенциальным, то следует проверить, имеет ли место равенство $\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$. Если это равенство тождественно удовлетворено, то течение жидкости потенциально. В противном случае не потенциально. Условие, которое позволяет устанавливать будет ли течение потенциальным, можно записать следующим образом: $\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0$. Если использовать вектор вихря $rot\overline{V}$ от вектора скорости $\overline{V}$ $rot\overline{V} = (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})\bar{k}$, то это условие можно выразить так: $rot\overline{V} = 0$. Таким образом, для того чтобы течение было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Вектором вихря, или просто вихрем, называется вектор, определяемый по формуле: $rot\bar{V} = (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})\bar{k}$.

Рассмотрим двумерное вихревое движение жидкости. В этом случае вектор вихря всегда направлен перпендикулярно плоскости движения. Рассматриваем слой жидкости единичной толщины, т.е. предполагаем, что жидкость ограничена двумя плоскостями, параллельными плоскости движения и отстоящими друг от друга на расстоянии равном единице длины. Вихревой линией называется такая линия в жидкости, касательная в каждой точке которой направлена вдоль вектора вихря в этой точке. Если через каждую точку замкнутой кривой провести вихревую линию, то получится вихревая трубка. В рассматриваемом случае вихревыми линиями являются прямые, параллельные друг другу, и все вихревые трубки являются цилиндрами, образующие которых перпендикулярны плоскости движения. Сечение вихря плоскостью движения представляет собой круг, т.е. рассматривается круговой вихрь. Будем предполагать, что завихренность в области, ограниченной окружностью, имеет постоянную величину ω. Вне окружности завихренность равна нулю. При переходе через рассматриваемую окружность скорость непрерывно меняется. Таким образом, оказывается, что вихрь образует некоторое поле скоростей. Это поле скоростей, вызванное вихрем, называется индуцированным полем скоростей, а скорость любой точки поля называется индуцированной скоростью. Индуцированная скорость стремится к нулю, когда радиус-вектор точки стремится к бесконечности. Жидкость внутри вихря движется как твердое тело,

вращающееся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр вихря перпендикулярно плоскости движения с угловой скоростью $\frac{1}{2}\omega$ [1].

Круговой вихрь не индуцирует скорости в своем центре, то есть скорость центра кругового вихря в покоящейся жидкости равна нулю. Если рассмотреть скорости точек, лежащих на концах некоторого диаметра внутри вихря, то оказывается, что они равны по величине и направлены в противоположные стороны. Таким образом, если круговой вихрь помещен в некоторую точку потока, скорость которого известна, то скорость его центра будет такой же. Это значит, что вихрь будет двигаться вместе с потоком.

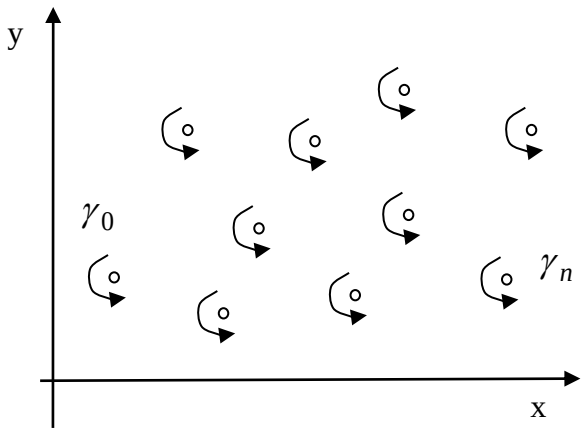
Рассмотрим в области определения векторного поля $\overline{V}$ некоторый разомкнутый или замкнутый контур, составим скалярное произведение $\overline{V} \cdot d\overline{s}$, где $d\overline{s}$ – направленный элемент контура, и образуем интеграл $\Gamma = \int\limits_{AB} \overline{V} \cdot d\overline{s} = \int\limits_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz$. Скалярная величина Γ называется циркуляцией скорости. Если вектор скорости $\overline{V}$ имеет потенциал $\overline{V} = grad\varphi = \nabla\varphi$, тогда $\Gamma = \varphi_B - \varphi_A$. Таким образом, при потенциальном течении циркуляция скорости зависит от координат точек A и B.

Комплексный потенциал течения жидкости вне вихря интенсивности γ, центр которого находится в точке z_0, задается формулой $W = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0)$ [1-3].

В установившемся двумерном течении вихрь постоянен вдоль линии тока. Когда существует несколько вихрей, то поле каждого вихря будет влиять на величину скорости в рассматриваемой точке.

Постановка задачи о движении системы вихрей в безграничной массе жидкости. Дифференциальные уравнения движения.

Рассмотрим бесконечный слой идеальной несжимаемой жидкости, в которую произвольным образом помещается n вихрей заданной интенсивности γ. Вводится декартова система координат (X, Y). Требуется получить картину движения вихрей.



Комплексный потенциал течения жидкости вне вихря интенсивности γ, центр которого находится в точке $z_j = x_j + iy_j$, задается формулой $W = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0)$. Комплексный потенциал течения жидкости для случая n вихрей задается формулой $W = \sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{2\pi i}\ln(z - z_j)$. При движении вихрей реализуется гидродинамический принцип, что вихрь сам на себя не действует. Это означает, что скорость при движении вихря с номером i равна

скорости, индуцированной в точке всеми остальными вихрями и выражается формулой $\frac{dW}{dz} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\gamma_j}{2\pi i} \frac{1}{z_j - z_i}$.

С другой стороны $\frac{dW}{dz} = Ve^{-i\alpha} = V(\cos\alpha - i\sin\alpha) = V\cos\alpha - iV\sin\alpha = V_x - iV_y$. Таким образом проекции скорости передвижения вихрей даются формулами:

$$V_{xi} = \mathrm{Re}\frac{dW}{dz} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\gamma_j}{2\pi} \frac{(y_j - y_i)}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2},$$

$$V_{yi} = -\mathrm{Im}\frac{dW}{dz} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\gamma_j}{2\pi} \frac{(x_j - x_i)}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}.$$

В итоге получаем систему дифференциальных уравнений [3]

$$\frac{dx_i}{dt} = V_{xi} \qquad \frac{dy_i}{dt} = V_{yi}$$

Эта система решается методом Эйлера.

Картина перемещения вихрей строится по координатам каждого последующего расположения вихрей, которые определяются формулами $x_j = x_j + \Delta t V_{xj}$ и $y_j = y_j + \Delta t V_{yj}$ (Δt задается произвольно).

Результаты вычислений.

Далее приводятся примеры визуализации решения данной системы уравнений для двух вихрей :

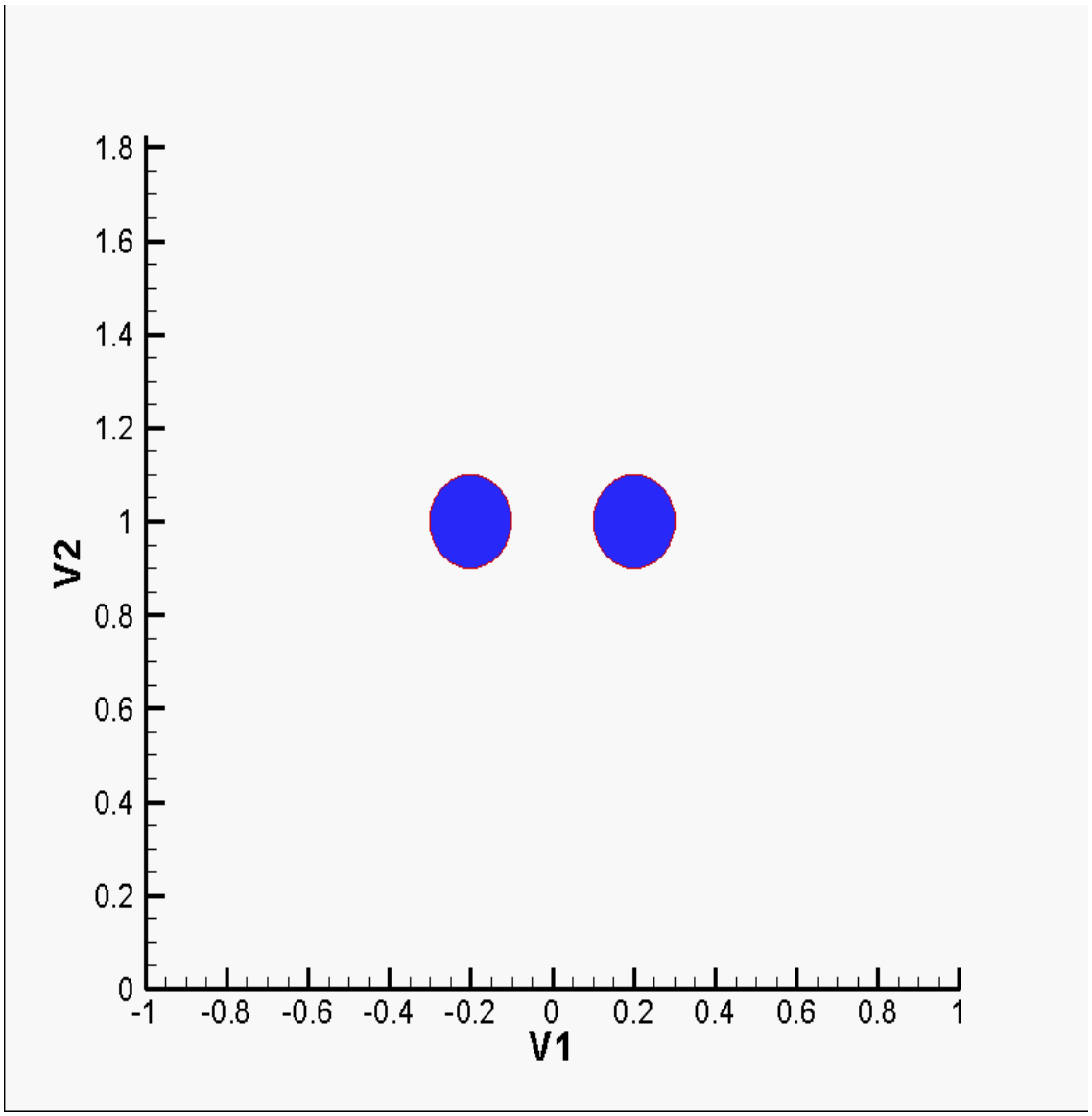


Рис. 1 . В момент времени t = 0 секунд .

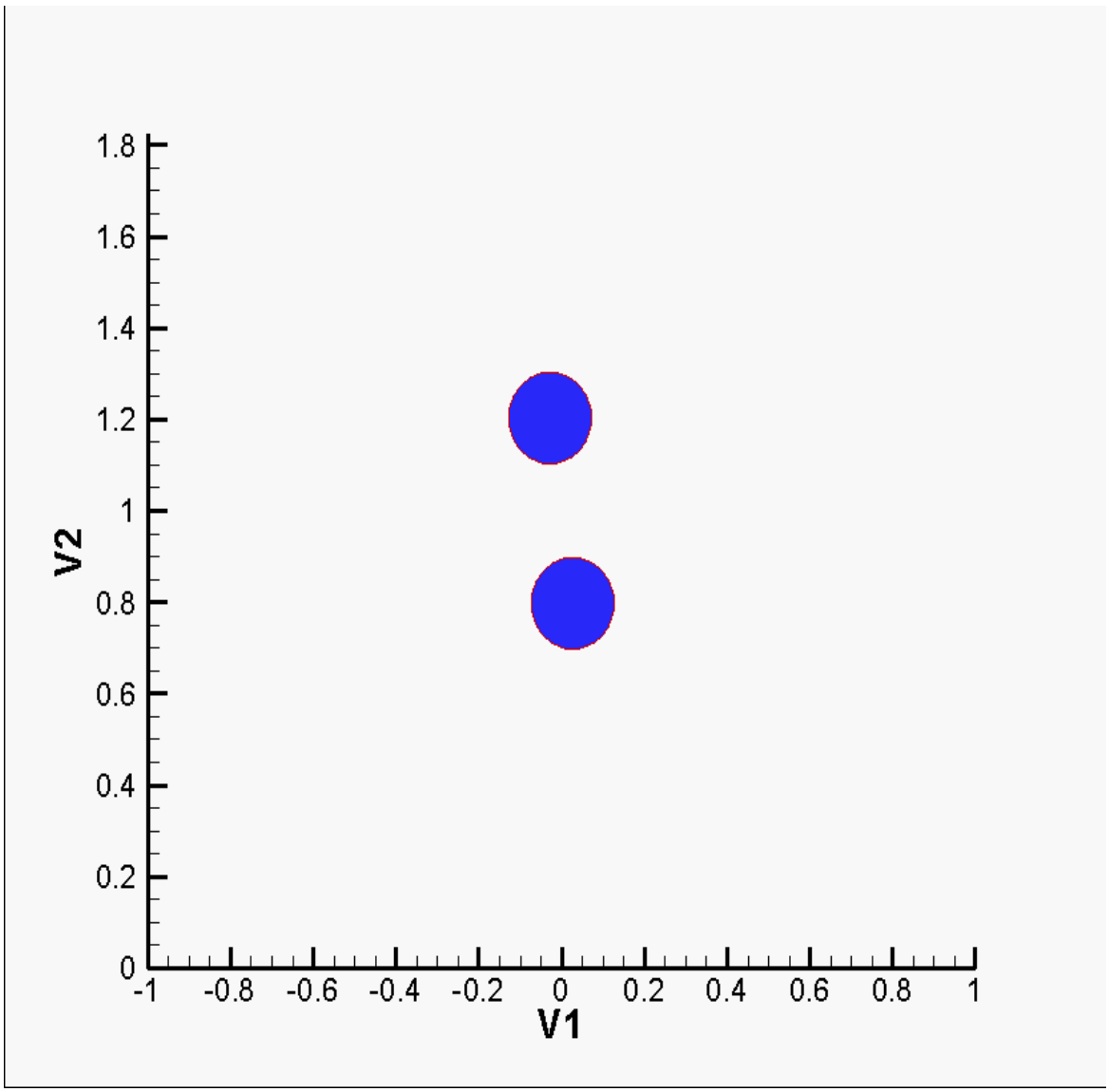


Рис. 2 . В момент времени t = 3 секунды .

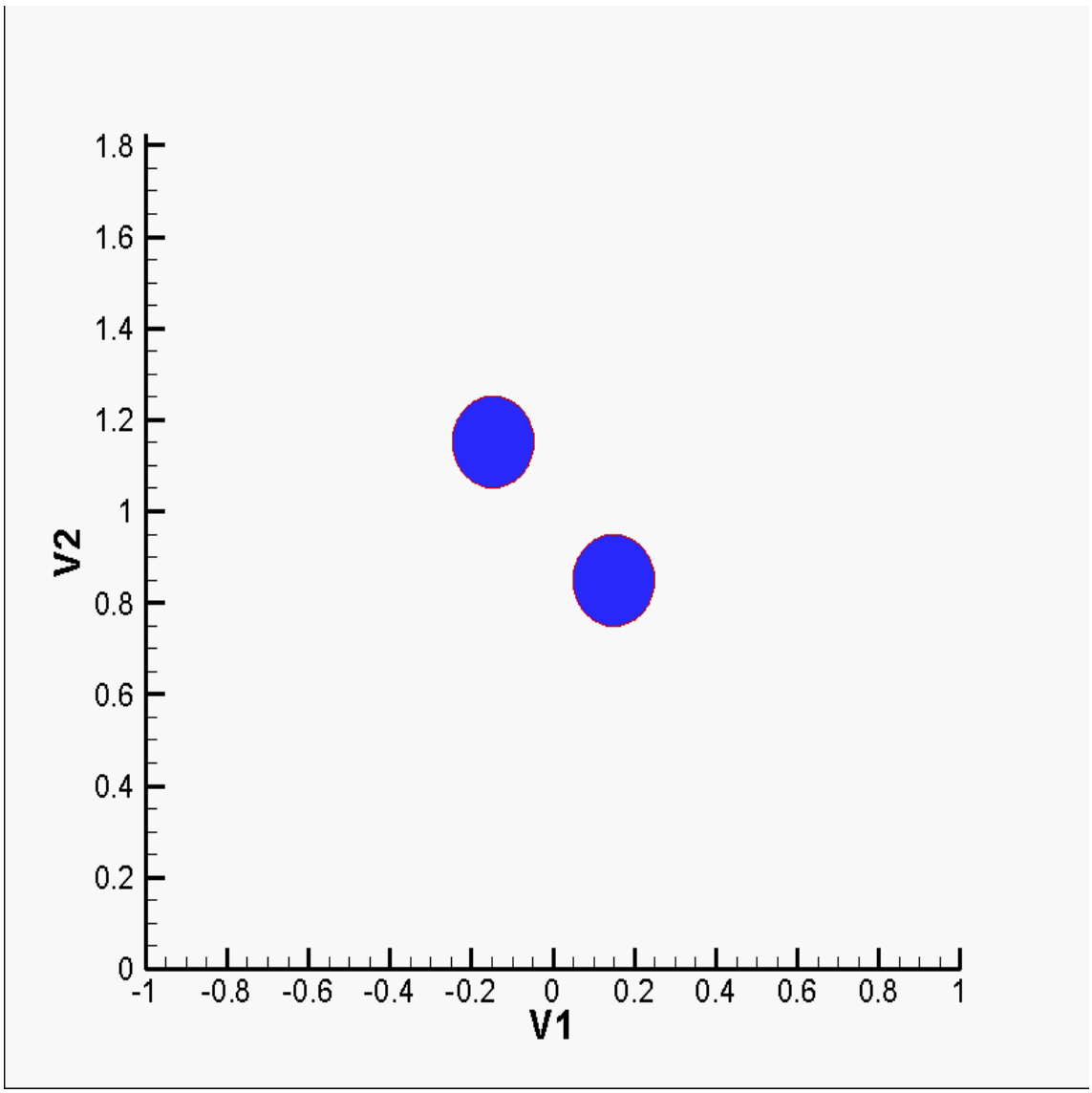


Рис. 3 . В момент времени t = 9 секунд .

Для четырёх вихрей:

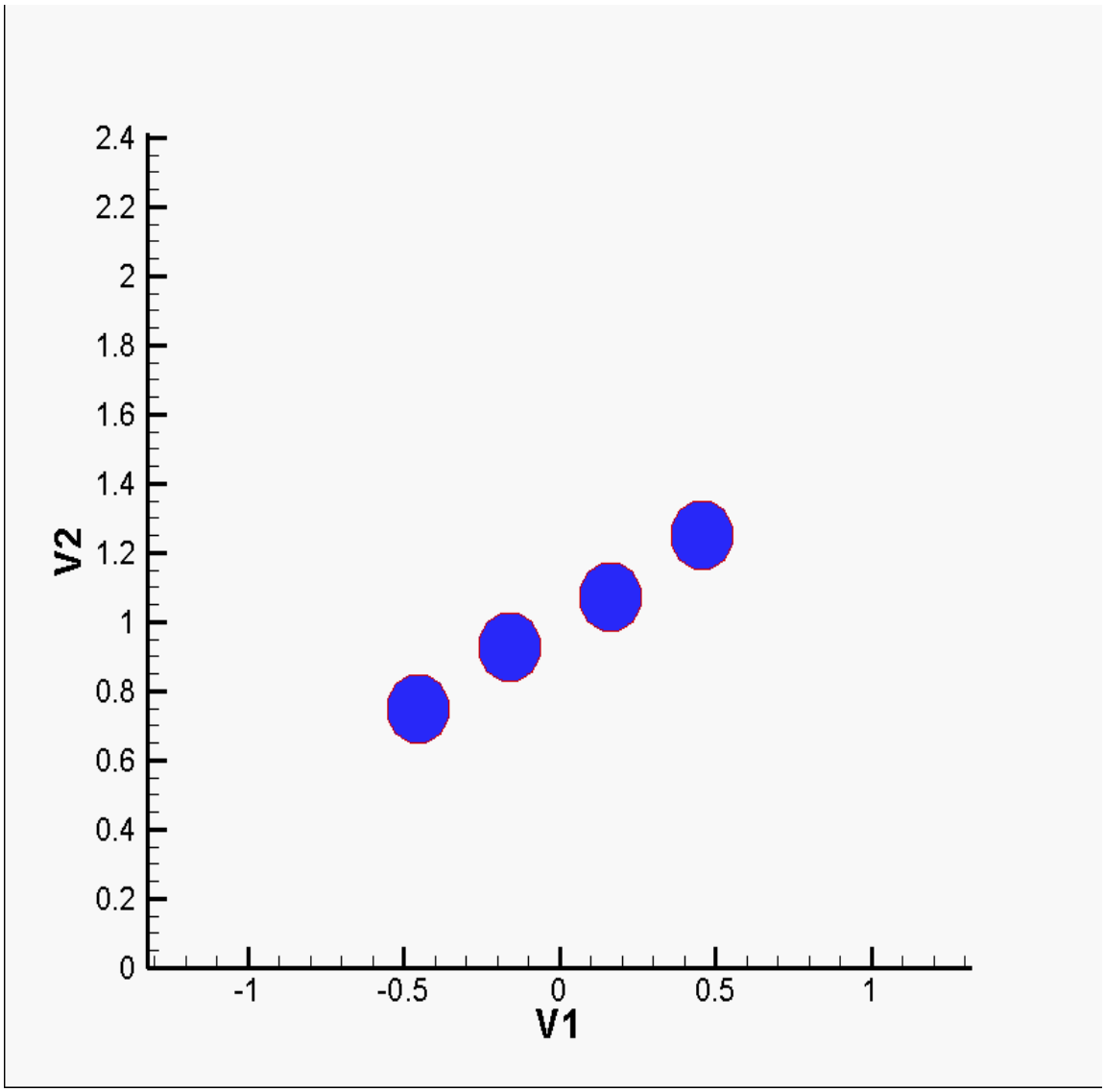


Рис. 4 . В момент времени t = 0 секунд .

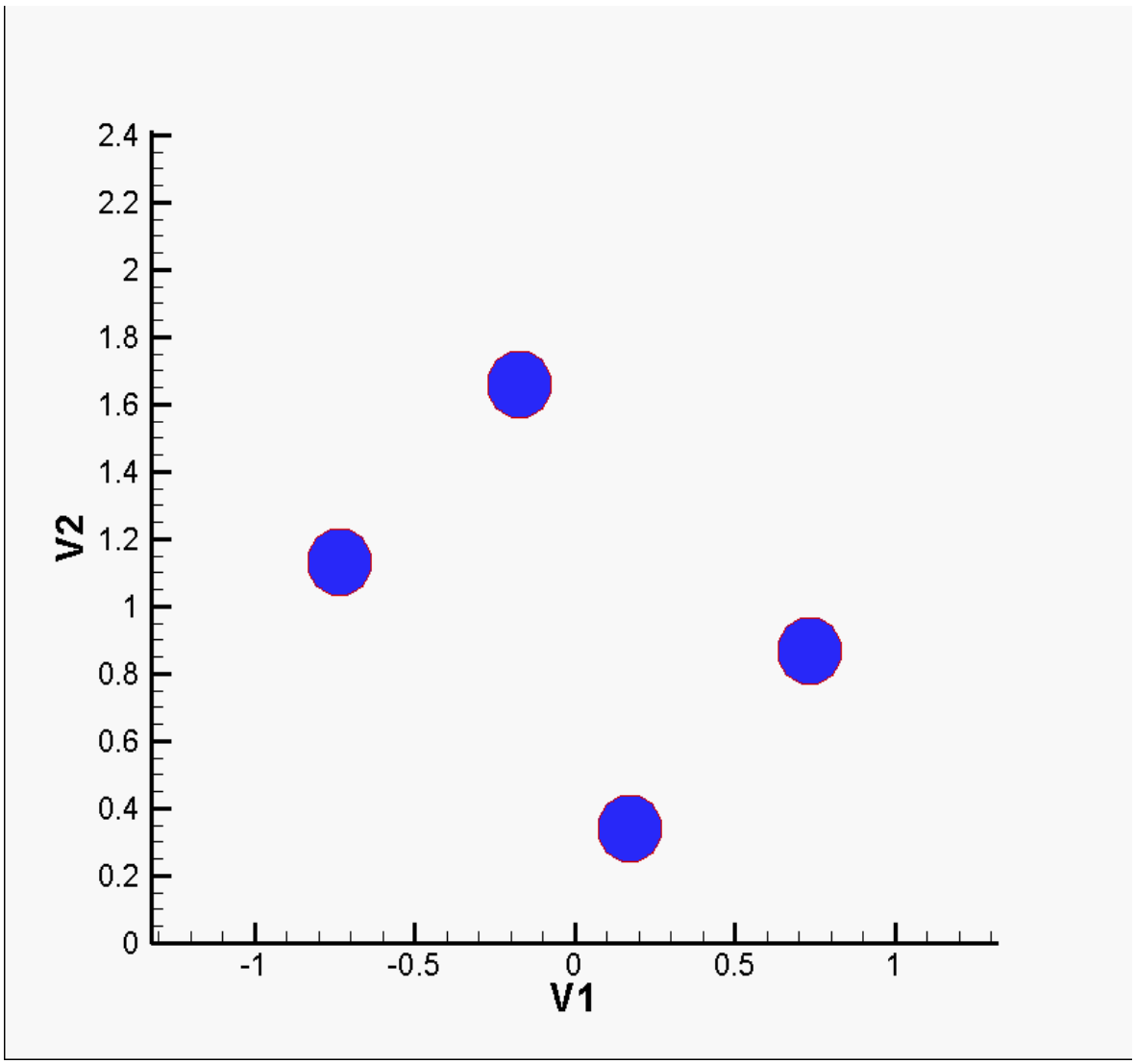


Рис. 5 . В момент времени t = 3 секунды .

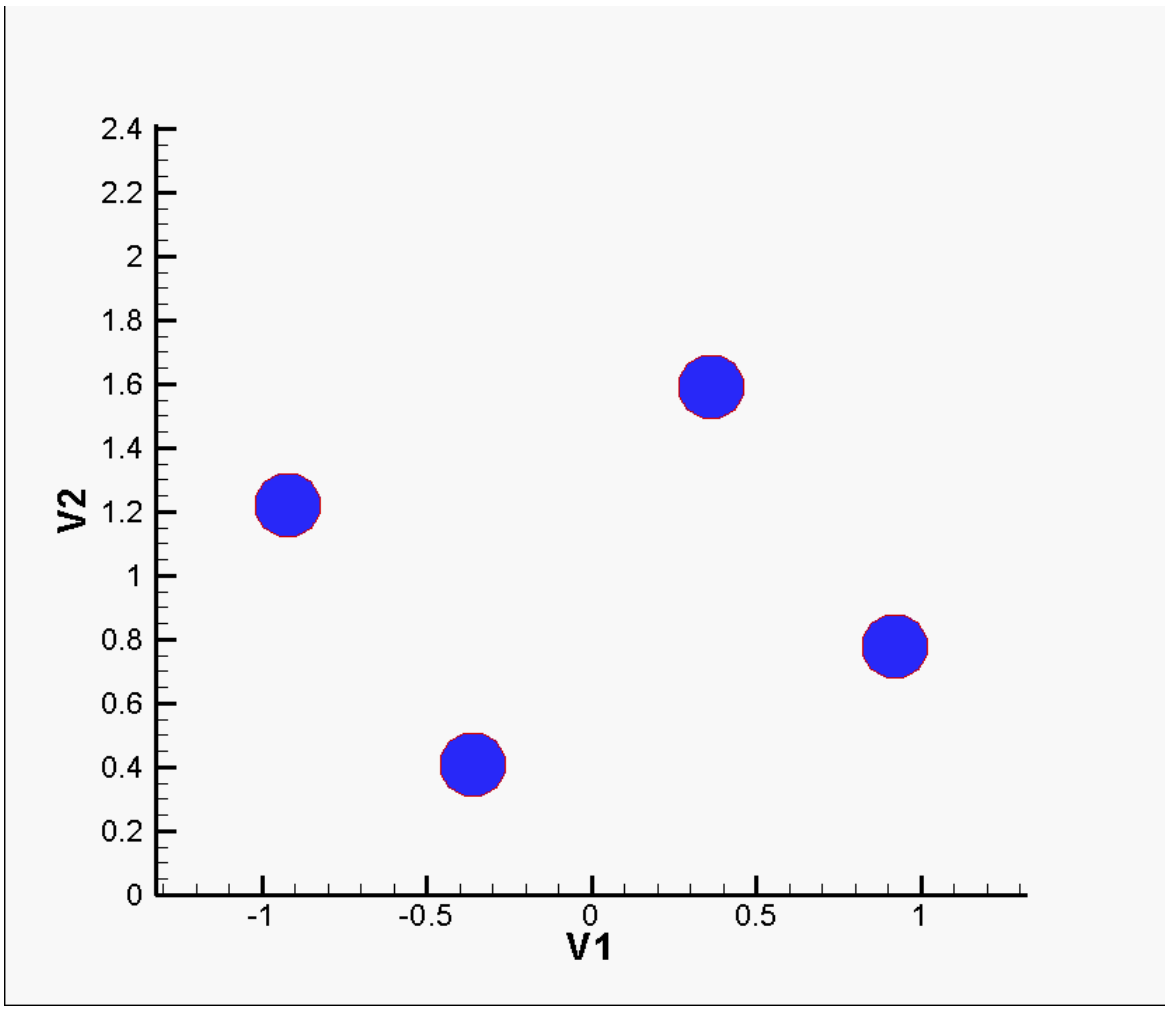


Рис. 6 . В момент времени t = 9 секунд .

Задача о системе неподвижных вихрей в сносящем потоке.

Далее рассмотрим случай вертикального расположения вихрей. Требуется выяснить, можно ли расположить вихри и подобрать значения их интенсивностей таким образом, чтобы вихри оставались неподвижными с течением времени. В ходе решения было установлено, что при нечетном количестве вихрей выполнение заданного условия невозможно. Но при четном количестве вихрей задача имеет решение.

Согласно аналитическому решению их положение не должно меняться со временем при данных значениях интенсивностей. Но т.к. при вычислениях возникает погрешность, наблюдается картина “распада” цепочки вихрей. Притом увеличение количества вихрей приводит к росту погрешности и, следовательно, к более быстрому распаду цепочки.

Результаты расчетов.

Случай 20-ти вихрей (“распад” происходит на 11-й секунде):

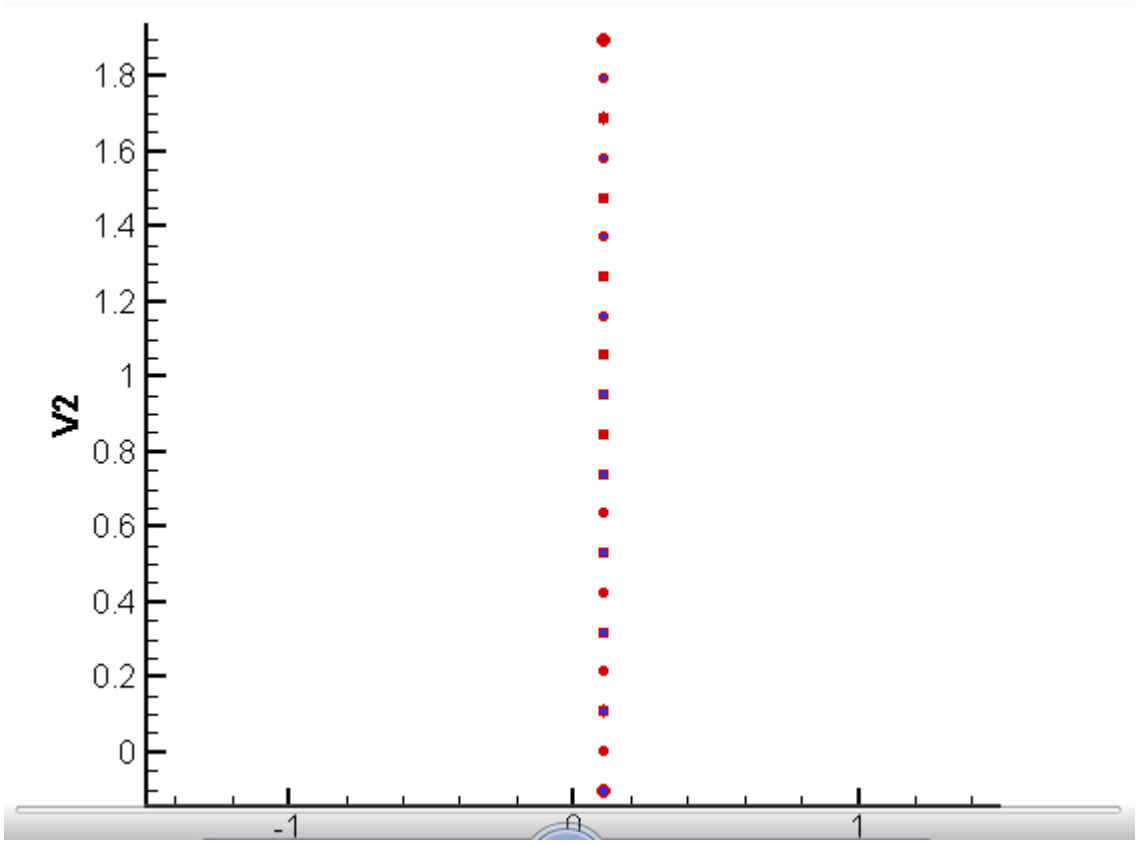


Рис. 7 . В момент времени t = 0 секунд .

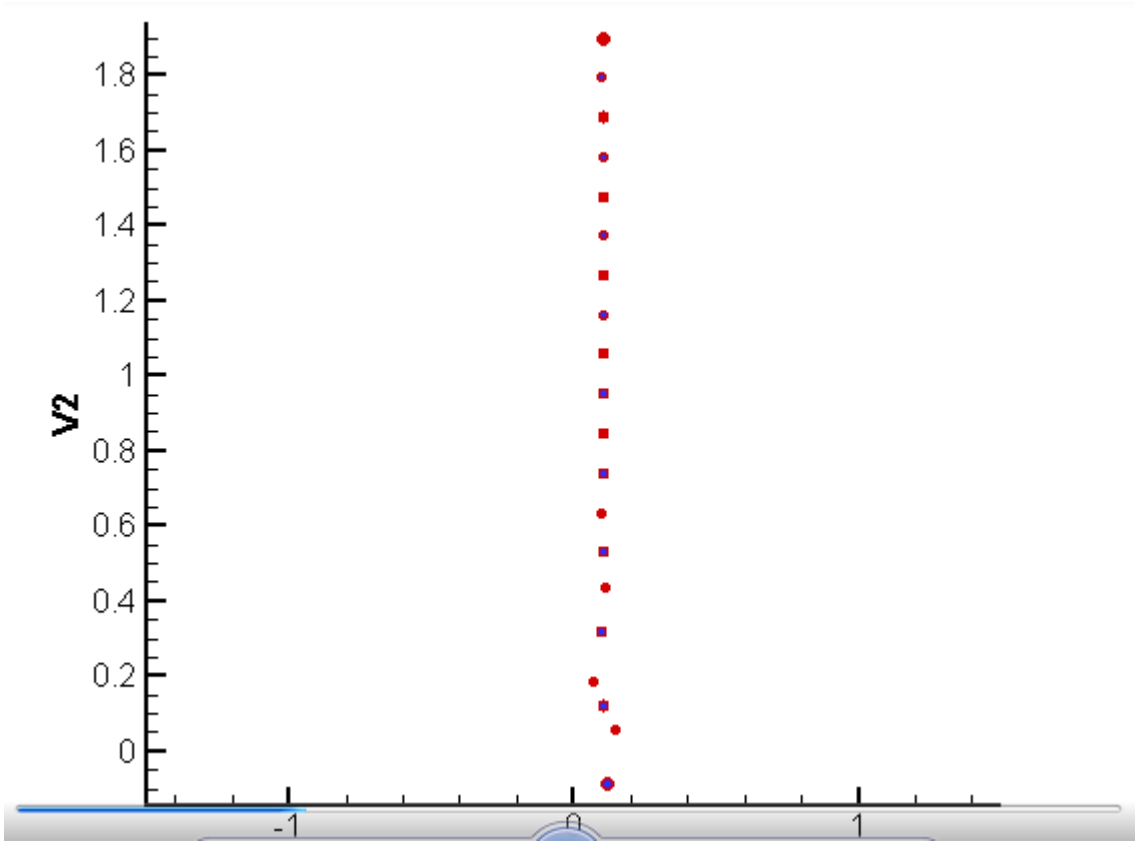


Рис. 8 . В момент времени t = 11 секунд .

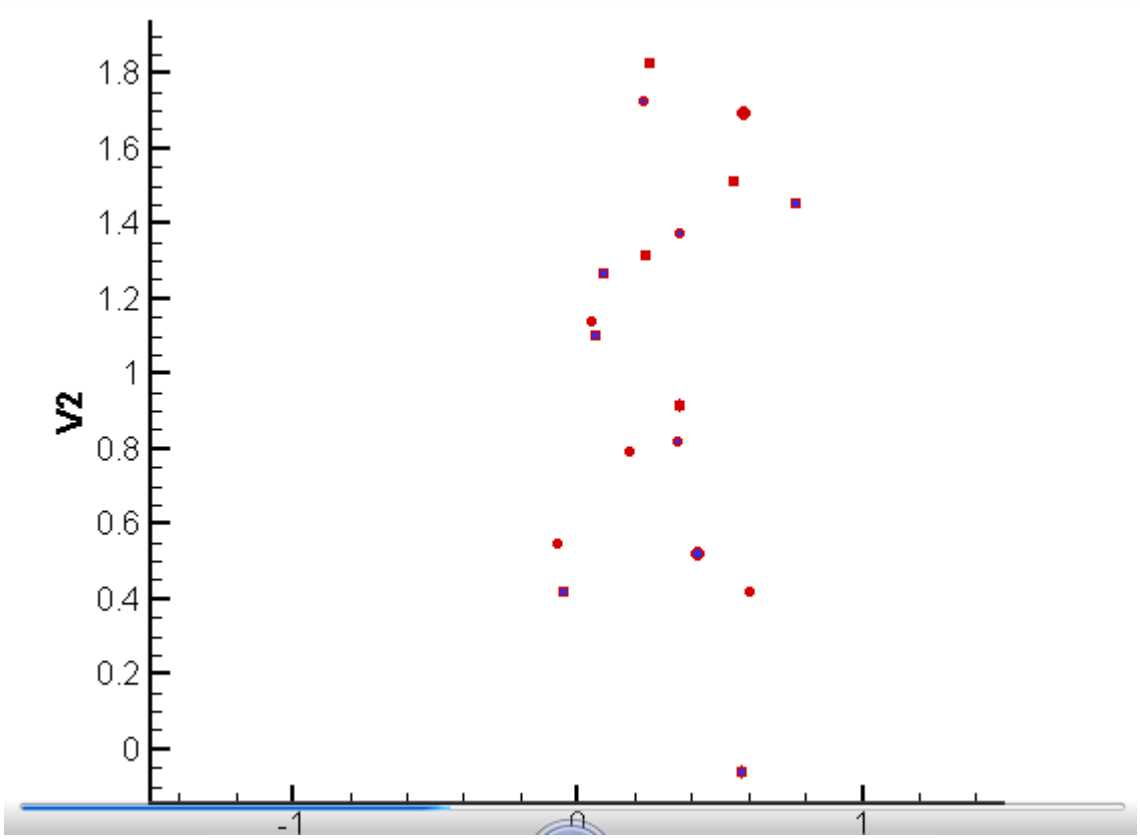


Рис. 9 . В момент времени t = 18 секунд .

Случай 50-ти вихрей (“распад” происходит на 3-ей секунде) :

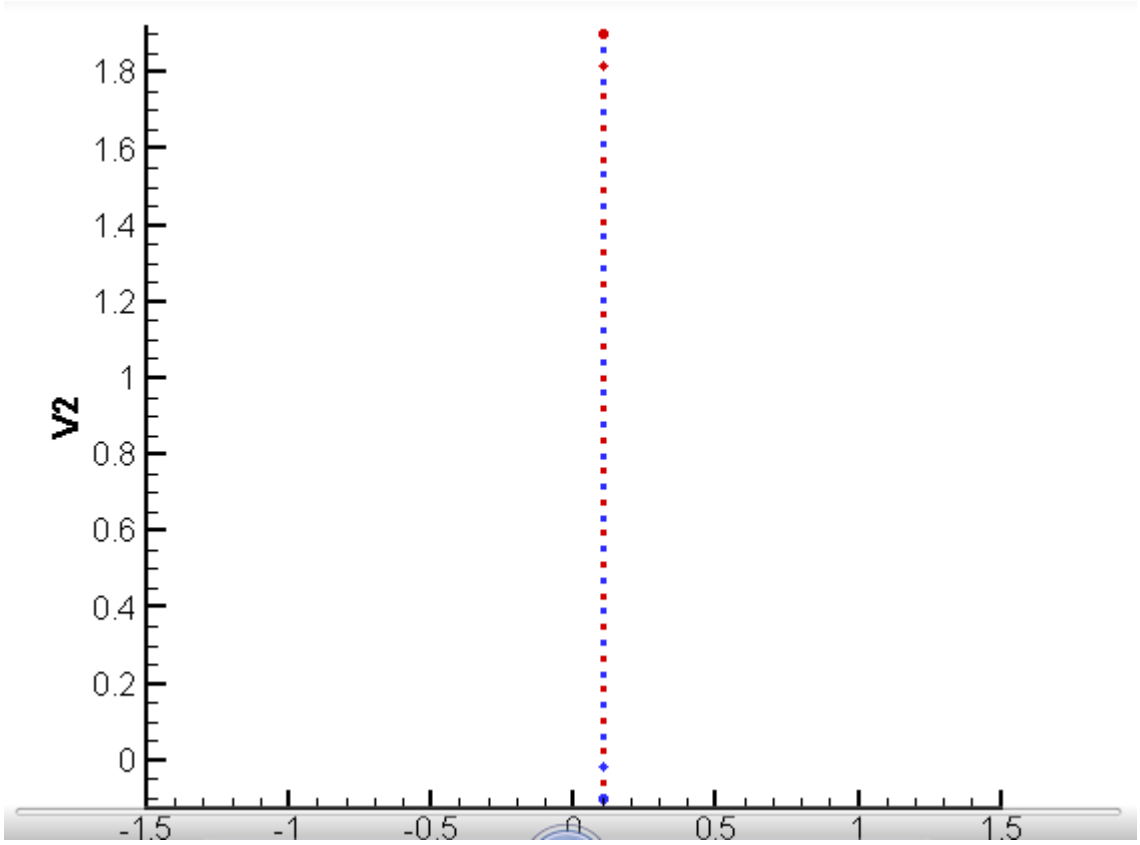


Рис. 10 . В момент времени t = 0 секунд .

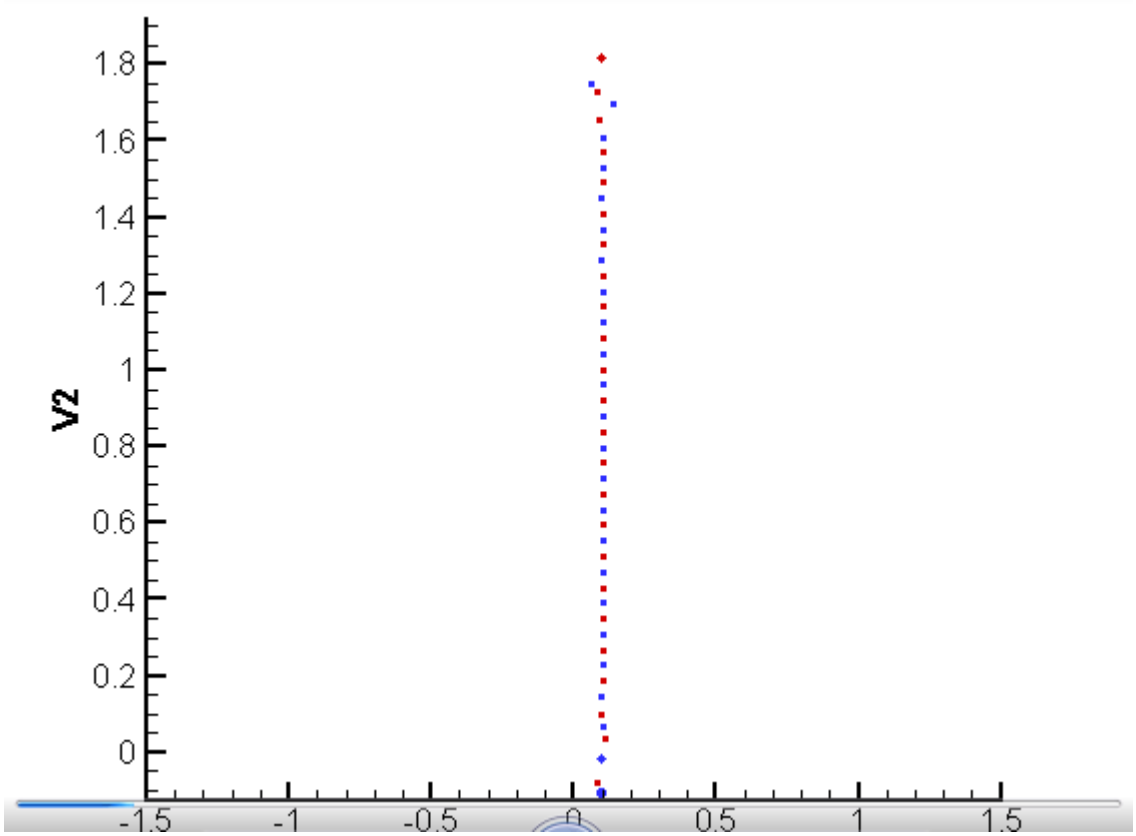


Рис. 11 . В момент времени t = 3 секунды .

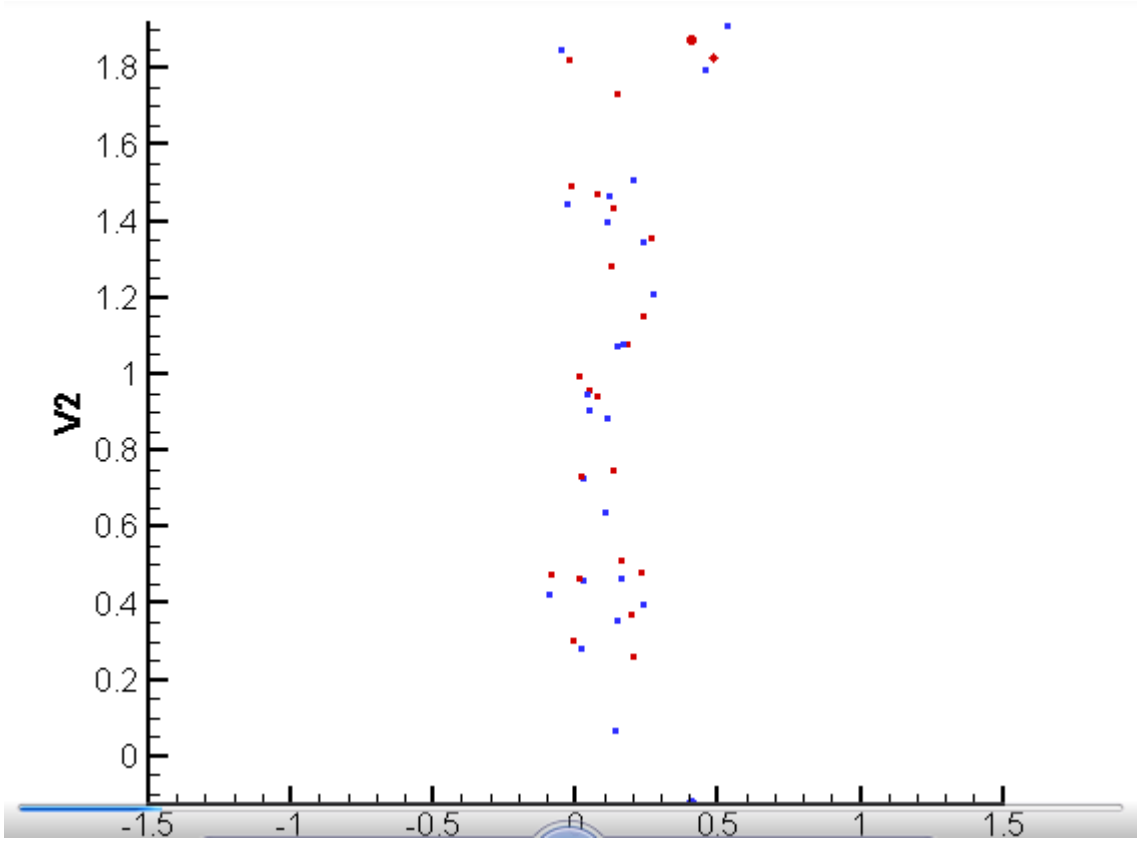
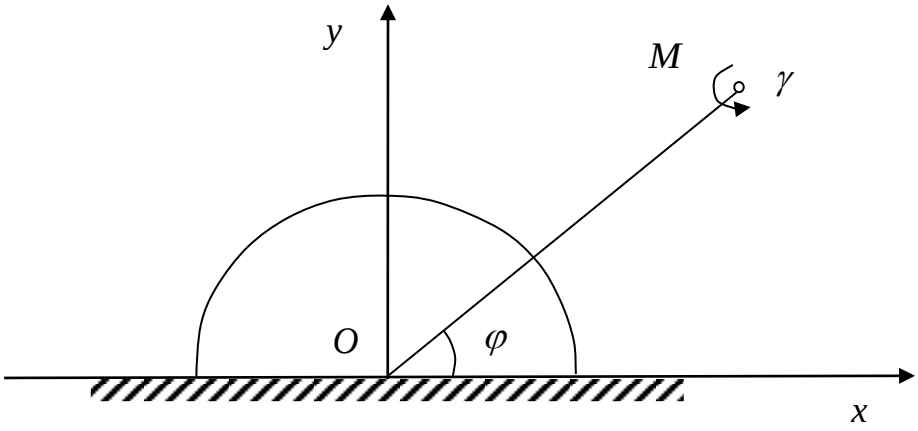


Рис. 12 . В момент времени t = 5 секунд .

Постановка задачи о движении вихря около цилиндрического препятствия и сведение ее к решению системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном в форме полуцилиндра единичного радиуса. В жидкость помещается вихрь заданной интенсивности γ. Положение вихря определяется расстоянием R от полюса O, расположенного в центре цилиндра, до вихря и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью. Требуется получить картину движения вихря



около полуцилиндра.

Решается задача по алгоритму, указанному во введении. Т.е. записывается комплексный потенциал течения жидкости :

$$W = vz + (vR^2)/z + \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0) - \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - 1/z_0) - \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - 1/\bar{z}_0)$$

Скорость выражается :

$$\frac{dW}{dz} = v - (vR^2)/(z^2) + \frac{\gamma}{2\pi i}/(z - z_0) - \frac{\gamma}{2\pi i}/(z - \bar{z}_0) + \frac{\gamma}{2\pi i}/(z - 1/z_0) - \frac{\gamma}{2\pi i}/(z - 1/\bar{z}_0) = V_x - iV_y$$

Таким образом проекции скорости передвижения вихрей даются формулами:

$$V_x = \mathrm{Re}\frac{dW}{dz} = 1/2\,(2 - 1/(\pi y) - (2\,(x^2 - y^2))/(x^2 + y^2)^2 +$$
$$(y\,(1/((-1+x)^2 + y^2) - 2/(-1+x^2 + y^2) + 1/((1+x)^2 + y^2)))/\pi)$$

$$V_y = -\mathrm{Im}\frac{dW}{dz} = 1/2\,((1-x)/(\pi\,((-1+x)^2 + y^2)) + (2\,x)/(\pi(-1+x^2 + y^2)) -$$
$$(4\,x\,y)/(x^2 + y^2)^2 - (1+x)/(\pi((1+x)^2 + y^2)))$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = V_y$$

Полученная система дифференциальных уравнений решается методом Эйлера.

Результат вычислений

Вычисления производились при помощи пакета Microsoft Visual Studio, визуализация решения при помощи Tecplot 10.

На рисунках представлены траектории движения вихря для различных значений интенсивности и параметров, определяющих начальное положение вихря в потоке. Был получен следующий результат: при положительных значениях интенсивности вихрь сносит потоком в бесконечность. В случае отрицательного значения интенсивности можно подобрать такие начальные значения R и φ, при которых вихрь движется около препятствия по замкнутой траектории. При увеличении полярного угла и незначительных изменениях значения радиуса наблюдается движение вихря в бесконечность .

При R=1.3 , φ=25 :

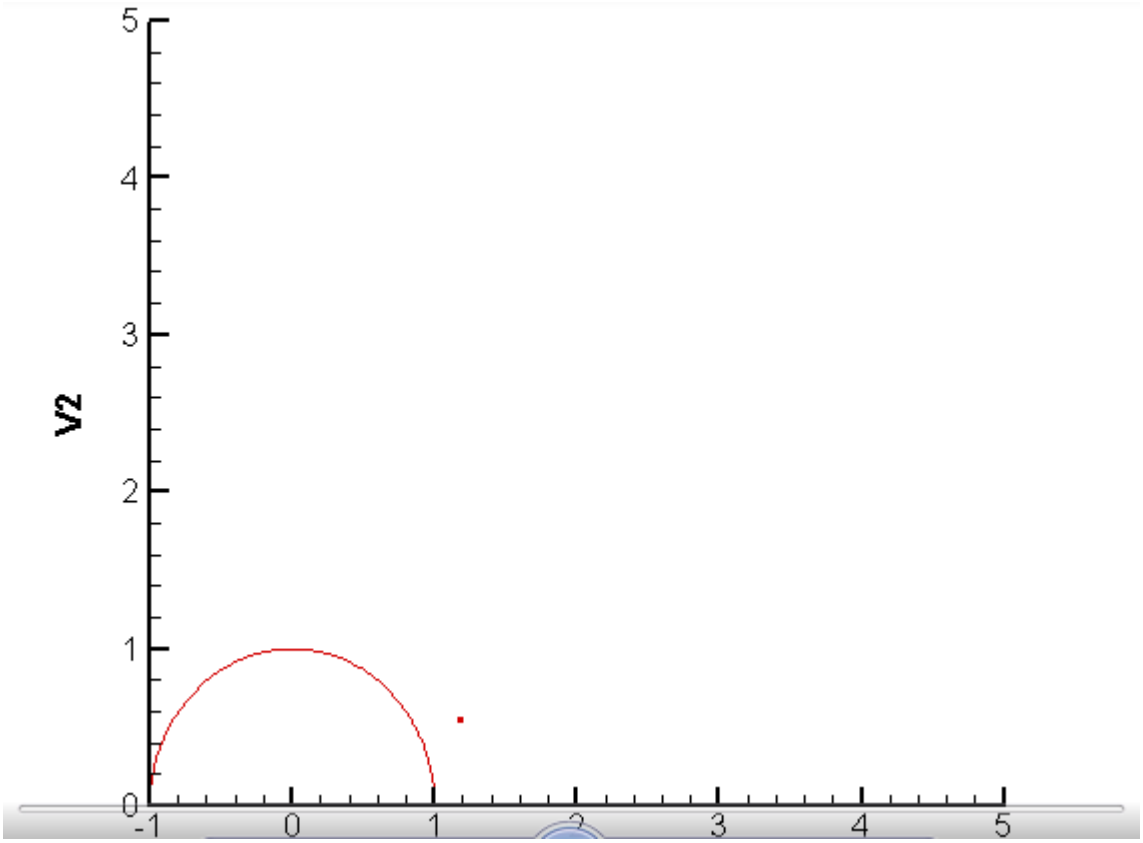


Рис. 13 . В момент времени t = 0 секунд .

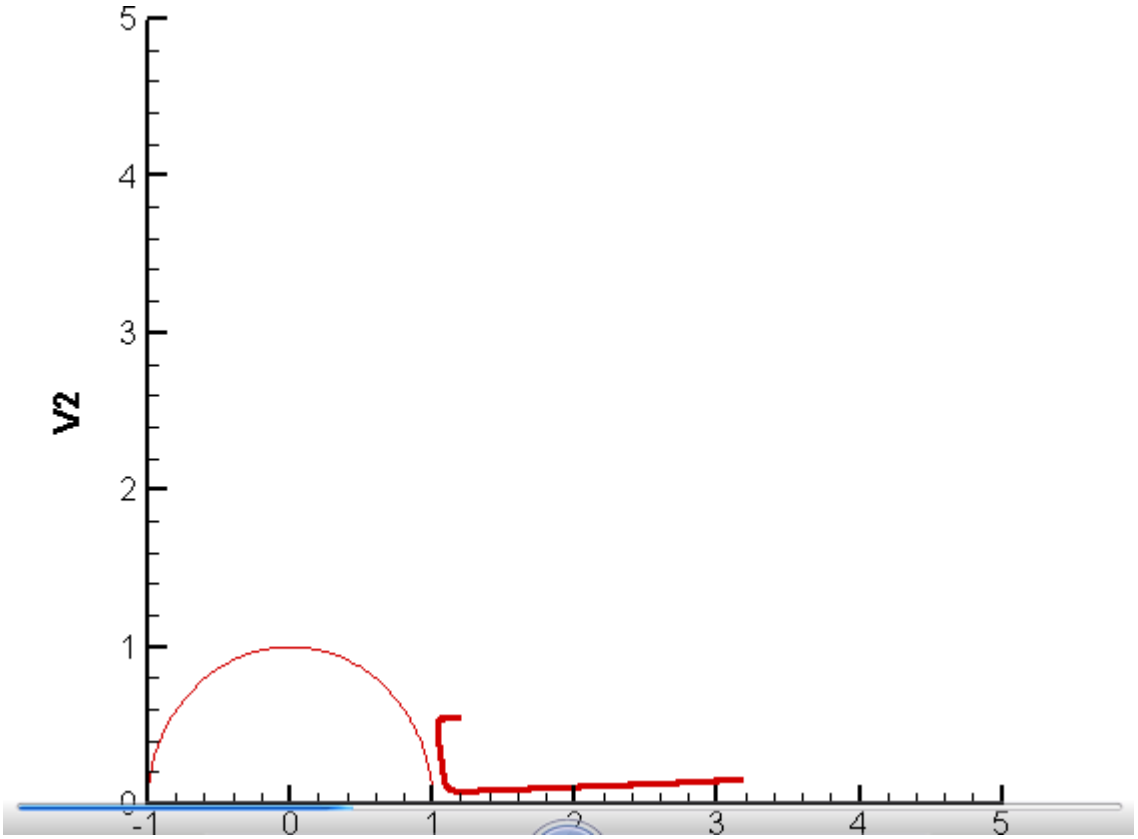


Рис. 14 . В момент времени t = 27 секунд .

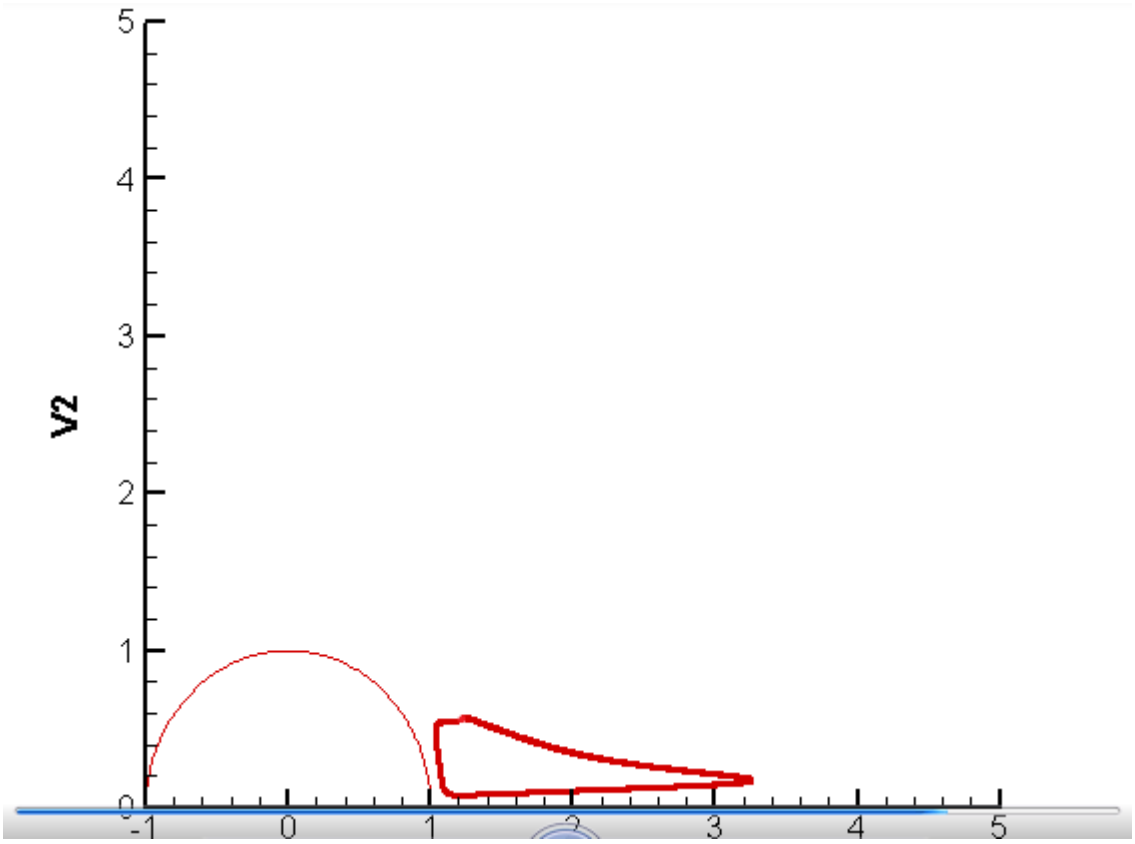


Рис. 15 . В момент времени t = 84 секунды .

При R=1.4 , φ=11 :

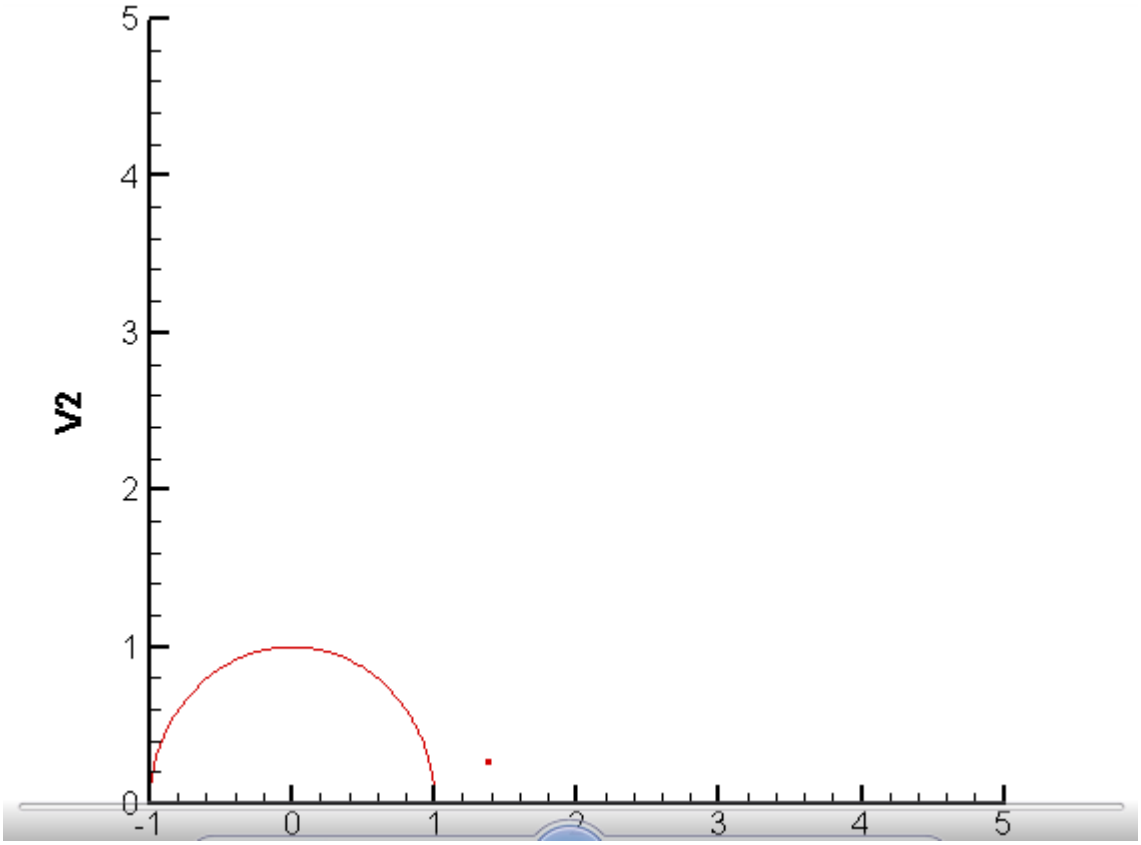


Рис. 16 . В момент времени t = 0 секунд .

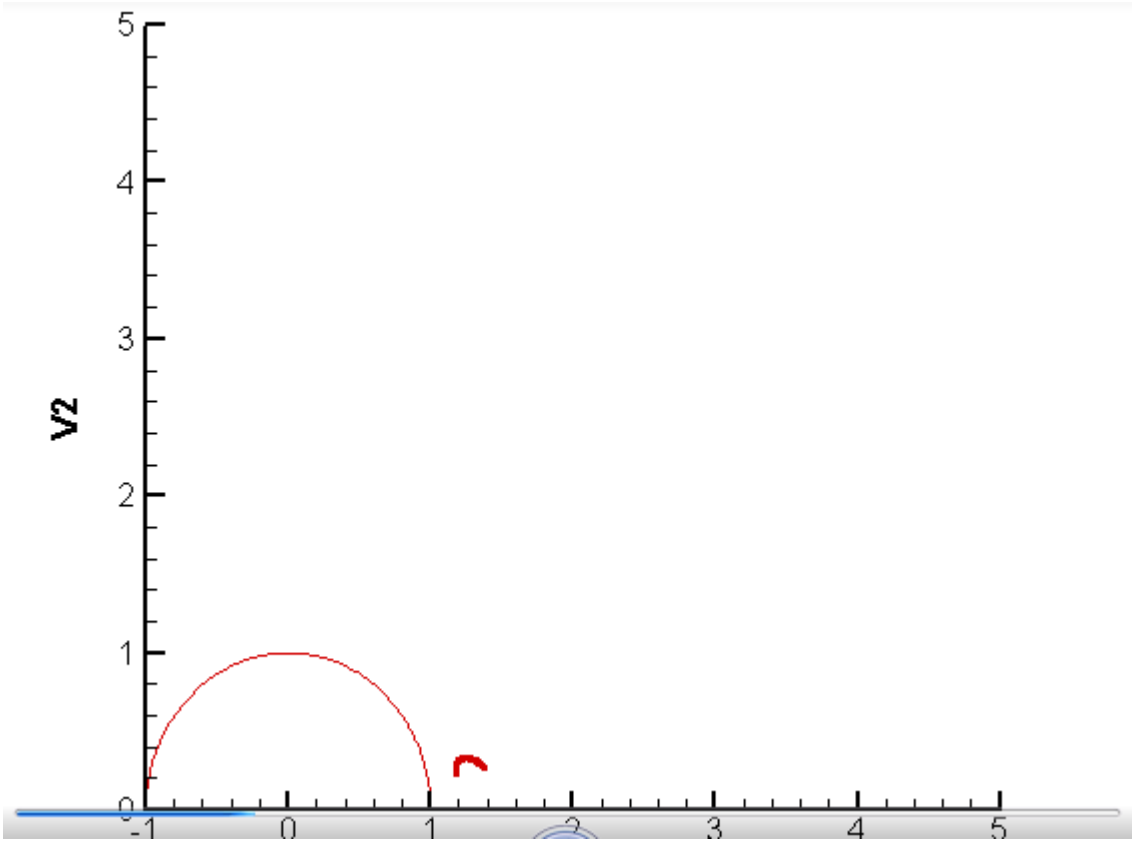


Рис. 17 . В момент времени t = 10 секунд .

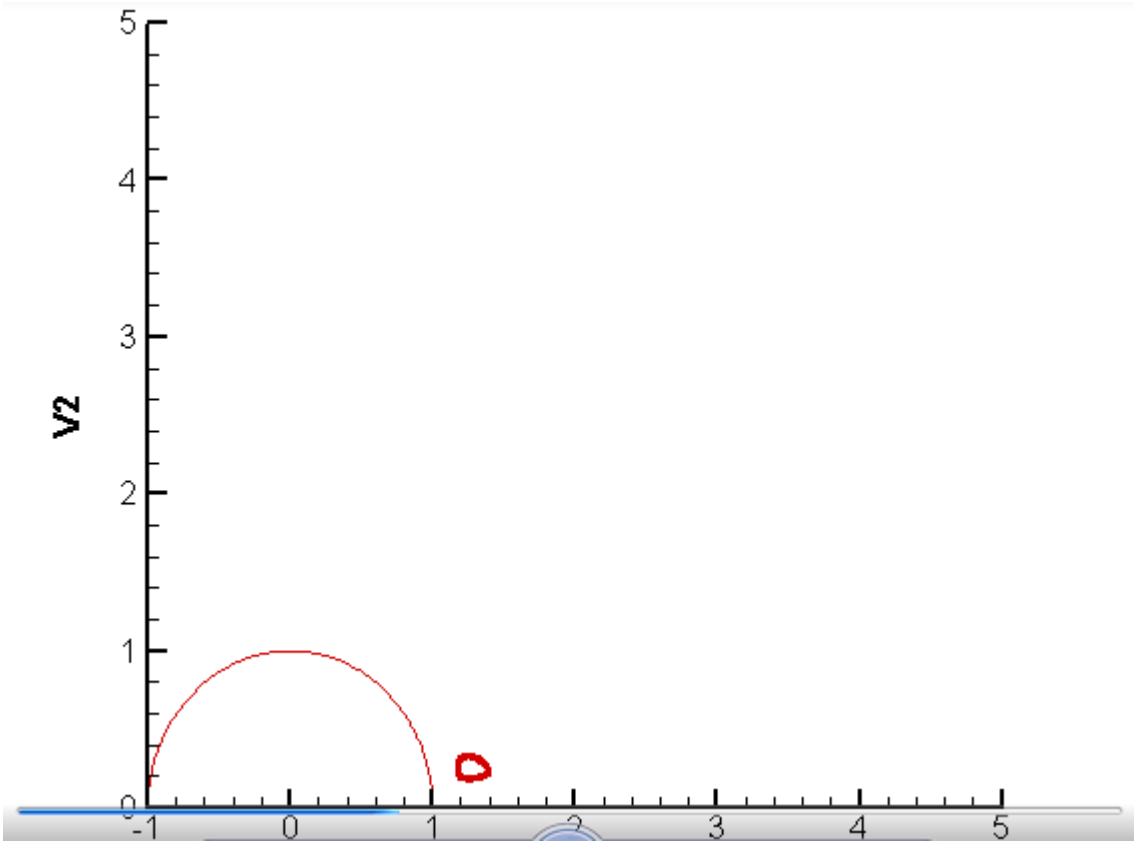


Рис. 18 . В момент времени t = 16 секунд .

При R=1.4 , φ=27 :

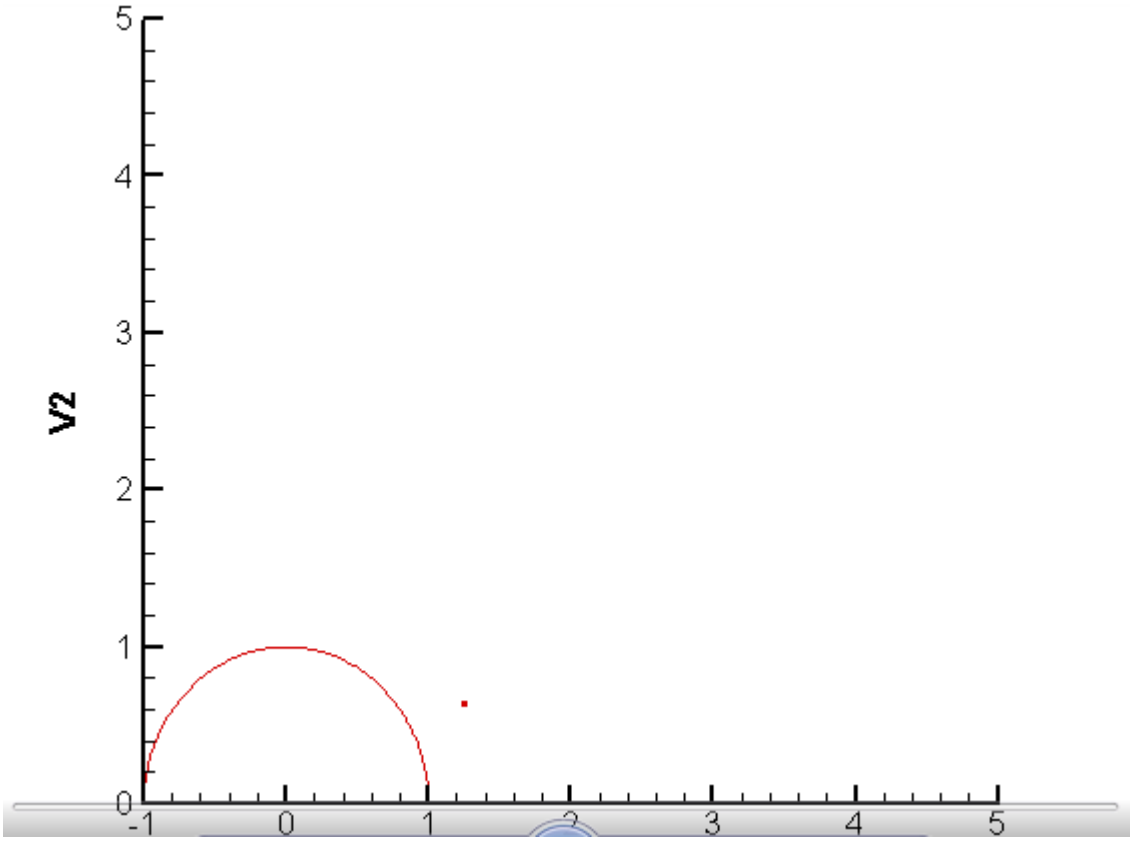


Рис. 19 . В момент времени t = 0 секунд .

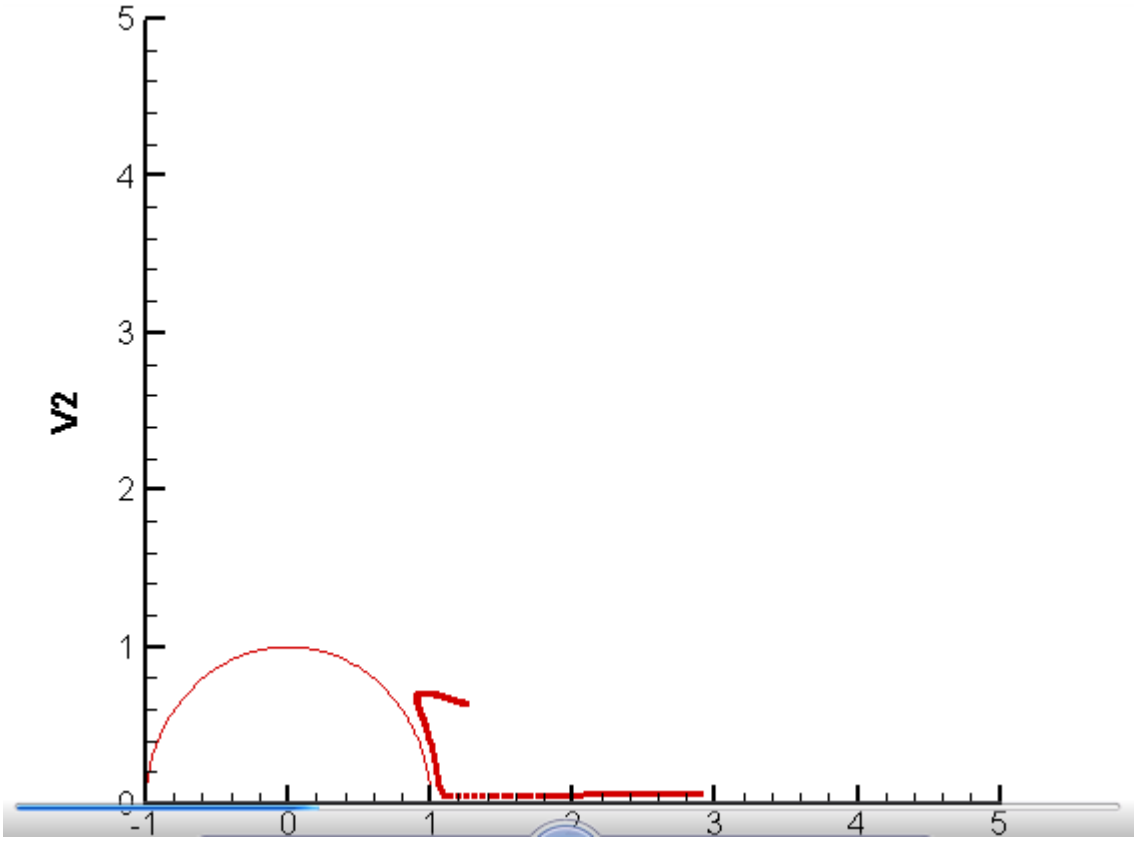


Рис. 20 . В момент времени t = 11 секунд .

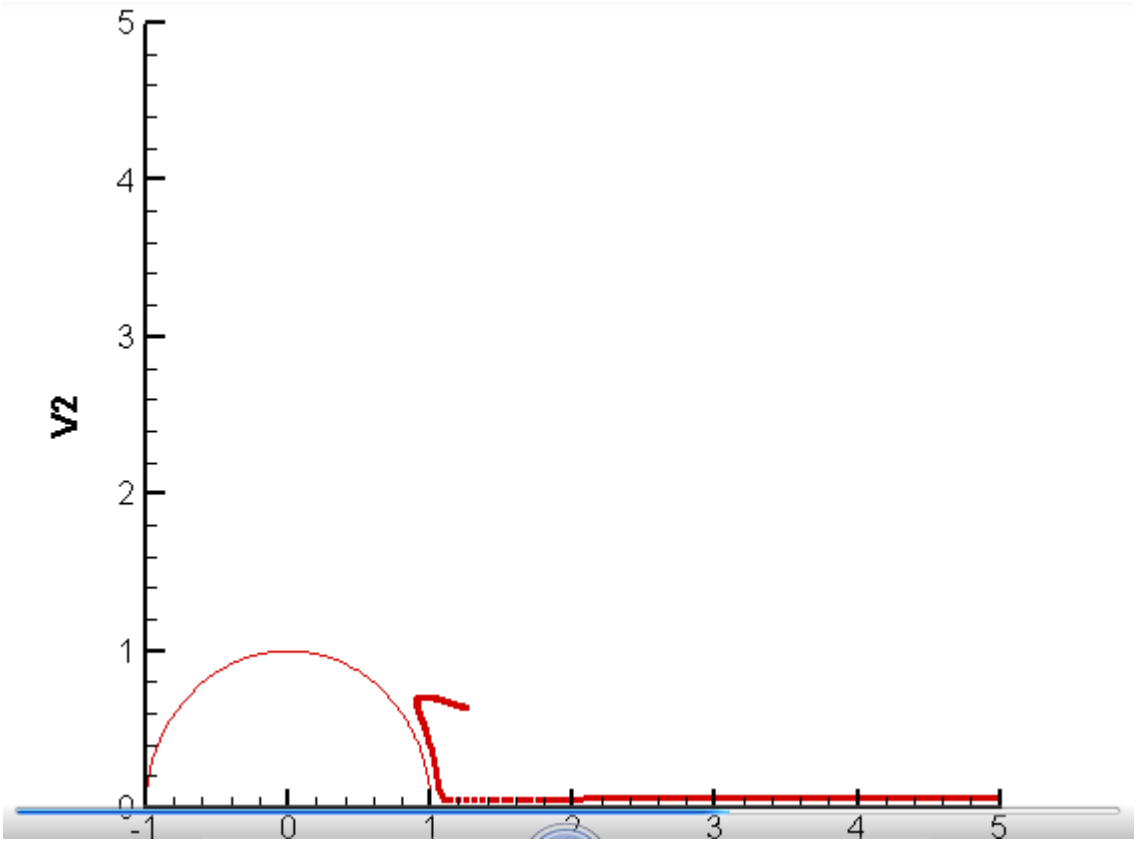


Рис. 21 . В момент времени t = 19 секунд .

Список использованных источников и литературы

1. Ламб Г. Гидродинамика 928 стр. М., Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы

http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=385778

2. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика 660 стр. М.: Мир, 2012

http://padabum.com/d.php?id=1118

3. Седов Л.И. Механика сплошной среды (2-й том). 6-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2004

http://www.twirpx.com/file/353774/

Приложение

Текст программы для задачи о движении n вихрей в бесконечном слое идеальной несжимаемой жидкости (на языке C++):

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;
#define PI (3.14159265)


void vortex_vel(double x, double y, double x0, double y0, double& vx1, double&
vy1)
{
	double r,x1,y1;
	x1=x-x0;
	y1=y-y0;
	r=x1*x1+y1*y1;
	vx1=-y1/r/2/PI;
	vy1=x1/r/2/PI;
}

void vcnw(double *x, double *y, double *gam, double *vx, double *vy, double n)
{
	double svx, svy, vx1, vy1;
	for (int i=0;i<n;i++)
	{
		svx=0;
		svy=0;
		for (int j=0;j<n;j++)
		{
			if (i!=j)
			{
				vortex_vel(x[i],y[i],x[j],y[j],vx1,vy1);
```

```
                svx=svx+gam[j]*vx1;
                svy=svy+gam[j]*vy1;
            }
        }
        /*for (int j=0;j<n;j++)
        {
            vortex_vel(x[i],y[i],x[j],-y[j],vx1,vy1);
            svx=svx-gam[j]*vx1;
            svy=svy-gam[j]*vy1;
        }*/
        vx[i]=svx;
        vy[i]=svy;
    }
}

void main()
{
    int n=2,ntime=1000;
    double x0,y0;
    double *x = new double[n];
    double *y = new double[n];
    double *gam = new double[n];
    double *vx = new double[n];
    double *vy = new double[n];
    double htime=0.01;

    ofstream output_file ("output.dat");
    if (output_file.fail()) cout<<"error";

    output_file << "zone" << "\n"<<"0 0"<< "\n";
    for (int i=0;i<n;i++)
    {
        double s = 1.0/(n-1)*i;
        x[i]=-2+4.0*s;
        y[i]=1;
        gam[i]=i+5;
        output_file<<"GEOMETRY X="<< x[i] << ", Y=" << y[i] << ",
T=CIRCLE, C=RED, FC=BLUE,CS=grid,ZN=" << 1 <<"\n" << 0.01*gam[i]
<<"\n";
```

```
	}

	for (int i=0;i<ntime;i++)
	{
		vcnw(x,y,gam,vx,vy,n);
		output_file << "zone" << "\n"<<"0 0"<< "\n";
		for (int j=0;j<n;j++)
		{
			x[j]=x[j]+htime*vx[j];
			y[j]=y[j]+htime*vy[j];
			output_file<<"GEOMETRY X="<<x[j] << ", Y=" << y[j] << ",
T=CIRCLE, C=RED, FC=BLUE,CS=grid,ZN=" << i+2 <<"\n" << 0.01*gam[j]
<<"\n";
		}
	}

}
```

Текст программы для решения задачи о движении вихря вокруг цилиндра (на языке C++):

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;
#define Pi (3.14159265)
double x,y;

double vortex_vel_sk(double xv, double yv)
{
	return (2 - (2*(xv - yv)*(xv + yv))/pow(pow(xv,2) + pow(yv,2),2) + (-(1/yv)
+ yv*(1/(pow(-1 + xv,2) + pow(yv,2)) - 2/(-1 + pow(xv,2) + pow(yv,2)) + 1/(pow(1
+ xv,2) + pow(yv,2))))/Pi)/2;
}
```

```
double vortex_vel_sko(double xv, double yv)
{
	return 2*xv*yv*(-pow(pow(xv,2) + pow(yv,2),-2) + (2*yv)/(Pi*(pow(-1 +
xv,2) + pow(yv,2))*(-1 + pow(xv,2) + pow(yv,2))*(pow(1 + xv,2) + pow(yv,2))));
}

int main()
{
	double f[181][2], t;
	for (int i = 0; i < 181; i++)
	{
		t = (i * Pi) / 180;
		f[i][0] = cos(t);
		f[i][1] = sin(t);
		cout << i <<": "<<f[i][0] << " " << f[i][1] << endl;
	}
	//system("PAUSE");
	int ntime = 500;
	double htime = 0.01;
	double gam = -2;
	double rho = 1.4;
	double teta = 0.061 * Pi;
	double x= rho*cos(teta) ,y=rho*sin(teta);

	ofstream output_file ("output.dat");
	if (output_file.fail()) cout<<"error";

	double **route = new double*[ntime + 1];
	for (int i = 0; i <= ntime; i++)
		route[i] = new double[2];

	output_file << "zone" << "\n";
	for (int k = 0; k <= 180; k++)
      output_file << f[k][0] << " " << f[k][1] << "\n";
   output_file << "\n";

	output_file<<"GEOMETRY X = "<< x << ", Y = " << y << ", T = CIRCLE,
C = RED, FC = RED, CS = grid,  ZN =" << 1 <<"\n" << 0.01 <<"\n";
	route[0][0] = x; route[0][1] = y;
```

```
	double xv, yv;

	for (int i = 0; i < ntime; i++)
	{
		xv = x;
		yv = y;

		output_file << "\nzone\n";

		for (int k = 0; k <= 180; k++)
	 output_file << f[k][0] << " " << f[k][1] << "\n";

		x += htime * gam * vortex_vel_sk(xv, yv);
		y += htime * gam * vortex_vel_sko(xv, yv);

		route[i+1][0] = x; route[i+1][1] = y;


		for (int j = 0; j <= i + 1; j++)
			output_file<<"GEOMETRY X = "<< route[j][0] << ", Y = " <<
route[j][1] << ", T = CIRCLE, C = RED, FC = RED, CS = grid, ZN = " << i + 2
<<"\n" << 0.01 <<"\n";
	}

	return 0;
}
```