ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.968:519.6

И.Ф. АСАДУЛЛИНА

МНОГОМЕРНЫЕ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЧАСТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рассмотрим двумерное слабосингулярное интегральное уравнение первого рода вида

$$Ax \equiv Kx + Rx \equiv K_1x + K_2x + K_{12}x + Rx = y, \tag{1}$$

где $y = y(s,t)$ — известная 2π-периодическая функция, $x = x(s,t)$ — искомая 2π-периодическая функция $(0 \le s,t \le 2\pi)$; здесь $K_ix = K_i(x;s,t)$,

$$K_1(x;s,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma,t)d\sigma,$$
$$K_2(x;s,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{t-\tau}{2}\right| x(s,\tau)d\tau,$$
$$K_{12}(x;s,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| \ln\left|\sin\frac{t-\tau}{2}\right| x(\sigma,\tau)d\sigma\, d\tau$$

— слабосингулярные интегралы, понимаемые как несобственные, а R — вполне непрерывный оператор.

Введем пространства X и Y искомых функций и правых частей уравнения следующим образом:

$$X = \{x(s,t) \in L_2 : \exists x'_s, x'_t \in L_2\},$$
$$Y = \{y(s,t) \in L_2 : \exists y''_{st} \in L_2\},$$

где $L_2 = L_2[0,2\pi]^2$. Нормы в указанных пространствах задаются по правилу

$$\|x\|_X = \|x\|_2 + \|x'_s\|_2 + \|x'_t\|_2, \quad x \in X;$$
$$\|y\|_Y = \|y\|_2 + \|y''_{st}\|_2, \quad y \in Y,$$

где

$$\|z\|_2 = \left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |z(s,t)|^2 ds\, dt\right)^{1/2}$$

— норма в пространстве L_2. Ниже всюду через

$$c_{kj}(z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} z(s,t)e^{-i(ks+jt)} ds\, dt, \quad z \in L_1, \quad k,j = 0, \pm1, \dots,$$

будем обозначать комплексные коэффициенты Фурье функции $z \in L_1 = L_1[0,2\pi]^2$.

Теорема 1. *Оператор $K: X \to Y$ непрерывно обратим. Обратный оператор определяется по формуле*

$$K^{-1}(y;s,t) = \frac{c_{00}(y)}{\ln^2 2 + 2\ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(k) c_{k0}(y'_s) e^{iks}}{2\ln|k| + \ln 2 + 1} -$$

$$- 2i \sum_{|j|=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(j) c_{0j}(y'_t) e^{ijt}}{2\ln|j| + \ln 2 + 1} - 4 \sum_{|k|=1}^{\infty} \sum_{|j|=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(kj) c_{kj}(y''_{st}) e^{i(ks+jt)}}{2|k| + 2|j| + 1}, \quad y \in Y, \quad (2)$$

при этом

$$\|K^{-1}\| \le 4, \quad K^{-1}: Y \to X.$$

Доказательство. В условиях теоремы функции $x \in X$ и $y \in Y$ можно разложить в ряды Фурье:

$$x(s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) e^{i(ks+jt)}, \quad y(s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(y) e^{i(ks+jt)}.$$

Тогда имеем (см., напр., [1])

$$K_1(x;s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) c_k(g) e^{i(ks+jt)}, \quad (3)$$

$$K_2(x;s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) c_j(g) e^{i(ks+jt)}, \quad (4)$$

$$K_{12}(x;s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) c_{kj}(g_{12}) e^{i(ks+jt)}, \quad (5)$$

где

$$g(\sigma) = -\ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right|, \quad g_{12}(\sigma,\tau) = \ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right| \ln\left|\sin\frac{\tau}{2}\right|.$$

Как известно,

$$c_r(g) = \begin{cases} \ln 2, & r = 0; \\ \frac{1}{2|r|}, & r \ne 0, \end{cases}$$

$$c_{kj}(g_{12}) = \begin{cases} \ln^2 2, & k = j = 0; \\ \frac{\ln 2}{2|k|}, & k \ne 0, \quad j = 0; \\ \frac{\ln 2}{2|j|}, & k = 0, \quad j \ne 0; \\ \frac{1}{4|k|\,|j|}, & k, j \ne 0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом линейной независимости системы функций $\{e^{i(ks+jt)}\}$ имеем

$$c_{kj}(x) = \frac{c_{kj}(y)}{c_{kj}(g_{12}) + c_k(g) + c_j(g)} \equiv c_{kj}(x^*).$$

Пользуясь известными соотношениями для коэффициентов Фурье

$$c_{kj}(\varphi) = \frac{c_{kj}(\psi)}{\mu_k \mu_j},$$

где

$$\psi = \begin{cases} \varphi, & k = j = 0; \\ \varphi'_s, & k \ne 0, \quad j = 0; \\ \varphi'_t, & k = 0, \quad j \ne 0; \\ \varphi''_{st}, & k, j \ne 0, \end{cases} \quad \mu_r = \begin{cases} 1, & r = 0; \\ ir, & r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases}$$

последовательно находим

$$x^*(s,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{c_{kj}(y)}{c_{kj}(g_{12})+c_k(g)+c_j(g)}e^{i(ks+jt)}=\frac{c_{00}(y)}{\ln^2 2+2\ln 2}+$$

$$+2\sum_{|k|=1}^{\infty}\frac{|k|c_{k0}(y)e^{iks}}{2\ln|k|+\ln 2+1}+2\sum_{|j|=1}^{\infty}\frac{|j|c_{0j}(y)e^{ijt}}{2\ln|j|+\ln 2+1}+4\sum_{|k|=1}^{\infty}\sum_{|j|=1}^{\infty}\frac{|k|\,|j|c_{kj}(y)e^{i(ks+jt)}}{2|k|+2|j|+1}=$$

$$=\frac{c_{00}(y)}{\ln^2 2+2\ln 2}-2i\sum_{|k|=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(k)c_{k0}(y'_s)e^{iks}}{2\ln|k|+\ln 2+1}-2i\sum_{|j|=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(j)c_{0j}(y'_t)e^{ijt}}{2\ln|j|+\ln 2+1}-$$

$$-4\sum_{|k|=1}^{\infty}\sum_{|j|=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(kj)c_{kj}(y''_{st})e^{i(ks+jt)}}{2|k|+2|j|+1}=K^{-1}(y;s,t).$$

Оценим норму оператора K^{-1} в рассматриваемых пространствах. Для любого $z\in X$ имеем

$$\|Kz\|_Y=\|Kz\|_2+\|(Kz)''_{st}\|_2\geq\|(K_1z)''_{st}\|_2+\|(K_2z)''_{st}\|_2+\|(K_{12}z)''_{st}\|_2=$$

$$=\frac{1}{2}\|I_1z'_t\|_2+\frac{1}{2}\|I_2z'_s\|_2+\frac{1}{4}\|I_{12}z\|_2\geq\frac{1}{4}(\|z'_t\|_2+\|z'_s\|_2+\|z\|_2)=\frac{1}{4}\|z\|_X,$$

где

$$I_1(x;s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}x(\sigma,t)d\sigma,$$

$$I_2(x;s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}x(s,\tau)d\tau,$$

$$I_{12}(x;s,t)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}x(\sigma,t)d\sigma\,d\tau$$

— сингулярные интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши–Лебегу, причем (см., напр., [2]) $\|I_1\|=1$, $\|I_2\|=1$, $\|I_{12}\|=1$, $I_k:L_2\to L_2$ $(k=1,2,12)$.

Из доказанных соотношений следует, что существует левый обратный оператор $K_\ell^{-1}:Y\to X$ и он ограничен $\|K_\ell^{-1}\|\leq 4$.

Существование правого обратного оператора следует из формулы (2).

Следствие. Пусть оператор

$$R(x;s,t)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,t,\sigma,\tau)x(\sigma,\rho)d\sigma\,d\tau,\quad R:X\to Y,$$

вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет только нулевое решение, то оператор $K:X\to Y$ непрерывно обратим.

Замечание. Для полной непрерывности оператора $R:X\to Y$ достаточно, например, чтобы $h(s,t,\sigma,\tau)\in L_2$ по переменным σ и τ, $h(s,t,\sigma,\tau)\in C[0,2\pi]^2$ и существовала $h''_{st}\in L_2$ по переменным s и t.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде тригонометрического многочлена

$$x_{nm}(s,t)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\alpha_{kj}e^{i(ks+jt)},\quad n,m\in N,\tag{6}$$

коэффициенты которого определим *методом Галёркина*

$$c_{r\ell}(Ax_{nm})=c_{r\ell}(y),\quad r=\overline{-n,n},\quad \ell=\overline{-m,m}.\tag{7}$$

В силу (3)–(5) для элементов (6) имеем

$$K_1(x_{nm};s,t)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\alpha_{kj}c_k(g)e^{i(ks+jt)},$$
$$K_2(x_{nm};s,t)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\alpha_{kj}c_j(g)e^{i(ks+jt)},$$
$$K_{12}(x_{nm};s,t)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\alpha_{kj}c_{kj}(g_{12})e^{i(ks+jt)}.$$

Поэтому условия (7) эквивалентны следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\alpha_{r\ell}\{c_{r\ell}(g_{12})+c_r(g)+c_\ell(g)\}+\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\alpha_{kj}h_{kjr\ell}=c_{r\ell}(y),\quad r=\overline{-n,n},\ \ \ell=\overline{-m,m}, \tag{8}$$

где

$$h_{kjr\ell}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,t,\sigma,\tau)e^{i(k\sigma+j\tau-rs-\ell t)}d\sigma\,d\tau\,ds\,dt.$$

Обозначим через $E_{nm}(z)_2$ наилучшее среднеквадратическое приближение функции $z(s,t)\in L_2$ многочленами вида (6). Через $X_{nm}\subset X$ и $Y_{nm}\subset Y$ будем обозначать множество всех тригонометрических многочленов вида (6), наделенное нормами пространств соответственно X и Y.

Теорема 2. *Пусть ядро $h(s,t,\sigma,\tau)$ таково, что оператор $R:X\to Y$ вполне непрерывен. Если уравнение* (1) *однозначно разрешимо в пространстве X при любой правой части $y\in Y$, то при всех $n\ge n_0$, $m\ge m_0$ СЛАУ* (8) *имеет единственное решение α^*_{kj}, $k=\overline{-n,n}$, $j=\overline{-m,m}$. Приближенные решения $x^*_{nm}(s,t)$ (т. е.* (6) *при $\alpha_{kj}=\alpha^*_{kj}$) сходятся к точному решению $x^*(s,t)$ со скоростью*

$$\|x^*-x^*_{nm}\|_2=O\{E_{nm}((Kx^*)''_{st})_2\}.$$

Доказательство. СЛАУ (8) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_{nm}x_{nm}\equiv\Phi_{nm}Ax_{nm}=\Phi_{nm}y\quad(x_{nm}\in X_{nm},\ \ \Phi_{nm}y\in Y_{nm}),$$

где

$$\Phi_{nm}(z;s,t)=\sum_{r=-n}^{n}\sum_{\ell=-m}^{m}c_{r\ell}(z)e^{i(rs+\ell t)}ds\,dt.$$

Так как $\Phi^2_{nm}=\Phi_{nm}$, то $\Phi_{nm}K_ix_{nm}=K_ix_{nm}$ $(i=1,2,12)$ для любого $x_{nm}\in X_{nm}$ и СЛАУ (8) эквивалентна операторному уравнению

$$A_{nm}x_{nm}\equiv K_1x_{nm}+K_2x_{nm}+K_{12}x_{nm}+\Phi_{nm}Rx_{nm}=\Phi_{nm}y\quad(x_{nm}\in X_{nm},\ \ y\in Y_{nm}). \tag{9}$$

Из уравнений (1) и (9) для любого $x_{nm}\in X_{nm}$ находим

$$\|Ax_{nm}-A_{nm}x_{nm}\|_Y=\|Rx_{nm}-\Phi_{nm}Rx_{nm}\|_Y=\|x_{nm}\|_X\|Rz_{nm}-\Phi_{nm}Rz_{nm}\|_Y\le$$
$$\le\|x_{nm}\|_X\sup\{\|\varphi-\Phi_{nm}\varphi\|_Y:\varphi\in R\text{Ш}\},\quad z_{nm}=\frac{x_{nm}}{\|x_{nm}\|}, \tag{10}$$

где $\text{Ш}=\text{Ш}(0,1)$ — единичный шар пространства X.

Для любого $\varphi\in Y$ с учетом $\|\Phi_{nm}\|=1$, $\Phi_{nm}:L_2\to L_2$, имеем

$$\|\Phi_{nm}\varphi\|_Y=\|\Phi_{nm}\varphi\|_2+\|\Phi_{nm}\varphi''_{st}\|_2\le\|\varphi\|_2+\|\varphi''_{st}\|_2=\|\varphi\|_Y,$$

т. е. $\|\Phi_{nm}\|\le1$, $\Phi_{nm}:Y\to Y$. А так как $\Phi^2_{nm}=\Phi_{nm}$, то

$$\|\Phi_{nm}\|=1,\quad\Phi_{nm}:Y\to Y.$$

Кроме того, для любого $\varphi \in Y$ находим

$$\|\varphi - \Phi_{nm}\varphi\|_Y = \|\varphi - \Phi_{nm}\varphi\|_2 + \|\varphi''_{st} - \Phi_{nm}\varphi''_{st}\|_2 = E_{nm}(\varphi)_2 + E_{nm}(\varphi''_{st})_2. \tag{11}$$

Так как

$$E_{nm}(\varphi)_2 \le \frac{E_{nm}(\varphi''_{st})_2}{(n+1)(m+1)}, \quad \varphi \in Y, \quad n+1, m+1 \in N,$$

то из (11) для любого $\varphi \in Y$ получаем соотношения

$$E_{nm}(\varphi''_{st})_2 \sim \|\varphi - \Phi_{nm}\varphi\|_Y \le 2E_{nm}(\varphi''_{st})_2 \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to \infty. \tag{12}$$

Так как оператор $R : X \to Y$ вполне непрерывен, то множество RШ компактно в пространстве Y. Поэтому из (12) в силу известных результатов (см., напр., [3]) следует

$$\varepsilon'_{nm} \equiv \sup\{\|\varphi - \Phi_{nm}\varphi\|_Y : \varphi \in R\text{Ш}\} \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to \infty.$$

Отсюда и из (10) получаем оценку

$$\varepsilon_{nm} \equiv \|A - A_{nm}\|_{X_{nm} \to Y} \le \varepsilon'_{nm} \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to \infty, \tag{13}$$

где $\varepsilon'_{nm} = 0$ при $R = 0$.

В силу (12) для правых частей уравнений (1) и (9) справедлива оценка

$$\delta_{nm} \equiv \|y - \Phi_{nm}y\|_Y \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to \infty. \tag{14}$$

В условиях теоремы оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим. Таким образом, в силу (13) и (14) для уравнений (1) и (9) выполнены все условия теорем 2.1 и 2.2 ([1], с. 17–18). Тогда при всех $n \ge n_0$, $m \ge m_0$ СЛАУ (8) однозначно разрешима, и приближенные решения x^*_{nm} сходятся к точному решению x^* со скоростью

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_2 = O\{E_{nm}((Kx^*)_{st})_2\}.$$

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 9. – С. 1504–1516.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

Казанский государственный университет

Поступила 19.06.2003