Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №5, с. 18–24 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0043*

Ю.В. ЕРШОВ, Е.И. ЯКОВЛЕВ

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ H_k-РАССТОЯНИЯ ГОМОЛОГИЧЕСКИМИ КЛАССАМИ ПРОСТРАНСТВ ПУТЕЙ

Аннотация. В предыдущих работах авторами были построены и изучены отображения $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$, названные функциями H_k-расстояния. Основным результатом настоящей работы является теорема о реализуемости обобщенных расстояний $d_k(v,w)$, $v, w \in M$, как критических значений функционала длины $\mathcal{L} : \Omega(M,v,w) \to \mathbb{R}$, порожденных некоторыми нетривиальными классами гомологий пространства $\Omega(M,v,w)$ путей, соединяющих точки v и w.

Ключевые слова: риманово многообразие, пространство путей, функции расстояния, многозначный функционал, экстремаль.

УДК: 514.764 : 515.165

Abstract. In the previous papers we constructed and studied mappings $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$; we called them the functions of the H_k-distance. The main result of this paper is a theorem about the realizability of generalized distances $d_k(v,w)$, $v, w \in M$, considered as critical values of the length functional $\mathcal{L} : \Omega(M,v,w) \to \mathbb{R}$ generated by some nontrivial homology classes of the space $\Omega(M,v,w)$ of paths between points v and w.

Keywords: Riemannian manifold, path space, distance functions, multivalued functional, extremal.

1. Функции H_k-расстояния

Всюду в работе $H_k(X)$ — k-мерная группа сингулярных гомологий топологического пространства X с вещественными коэффициентами. Гладкость многообразий и отображений означает их дифференцируемость класса C^∞.

Пусть (M,g) — полное риманово многообразие. Для произвольных точек $v, w \in M$ символом $\Omega(M,v,w)$ договоримся обозначать множество кусочно-гладких путей $x : [0,1] \to M$ с началом $x(0) = v$ и концом $x(1) = w$. Топологию на $\Omega(M,v,w)$ будем считать индуцированной метрикой

$$d_\Omega(x,y) = \max_{t\in[0,1]} d(x(t),y(t)) + |\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y)|,$$

где $\mathcal{L} : \Omega(M,v,w) \to \mathbb{R}$ — функционал длины, а $d : M \times M \to \mathbb{R}$ — функция расстояния на (M,g), определенная формулой

$$d(v,w) = \inf_{x\in\Omega(M,v,w)} \mathcal{L}(x).$$

Поступила 31.03.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00331-а, поддержана Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, шифр проекта НК-13П-13, контракт № П945.

Обозначим символом $\mathbb{N}^*(M)$ множество целых неотрицательных k, для которых $H_k(\Omega(M,v,w)) \neq 0$. Так как гомотопический тип пространства $\Omega(M,v,w)$ не зависит от точек v и w, то обозначение корректно.

Согласно принципу минимакса Биркгофа (см., например, [1]) каждому ненулевому классу гомологий σ пространства $\Omega(M,v,w)$ соответствует критическое значение функционала длины $\mathcal{L}$, определенное формулой

$$l_\sigma = \inf_{c\in\sigma} \sup_{x\in|c|} \mathcal{L}(x), \tag{1}$$

где $|c|$ — носитель сингулярного цикла c. Число l_σ также называют критическим уровнем функционала $\mathcal{L}$, порожденным классом σ. Для любого $k \in \mathbb{N}^*(M)$ положим

$$\mathcal{L}_k(M,v,w) = \{l_\sigma | \sigma \in H_k(\Omega(M,v,w)) \setminus \{0\}\}.$$

В [2] и [3] посредством формулы

$$d_k(v,w) = \inf \mathcal{L}_k(M,v,w) \tag{2}$$

построены отображения $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$. Там же показано, что по ряду свойств эти отображения аналогичны метрике d. В частности, они неотрицательны, симметричны, удовлетворяют неравенству треугольника, непрерывны. Кроме того, очевидно, $d_0 = d$. По этим причинам d_k названы функциями H_k-расстояния на (M,g).

С помощью обобщенных функций расстояния d_k на расслоенных римановых многообразиях типа Калуцы–Клейна в [3] также получена новая теорема существования решений двухточечной краевой задачи для гироскопических систем с многозначным функционалом действия, усиливающая результаты статьи [4].

Основным результатом данной работы является теорема о реализуемости обобщенных расстояний $d_k(v,w)$ как критических значений функционала длины $\mathcal{L} : \Omega(M,v,w) \to \mathbb{R}$, порожденных некоторыми нетривиальными классами гомологий пространства $\Omega(M,v,w)$.

2. Множества критических уровней

В данном разделе исследуются свойства множеств критических уровней

$$\mathcal{L}_k(M,v,w) = \{l_\sigma | \sigma \in H_k^*(\Omega(M,v,w))\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}^*(M)$, v и w — произвольные точки многообразия M, $\sigma \in H_k^*(\Omega(M,v,w)) \setminus \{0\}$, l_σ — критический уровень, отвечающий классу σ. Тогда для любого положительного числа ε существует цикл $c_\varepsilon \in \sigma$, удовлетворяющий неравенствам*

$$l_\sigma < \sup_{x\in|c_\varepsilon|} \mathcal{L}(x) < l_\sigma + \varepsilon.$$

Доказательство. Число l_σ по определению является частичным пределом множества

$$S = \{\sup_{x\in|c|} \mathcal{L}(x) \mid c \in \sigma\},$$

т. е. существует последовательность $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset S$, сходящаяся к l_σ. Тогда найдется число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$l_\sigma \leq s_n < l_\sigma + \varepsilon/2 \tag{3}$$

для всех $n > n_\varepsilon$. Выберем любой элемент s_n, $n > n_\varepsilon$, и обозначим через c_n цикл из класса σ, для которого $\sup\limits_{x\in|c_n|} \mathcal{L}(x) = s_n$.

Выберем петлю $y \in \Omega(M, w, w)$ длины $\varepsilon/2$, гомотопную в M вырожденной петле. Отображение $f : \Omega(M, v, w) \to \Omega(M, v, w)$, определенное формулой $f(x) = xy$, является гомотопической эквивалентностью, гомотопной тождественному отображению пространства $\Omega(M, v, w)$ на себя. Следовательно, цикл $\overline{c}_n = f_*(c_n)$ гомологичен c_n. А в силу выбора петли y имеем

$$\sup_{z \in |\overline{c}_n|} \mathcal{L}(z) = \sup_{x \in |c_n|} \mathcal{L}(x) + \varepsilon/2 = s_n + \varepsilon/2. \tag{4}$$

Согласно (3) и (4) цикл $\overline{c}_n$ обладает свойством

$$l_\sigma < \sup_{z \in |\overline{c}_n|} \mathcal{L}(y) < l_\sigma + \varepsilon$$

и для завершения доказательства осталось положить $c_\varepsilon = \overline{c}_n$. □

Лемма 2.2. *Рассмотрим число $k \in \mathbb{N}^*(M)$, точки $v, w \in M$ и отличный от нуля класс гомологий $\sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))$. Тогда для любого числа $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ классам σ и $\lambda\sigma$ соответствует один критический уровень l_σ функционала $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть

$$\sigma = [c_k] = \{c_k + \partial c_{k+1} \mid c_{k+1} \in C_{k+1}(\Omega(M, v, w))\}.$$

Тогда по определению

$$\lambda\sigma = [\lambda c_k] = \{\lambda c_k + \partial \widetilde{c}_{k+1} \mid \widetilde{c}_{k+1} \in C_{k+1}(\Omega(M, v, w))\}.$$

Отсюда, воспользовавшись равенствами

$$\partial((1/\lambda)\widetilde{c}_{k+1}) = (1/\lambda)\partial\widetilde{c}_{k+1}$$

и

$$(1/\lambda)C_{k+1}(\Omega(M, v, w)) = C_{k+1}(\Omega(M, v, w)),$$

получим

$$\lambda\sigma = \{\lambda(c_k + \partial c_{k+1}) \mid c_{k+1} \in C_{k+1}(\Omega(M, v, w))\}.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\lambda\sigma = \{\lambda z \mid z \in \sigma\}. \tag{5}$$

Рассмотрим произвольный элемент $c \in \sigma$. Он имеет вид $c = \sum\limits_i g_i z_i$, где $g_i \in \mathbb{R}$, $z_i : \Delta^k \to M$ — сингулярные симплексы. Так как $\lambda c = \sum\limits_i (\lambda g_i) z_i$, то

$$|\lambda c| = \bigcup_i |z_i| = |c|. \tag{6}$$

Согласно (5) и (6) получим $\{|\overline{c}| : \overline{c} \in \lambda\sigma\} = \{|c| : c \in \sigma\}$. Следовательно,

$$l_{\lambda\sigma} = \inf\left\{\sup_{y \in |\overline{c}|} \mathcal{L}(y) | \overline{c} \in \lambda\sigma\right\} = \inf\left\{\sup_{x \in |c|} \mathcal{L}(y) | c \in \sigma\right\} = l_\sigma.$$ □

Лемма 2.3. *Пусть $k \in \mathbb{N}^*(M)$, v и w — произвольные точки многообразия M, а σ_1 и σ_2 — линейно независимые k-мерные классы гомологий пространства $\Omega(M, v, w)$. Предположим, что критические уровни l_{σ_1} и l_{σ_2} функционала длины $\mathcal{L}$, отвечающие этим классам, различны. Тогда для любых ненулевых действительных чисел λ_1 и λ_2 критический уровень, отвечающий классу $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2$, равен максимальному из значений l_{σ_1} и l_{σ_2}.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2, не нарушая общности, можно считать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Гомологический класс $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2$ отличен от нуля в силу линейной независимости классов σ_1 и σ_2. Следовательно, определен критический уровень l_σ.

Пусть для определенности $l_{\sigma_1} > l_{\sigma_2}$. Докажем, что тогда справедливо неравенство

$$l_\sigma \geq l_{\sigma_1}. \tag{7}$$

Действительно, предположим, что оно не выполнено. Положим

$$\delta = \min\{l_{\sigma_1} - l_\sigma, l_{\sigma_1} - l_{\sigma_2}\} \quad \text{и} \quad L = \max\{l_{\sigma_2}, l_\sigma\} + \delta/2.$$

По построению чисел L и δ имеет место равенство $2L = \max\{l_{\sigma_2}, l_\sigma\} + l_{\sigma_1}$. При этом $l_{\sigma_1} = L + (L - \max\{l_{\sigma_2},\, l_\sigma\}) = L + \delta/2$. Так как $\delta > 0$, то отсюда следуют неравенства

$$l_{\sigma_2} < L < l_{\sigma_1} \quad \text{и} \quad l_\sigma < L < l_{\sigma_1}. \tag{8}$$

Применив лемму 2.1 к классам σ_2 и σ и числам $\varepsilon_2 = L - l_{\sigma_2}$ и $\varepsilon = L - l_\sigma$ соответственно, получим, что существуют циклы $c_2 \in \sigma_2$ и $c \in \sigma$, удовлетворяющие неравенствам

$$l_{\sigma_2} < \sup_{x\in|c_2|} \mathcal{L}(x) < L \quad \text{и} \quad l_\sigma < \sup_{y\in|c|} \mathcal{L}(y) < L. \tag{9}$$

Рассмотрим подпространство

$$\Omega^L(M,v,w) = \{x \in \Omega(M,v,w) \mid \mathcal{L}(x) \leq L\},$$

включение $i : \Omega^L(M,v,w) \to \Omega(M,v,w)$ и индуцированный им гомоморфизм $i_* : H_k(\Omega^L(M,v,w)) \to H_k(\Omega(M,v,w))$. В силу (9) носители циклов c_2 и c целиком содержатся в $\Omega^L(M,v,w)$. Следовательно, определены гомологические классы $\sigma_2', \sigma' \in H_k(\Omega^L(M,v,w))$, содержащие циклы c_2 и c. При этом $i_*(\sigma_2') = \sigma_2$ и $i_*(\sigma') = \sigma$. Последнее означает, что элементы σ_2' и σ' группы $H_k(\Omega^L(M,v,w))$ линейно независимы.

Согласно доказанному выше образы всех сингулярных симплексов, линейные комбинации которых образуют циклы c и c_2, лежат в подпространстве $\Omega^L(M,v,w)$. Поэтому и для носителя $|c_1|$ цикла $c_1 = c - c_2$ верно включение $|c_1| \subset \Omega^L(M,v,w)$. Обозначим через σ_1' гомологический класс цикла c_1 в пространстве $\Omega^L(M,v,w)$. Тогда $\sigma_1' = \sigma' - \sigma_2'$. Поскольку σ' и σ_2' линейно независимы, то $\sigma_1' \neq 0$ и определен критический уровень $l_{\sigma_1'}$ функционала $\mathcal{L}$ на $\Omega^L(M,v,w)$, соответствующий классу σ_1'. Кроме того,

$$i_*(\sigma_1') = i_*(\sigma' - \sigma_2') = i_*(\sigma') - i_*(\sigma_2') = \sigma - \sigma_2 = \sigma_1.$$

Так как $\Omega^L(M,v,w) \subset \Omega(M,v,w)$, то $\sigma_1' \subset \sigma_1$ и

$$S' = \Big\{ \sup_{x\in|\widetilde{c_1}|} \mathcal{L}(x) \mid \widetilde{c_1} \in \sigma_1' \Big\} \subset S = \Big\{ \sup_{y\in|c_1|} \mathcal{L}(y) \mid c_1 \in \sigma_1 \Big\}.$$

Отсюда следует

$$l_{\sigma_1} = \inf S \leq l_{\sigma_1'} = \inf S'. \tag{10}$$

Носитель любого цикла $\widetilde{c_1}$ из класса σ_1' целиком содержится в $\Omega^L(M,v,w)$ и потому $\sup\limits_{x\in|\widetilde{c_1}|} \mathcal{L}(x) \leq L$. Следовательно, все элементы множества S' не превышают числа L. Но тогда

$$l_{\sigma_1'} = \inf S' \leq L. \tag{11}$$

В силу (10) и (11) $l_{\sigma_1} \leq l_{\sigma_1'} \leq L$, что противоречит (8). Таким образом, наше допущение неверно и имеет место неравенство (7).

Докажем теперь, что

$$l_\sigma \leq l_{\sigma_1}. \tag{12}$$

Для этого рассмотрим произвольное положительное число $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Лемма 2.1 гарантирует существование циклов $\overline{c_1} \in \sigma_1$ и $\overline{c_2} \in \sigma_2$, удовлетворяющих условиям

$$l_{\sigma_1} \le \sup_{x\in|\overline{c_1}|} \mathcal{L}(x) < l_{\sigma_1} + \varepsilon \quad \text{и} \quad l_{\sigma_2} \le \sup_{y\in|\overline{c_2}|} \mathcal{L}(y) < l_{\sigma_1}.$$

Носитель цикла $\overline{c_1}$ компактен, и функционал $\mathcal{L}$ непрерывен на $|\bar{c}_1|$. Поэтому существует путь $x_0 \in |\bar{c}_1|$ такой, что $\mathcal{L}(x_0) = \sup\limits_{x\in|\bar{c}_1|} \mathcal{L}(x)$. Поскольку

$$\sup_{y\in|\overline{c_2}|} \mathcal{L}(y) < l_{\sigma_1} \le \sup_{x\in|\overline{c_1}|} \mathcal{L}(x),$$

то существует окрестность U_{x_0} точки $x_0 \in |\overline{c_1}|$, удовлетворяющая равенству $U_{x_0} \cap |\overline{c_2}| = \emptyset$.

Положим $\bar{c} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$. Тогда

$$\sup_{z\in|\bar{c}|} \mathcal{L}(z) \le \max\{\sup_{x\in|\overline{c_1}|} \mathcal{L}(x), \sup_{y\in|\overline{c_2}|} \mathcal{L}(x)\} = \sup_{x\in|\overline{c_1}|} \mathcal{L}(x). \tag{13}$$

Рассмотрим произвольный путь $x \in U_{x_0} \cap |\overline{c_1}|$. Цикл $\overline{c_1}$ содержит сингулярный симплекс $s : \Delta^k \to M$, для которого $x \in \operatorname{im} s$. Так как $\operatorname{im} s \cap U_{x_0} \ne \emptyset$ и $|\overline{c_2}| \cap U_{x_0} = \emptyset$, то в цикл $\overline{c_2}$ симплекс s входить не может. Следовательно, s содержится в сумме $\bar{c} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$ и, в частности, $x \in |\bar{c}|$.

Этим доказано, что $U_{x_0} \cap |\overline{c_1}| \subset |\bar{c}|$, откуда следует неравенство

$$\sup_{z\in|\bar{c}|} \mathcal{L}(z) \ge \sup_{x\in|\overline{c_1}|} \mathcal{L}(x). \tag{14}$$

Таким образом, из (13), (14) и выбора $\overline{c_1}$

$$\sup_{z\in|\bar{c}|} \mathcal{L}(z) = \sup_{x\in|\overline{c_1}|} \mathcal{L}(x) < l_{\sigma_1} + \varepsilon.$$

Поскольку $[\bar{c}] = [\bar{c}_1 + \bar{c}_2] = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, то из предыдущей формулы следует $l_\sigma < l_{\sigma_1} + \varepsilon$. Так как число ε предполагалось произвольным, то, устремляя его к нулю в последнем неравенстве, получим (12).

Согласно (7) и (12) лемма доказана.

Лемма 2.4. *Допустим, что $k \in \mathbb{N}^*(M)$, $v, w \in M$ и V — конечномерное подпространство пространства $H_k(\Omega(M, v, w))$. Тогда V обладает таким базисом $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, что $l_\sigma \in \{l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, \ldots, l_{\sigma_m}\}$ для всех $\sigma \in V \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по размерности m подпространства V.

Для $m = 1$ утверждение следует из леммы 2.2.

Допустим, что оно верно для подпространств размерности $m-1$, и рассмотрим подпространство $V \subset H_k(\Omega(M, v, w))$ размерности m. Выберем $(m-1)$-мерное подпространство $W \subset V$. Тогда W обладает базисом $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}$, для которого $l_{\overline{\sigma}} \in \{l_{\sigma_1}, \ldots, l_{\sigma_{m-1}}\}$ при любом $\overline{\sigma} \in W \setminus \{0\}$.

Предположим сначала, что для любого $\sigma' \in V \setminus W$ верно включение $l_{\sigma'} \in \{l_{\sigma_1}, \ldots, l_{\sigma_{m-1}}\}$. Тогда, выбрав в качестве σ_m любой элемент из $V \setminus W$, получим базис $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ подпространства V с требуемым свойством.

В противном случае существует элемент $\sigma_m \in V \setminus W$, для которого $l_{\sigma_m} \ne l_{\sigma_i}$ при всех $i = 1, \ldots, m-1$. Покажем, что и в этом случае базис $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ подпространства V обладает нужным свойством.

Действительно, произвольный элемент $\sigma \in V \setminus \{0\}$ раскладывается в сумму $\sigma = \sigma_* + t\sigma_m$, где $\sigma_* \in W$ и $t \in \mathbb{R}$.

Если $\sigma_* = 0$, то по лемме 2.2 $l_\sigma = l_{t\sigma_m} = l_{\sigma_m} \in \{l_{\sigma_1}, \ldots, l_{\sigma_m}\}$.

Пусть далее $\sigma_* \neq 0$. Тогда по предположению индукции найдется такой номер $i \in \{1,\dots,m-1\}$, что $l_{\sigma_*} = l_{\sigma_i}$. При $t=0$ имеем $l_\sigma = l_{\sigma_i}$. Если $t \neq 0$, то по лемме 2.2 $l_{t\sigma_m} = l_{\sigma_m}$, а по лемме 2.3 $l_\sigma = \max\{l_{\sigma_i}, l_{\sigma_m}\} \in \{l_{\sigma_1},\dots,l_{\sigma_m}\}$. □

3. Классы гомологий, реализующие H_k-расстояния

Теорема 3.1. *Для произвольных $k \in \mathbb{N}^*(M)$ и $v,w \in M$ существует гомологический класс $\sigma \in H_k(\Omega(M,v,w))$ такой, что $d_k(v,w) = l_\sigma$.*

Доказательство. Выберем и зафиксируем произвольное действительное число $L > d_k(v,w)$, не являющееся критическим значением функционала длины $\mathcal{L} : \Omega(M,v,w) \to \mathbb{R}$. Рассмотрим подпространство

$$\Omega^L(M,v,w) = \{x \in \Omega(M,v,w) \mid \mathcal{L}(x) \leq L\},$$

включение $i : \Omega^L(M,v,w) \to \Omega(M,v,w)$ и индуцированный им гомоморфизм

$$i_* : H_k(\Omega^L(M,v,w)) \to H_k(\Omega(M,v,w)).$$

Обозначим через V образ гомоморфизма i_*.

По определению функции d_k пересечение $(-\infty, L) \cap \mathcal{L}_k(M,v,w)$ не пусто. С другой стороны, если $l_{\sigma'} \in (-\infty, L) \cap \mathcal{L}_k(M,v,w)$, то согласно равенству (1) найдется цикл $c \in \sigma'$, для которого $\sup\limits_{x \in |c|} \mathcal{L}(x) < L$. При этом $c \subset \Omega^L(M,v,w)$ и, следовательно, определен класс гомологий $[c]^L \in H_k(\Omega^L(M,v,w))$. Таким образом, $\sigma' = i_*([c]^L) \in V$ и

$$(-\infty, L) \cap \mathcal{L}_k(M,v,w) \subset \{l_{\sigma'} | \sigma' \in V \setminus \{0\}\}. \tag{15}$$

В силу теоремы редукции ([5], гл. 9, пп. 3 и 4) и выбора числа L пространство $\Omega^L(M,v,w)$ гомотопически эквивалентно конечномерному компактному многообразию. Поэтому размерности векторных пространств $H_k(\Omega^L(M,v,w))$ и V конечны. Лемма 2.4 влечет существование такого базиса $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ пространства V, что

$$\{l_{\sigma'} | \sigma' \in V \setminus \{0\}\} = \{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_m}\}. \tag{16}$$

Согласно (15) и (16)

$$(-\infty, L) \cap \mathcal{L}_k(M,v,w) \subset \{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_m}\}.$$

Следовательно,

$$d_k(v,w) = \inf \mathcal{L}_k(M,v,w) = l_{\sigma_i},$$

для некоторого $i \in \{1,\dots,m\}$. Для завершения доказательства положим $\sigma = \sigma_i$. □

Замечание 3.1. Построенный в теореме элемент $\sigma \in \Omega(M,v,w)$ логично назвать гомологическим классом, реализующим H_k-расстояние между точками v и w. При $k=0$ в данном качестве выступает класс цикла, состоящего из минимальной геодезической, соединяющей точки v и w.

Литература

[1] Люстерник Л.А. *Топология и вариационное исчисление* // УМН. – 1946. – Т. 1. – № 1. – С. 30–56.
[2] Ершов Ю.В. *Обобщения функции расстояния риманова многообразия* // Вестн. ННГУ. Сер. Матем. – 2006. – № 1. – С. 29–37.
[3] Ершов Ю.В., Яковлев Е.И. *Обобщенные функции расстояния римановых многообразий и движения гироскопических систем* // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 1. – С. 87–100.
[4] Яковлев Е.И. *Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов* // Функцион. анализ и его прилож. – 1996. – Т. 30. – № 1. – С. 89–92.
[5] Постников М.М. *Введение в теорию Морса.* – М.: Наука, 1971. – 568 с.

Ю.В. Ершов

младший научный сотрудник,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950,

e-mail: eryv@yandex.ru

Е.И. Яковлев

профессор, кафедра геометрии и высшей алгебры,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950,

e-mail: yei@uic.nnov.ru

Yu.V. Ershov

Junior Researcher,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: eryv@yandex.ru

E.I. Yakovlev

Professor, Chair of Geometry and Higher Algebra
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: yei@uic.nnov.ru