ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.743:514.13

И.П. ДЕНИСОВА

ТЕОРЕМА ОБ ОБЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В [1], [2] были получены соотношения тензорной алгебры, которые нашли применение при решении различных задач математической физики [3], [4]. Эти формулы используются в теории гравитации и нелинейной электродинамике для построения в компактном виде тензора, обратного к заданному, а также его определителя. Так, например, соотношения, полученные в [1], [2], были использованы для нахождения дисперсионного уравнения в [5], что позволило записать и исследовать это уравнение.

Целью данной статьи является доказательство теоремы о существовании более общих тензорных соотношений, которые позволяют значительно расширить область применения алгебраических тензорных преобразований при решении задач математической физики.

Рассмотрим произвольное четырехмерное риманово пространство с метрическим тензором $g_{ik} = g_{ik}(x)$, определитель которого $g = \det \|g_{ik}\|$ не равен нулю. Пусть в этом пространстве задан ковариантный тензор второго ранга $\psi_{mi} = \psi_{mi}(x)$. Введем некоторые определения.

Определение 1. P-й степенью тензора ψ_{km} называется тензор второго ранга $\psi^{(P)}_{km} = \psi^{(P)}_{km}(x)$, построенный по следующему правилу: $\psi^{(0)}_{km} = g_{km}$ при $P = 0$; $\psi^{(P)}_{km} = \psi^{(P-1)}_{kn} g^{nl} \cdot \psi_{lm}$ при $P \geq 1$.

Определение 2. Инвариантом P-го порядка $\psi_{(P)}$ тензора ψ_{km} называется скаляр, получаемый сверткой индексов у P-й степени этого тензора: $\psi_{(P)} = \psi^{(P)}_{km} g^{km}$.

Теорема. *В произвольном четырехмерном римановом пространстве справедливо тензорное соотношение*

$$\begin{vmatrix} \psi_{ak} & \psi_{ai} & \psi_{am} & \psi_{al} \\ \psi_{bk} & \psi_{bi} & \psi_{bm} & \psi_{bl} \\ \psi_{jk} & \psi_{ji} & \psi_{jm} & \psi_{jl} \\ \psi_{nk} & \psi_{ni} & \psi_{nm} & \psi_{nl} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} g_{ak} & g_{ai} & g_{am} & g_{al} \\ g_{bk} & g_{bi} & g_{bm} & g_{bl} \\ g_{jk} & g_{ji} & g_{jm} & g_{jl} \\ g_{nk} & g_{ni} & g_{nm} & g_{nl} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $\alpha = [\psi^4_{(1)} + 8\psi_{(1)}\psi_{(3)} + 3\psi^2_{(2)} - 6\psi_{(4)} - 6\psi_{(2)}\psi^2_{(1)}]/24$.

Для доказательства запишем известное выражение ([6], гл. 1, § 6, с. 33; гл. X, § 83, с. 297) $gE^{prst}\psi_{ap}\psi_{br}\psi_{js}\psi_{nt} = E_{abjn} \det \|\psi_{hq}\|$, где $\det \|\psi_{hq}\|$ — определитель матрицы, элементами которой являются компоненты тензора ψ_{hq}, а E^{prst} — аксиальный тензор Леви-Чивита. Умножим его на E_{kiml}/g. Учитывая, что произведение двух аксиальных тензоров Леви-Чивита может быть выражено ([6], гл. 1, § 6, с. 33) в виде определителя матрицы, элементы которой выражаются через метрический тензор, получим

$$\begin{vmatrix} \delta^p_k & \delta^p_i & \delta^p_m & \delta^p_l \\ \delta^r_k & \delta^r_i & \delta^r_m & \delta^r_l \\ \delta^s_k & \delta^s_i & \delta^s_m & \delta^s_l \\ \delta^t_k & \delta^t_i & \delta^t_m & \delta^t_l \end{vmatrix} \psi_{ap}\psi_{br}\psi_{js}\psi_{nt} = \begin{vmatrix} g_{ak} & g_{ai} & g_{am} & g_{al} \\ g_{bk} & g_{bi} & g_{bm} & g_{bl} \\ g_{jk} & g_{ji} & g_{jm} & g_{jl} \\ g_{nk} & g_{ni} & g_{nm} & g_{nl} \end{vmatrix} \frac{\det \|\psi_{hq}\|}{g}.$$

Раскрывая полученные определители по общим правилам, приходим к соотношению

$$\psi_{ak}[\psi_{bi}(\psi_{jm}\psi_{nl}-\psi_{jl}\psi_{nm})-\psi_{bm}(\psi_{ji}\psi_{nl}-\psi_{jl}\psi_{ni})+\psi_{bl}(\psi_{ji}\psi_{nm}-\psi_{jm}\psi_{ni})]-$$
$$-\psi_{ai}[\psi_{bk}(\psi_{jm}\psi_{nl}-\psi_{jl}\psi_{nm})-\psi_{bm}(\psi_{jk}\psi_{nl}-\psi_{jl}\psi_{nk})+\psi_{bl}(\psi_{jk}\psi_{nm}-\psi_{jm}\psi_{nk})]+$$
$$+\psi_{am}[\psi_{bk}(\psi_{ji}\psi_{nl}-\psi_{jl}\psi_{ni})-\psi_{bi}(\psi_{jk}\psi_{nl}-\psi_{jl}\psi_{nk})+\psi_{bl}(\psi_{jk}\psi_{ni}-\psi_{ji}\psi_{nk})]-$$
$$-\psi_{al}[\psi_{bk}(\psi_{ji}\psi_{nm}-\psi_{jm}\psi_{ni})-\psi_{bi}(\psi_{jk}\psi_{nm}-\psi_{jm}\psi_{nk})+\psi_{bm}(\psi_{jk}\psi_{ni}-\psi_{ji}\psi_{nk})]=$$
$$=\Big\{g_{ak}[g_{bi}(g_{jm}g_{nl}-g_{jl}g_{nm})-g_{bm}(g_{ji}g_{nl}-g_{jl}g_{ni})+g_{bl}(g_{ji}g_{nm}-g_{jm}g_{ni})]-$$
$$-g_{ai}[g_{bk}(g_{jm}g_{nl}-g_{jl}g_{nm})-g_{bm}(g_{jk}g_{nl}-g_{jl}g_{nk})+g_{bl}(g_{jk}g_{nm}-g_{jm}g_{nk})]+$$
$$+g_{am}[g_{bk}(g_{ji}g_{nl}-g_{jl}g_{ni})-g_{bi}(g_{jk}g_{nl}-g_{jl}g_{nk})+g_{bl}(g_{jk}g_{ni}-g_{ji}g_{nk})]-$$
$$-g_{al}[g_{bk}(g_{ji}g_{nm}-g_{jm}g_{ni})-g_{bi}(g_{jk}g_{nm}-g_{jm}g_{nk})+g_{bm}(g_{jk}g_{ni}-g_{ji}g_{nk})]\Big\}\frac{\det\|\psi_{hq}\|}{g}. \quad (2)$$

Производя теперь последовательную свертку индексов a и k, b и i, j и m, n и l, приходим к выражению $\det\|\psi_{hq}\|=\frac{g}{24}[\psi^4_{(1)}+8\psi_{(1)}\psi_{(3)}+3\psi^2_{(2)}-6\psi_{(4)}-6\psi_{(2)}\psi^2_{(1)}]$, с помощью которого соотношение (2) перепишем в виде (1). $\square$

Следствие. Пусть в четырехмерном римановом пространстве определитель тензора второго ранга ψ_{ik} отличен от нуля. Тогда обратный тензор Φ^{mi}, удовлетворяющий соотношению $\Phi^{mi}\cdot\psi_{ik}=\delta^m_k$, где δ^m_k — тензор Кронекера, может быть представлен в виде

$$\Phi^{mi}=\{24\psi^{mi}_{(3)}-24\psi^{mi}_{(2)}\psi_{(1)}+12\psi^{mi}[\psi^2_{(1)}-\psi_{(2)}]-4g^{mi}[\psi^3_{(1)}-3\psi_{(2)}\psi_{(1)}+$$
$$+2\psi_{(3)}]\}[6\psi_{(4)}+6\psi_{(2)}\psi^2_{(1)}-8\psi_{(3)}\psi_{(1)}-3\psi^2_{(2)}-\psi^4_{(1)}]^{-1}.$$

Замечание. В случае антисимметричного тензора второго ранга $\psi_{(1)}=\psi_{(3)}=0$, и установленные соотношения значительно упрощаются.

Литература

1. Бондарев А.Л. *Новое тождество в пространстве Минковского и некоторые его применения* // Теор. и матем. физика. – 1994. – Т. 101. – № 2. – С. 315–319.
2. Denisova I.P., Mehta B.V. *Tensor expressions for solving Einstein's equations by the method of sequential approximation* // General Relat. and Gravitation. – 1997. – V. 29. – № 5. – P. 583–589.
3. Вшивцев А.С., Денисова И.П., Мясников В.П. *Использование метода суперпотенциала в задачах излучения слабых гравитационных волн электромагнитными системами* // Физика Земли. – 1997. – № 10. – С. 47–50.
4. Denisova I.P., Dalal M. *Development of the method of potentials for the problems of gravitation-electromagnetic conversion* // J. of Math. Phys. – 1997. – V. 38. – № 11. – P. 5820–5832.
5. Denisov V.I., Denisov M.I. *Verification of Einstein's principle of equivalence using laser gyroscope in terrestrial conditions* // Phys. Review, D. – 1999. – V. 60. – № 4. – P. 047301-1–047301-4.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Московский государственный авиационный технологический университет

Поступила 18.01.1999